2節　三角比の応用

1 三角形の面積

ねらい　2辺の長さとその間の角のサインの値から，△ABC の面積を表す公式を導きます。その公式を用いて，いろいろな三角形の面積を求めます。

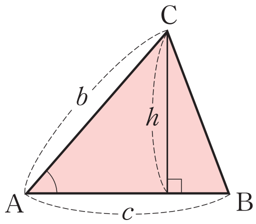
次の図の △ABC で，面積を S，高さを h とすると

$$S=\frac{1}{2}ch$$

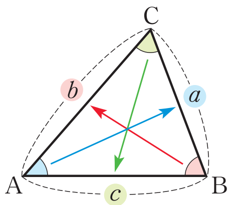
ここで，$h=b\sin A$ であるから

$$S=\frac{1}{2}c\times h=\frac{1}{2}c\times b\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A$$

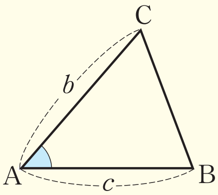


◀一般に，三角形の角と辺を表す文字の対応は下のように定める。



三角形の面積

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$



◀三角形の面積は，2辺とその間の角を用いて求めることができる。

ほかの2辺とその間の角からも同様の公式が得られる。

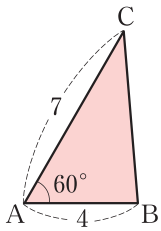
$$S=\frac{1}{2}ca\sin B,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

●三角形の面積の公式を用いて，いろいろな三角形の面積を求めてみよう。

例 1　△ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=60^\circ$ のとき，この三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 7\times 4\times\sin 60^\circ$$

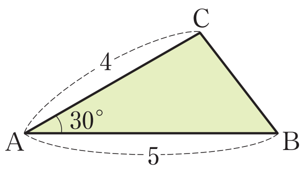
$$=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

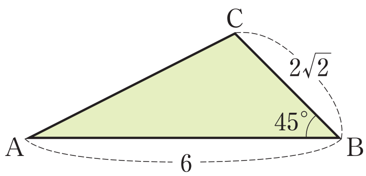


問 1　次の △ABC の面積を求めなさい。

→p.110 復習問題1(1)

(1)　$b=4$，$c=5$，$A=30^\circ$　　(2)　$a=2\sqrt{2}$，$c=6$，$B=45^\circ$

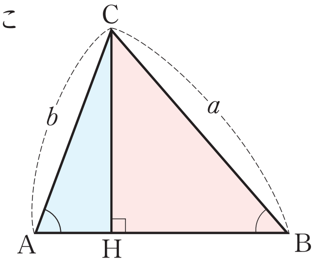




2 正弦定理

ねらい 三角形の３つの角のサインの値と，それぞれの角に対応する３辺の長さの間に，どのような関係が成り立つか考えます。

△ABC で，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引くと



△AHC で

$$\mathrm{CH} = b\sin A$$

△BCH で

$$\mathrm{CH} = a\sin B$$

であるから

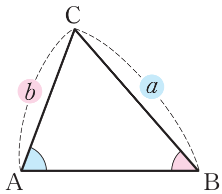
$$b\sin A = a\sin B$$

◀ $\sin A = \dfrac{\mathrm{CH}}{b}$ より
$\mathrm{CH} = b\sin A$
$\sin B = \dfrac{\mathrm{CH}}{a}$ より
$\mathrm{CH} = a\sin B$

が成り立つことがわかる。この両辺を，$\sin A \times \sin B$ でわると

$$\frac{b\,\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A} \times \sin B} = \frac{a\,\cancel{\sin B}}{\sin A \times \cancel{\sin B}}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

◀ 

となる。

同様にして，次の式も成り立つことがわかる。

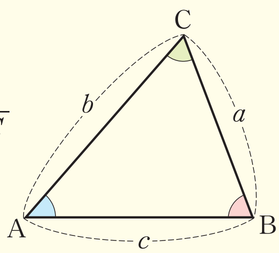
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \qquad \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

よって，次の関係式が得られる。これを **正弦定理** という。

正弦定理

△ABC で

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$



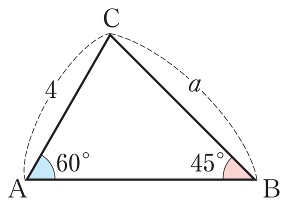
例題 1　△ABC で，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$b=4$ のとき，a の値を求めなさい。

解　正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}$$

よって

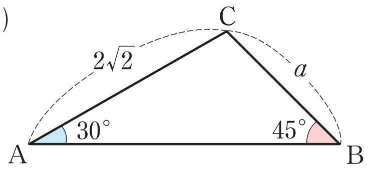
$$a=\frac{4}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=4\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

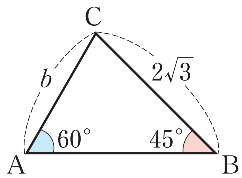


◀ 2 つの角と 1 つの辺がわかると，ほかの辺を求めることができる。

→p.110 復習問題2

問 2　次の △ABC で，a，b の値を求めなさい。

(1)


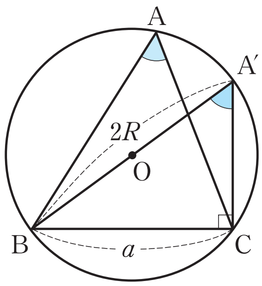
(2)


外接円との関係

△ABC の 3 つの頂点を通る円を △ABC の **外接円**（がいせつえん）という。

外接円の半径を R とすると，次の関係があることが知られている。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



◀ 円周角の定理により
$\angle A=\angle A'$
△A′BC は直角三角形であるから
$\dfrac{a}{2R}=\sin A'=\sin A$
よって　$\dfrac{a}{\sin A}=\underline{2R}$
↑
「外接円の直径」

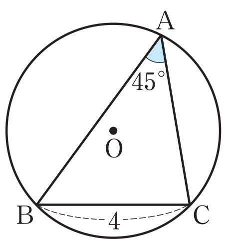
●上の式を用いて，外接円の半径を求めてみよう。

例 2　△ABC で，$A=45^\circ$，$a=4$ のとき，この三角形の外接円の半径を R とすると

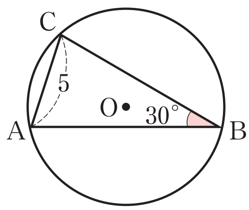
$$\frac{4}{\sin 45^\circ}=2R$$

よって　$2R=4\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

したがって　$R=2\sqrt{2}$



問 3　△ABC で，$B=30^\circ$，$b=5$ のとき，この三角形の外接円の半径を求めなさい。

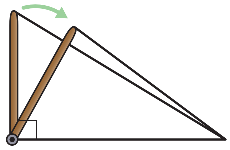


3
三角比

3 余弦定理

ねらい　三角形の１つの角と，３辺の長さの間に，どのような関係が成り立つか考えます。

直角三角形では，３辺の長さの間には三平方の定理が成り立つ。では，直角三角形でない三角形の３辺の長さの間には，どのような関係式が成り立つだろうか。



右の図のような三角形 ABC において，頂点Cから対辺 AB に垂線 CH を引く。

直角三角形 CHB で，三平方の定理を用いると

$$a^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，直角三角形 AHC で

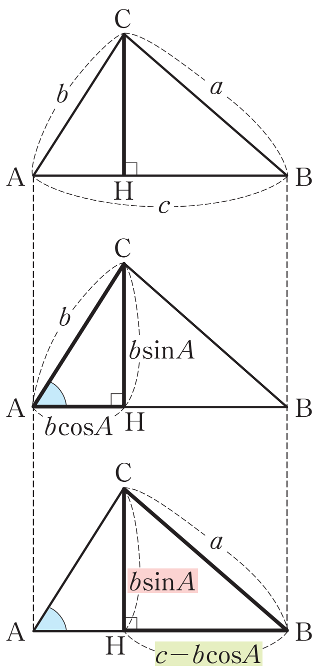
$$\mathrm{CH} = b\sin A \quad \cdots\cdots ②$$

さらに，$\mathrm{AH} = b\cos A$ であるから

$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$



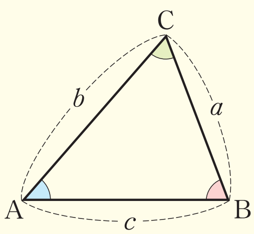
同様にして，次の３つの関係式が得られる。これらをまとめて **余弦定理** という。

◀余弦定理は直角三角形でも成り立つ。

余弦定理

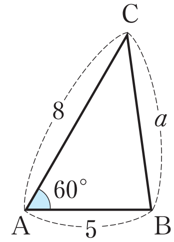
△ABC で

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



例題 2 △ABC で，$b=8$，$c=5$，$A=60^\circ$ のとき，a の値を求めなさい。

解 余弦定理により



$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$= 8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos60^\circ$$
$$= 64+25-80\times\frac{1}{2} = 49$$

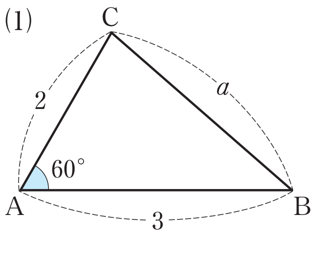
$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=7}$

◀ 2 つの辺とその間の角がわかると，残りの 1 辺を求めることができる。

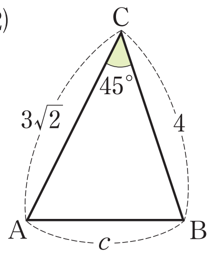
➔p.110 復習問題3

問 4 次の △ABC で，a，c の値を求めなさい。

(1)



(2)



3辺から内角を求める

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を変形すると，$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ となるから

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

が成り立つ。この式を用いると，a，b，c の値から $\cos A$ の値がわかり，∠A の大きさを求めることができる。

◀ 同様に

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

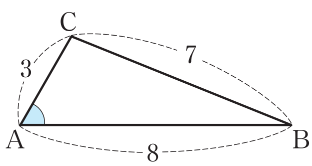
となる。

●**上の式を用いて，三角形の内角の大きさを求めてみよう。**

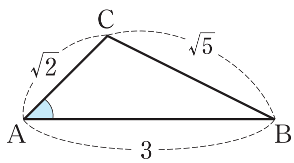
例 3 △ABC で，$a=7$，$b=3$，$c=8$ のとき

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8} = \frac{1}{2}$$

よって　　$\angle A = 60^\circ$



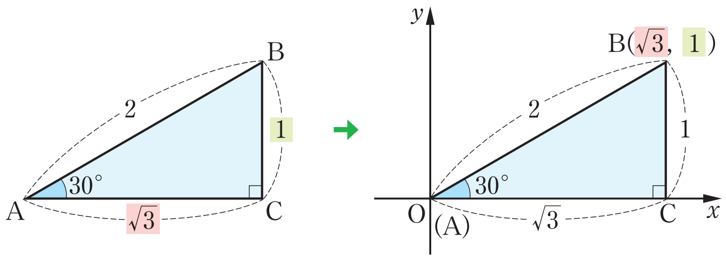
問 5 △ABC で，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$，$c=3$ のとき，∠A の大きさを求めなさい。



4 三角比と座標

ねらい　ここまでは直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきました。ここでは，座標を用いて三角比を鈍角まで拡張することを考えます。

左下の図の直角三角形に対し，右下の図のように座標軸を定めると，点Bの座標は$\left(\sqrt{3},\ 1\right)$となる。



このとき，座標を使うと

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

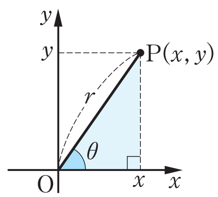
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

とみることができる。

そこで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ に対して，右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角が θ で，長さが r の線分 OP を考え，点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

◀ θ はギリシャ文字の小文字で，シータと読む。



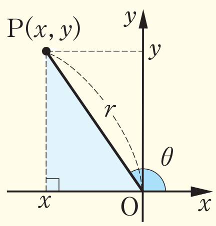
このとき，角 θ の三角比を次のように定める。

鈍角まで拡張した三角比

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



鈍角の三角比

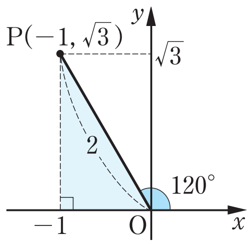
例題 3　120° の三角比の値を求めなさい。

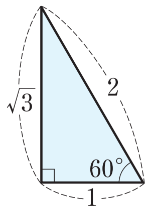
解　下の図のように，$\theta = 120^\circ$, $\mathrm{OP} = 2$ とすると，点Pの座標は $(-1, \sqrt{3})$ となるから，$r = 2$, $x = -1$, $y = \sqrt{3}$ である。よって

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

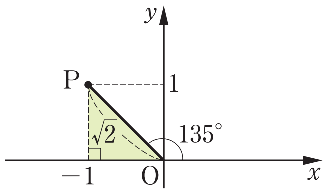
$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

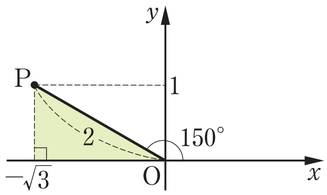
$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

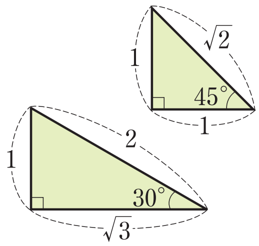




問6　次の図を用いて，135° と 150° の三角比の値を求めなさい。





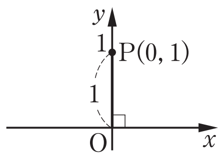


0°，90°，180° の三角比

90° の三角比の値は，右の図のように，$\mathrm{OP} = 1$ とすると，$r = 1$, $x = 0$, $y = 1$ となるから

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$\tan 90^\circ$ の値はない。



◀ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ の分母 x が 0 となる。

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

◀ 三角比の値の符号は，次のようになる。

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	−
$\tan\theta$	＋	−

3 三角比

5 三角比の相互関係

ねらい　θ が鈍角の場合も，鋭角のときと同じように，１つの三角比の値からほかの２つの三角比の値を求めることができます。

θ が鈍角の場合も，次の関係式が成り立つ。

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

例題 4　θ が鈍角で，$\sin\theta=\frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

解　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=\boldsymbol{-\frac{3}{5}}$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta$ より

$$\tan\theta=\frac{4}{5}\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$$

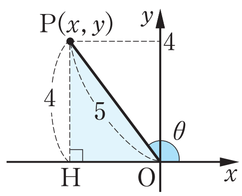
例題 4 は，鋭角のときと同様に，図を用いて考えてもよい。右の図の $\triangle$OPH で，三平方の定理により

$$\mathrm{OH}^2=5^2-4^2=9$$

$\mathrm{OH}>0$ であるから　$\mathrm{OH}=3$

よって，点 P の x 座標は　$x=-3$

したがって　$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，　$\tan\theta=-\frac{4}{3}$

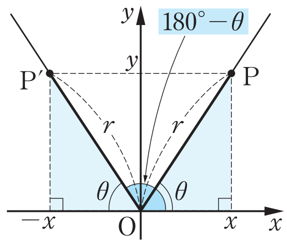


問 7　θ が鈍角で，$\sin\theta=\frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

→p.110 復習問題4

$180^\circ-\theta$ の三角比

θ が鋭角のとき，$180^\circ-\theta$ は鈍角となる。この 2 つの角の三角比の間に，どのような関係が成り立つか考えてみよう。



右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角がそれぞれ θ，$180^\circ-\theta$ である半直線上に，2 点 P と P′ を

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OP'}=r$$

となるようにとると，この 2 点は y 軸に関して対称となる。よって，P の座標が $\mathrm{P}(x,\ y)$ ならば，P′ の座標は $\mathrm{P'}(-x,\ y)$ となる。

これより，$180^\circ-\theta$ の三角比は

$$\sin(180^\circ-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

◀ $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}=-\cos\theta$$

◀ $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

◀ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

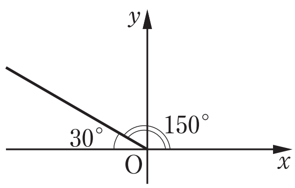
したがって，次の関係式が成り立つ。

$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta}$$

● **$180^\circ-\theta$ の三角比の関係式を用いて，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表してみよう。**

例 4 $150^\circ=180^\circ-30^\circ$ であるから



$$\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ$$
$$\cos150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ$$
$$\tan150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan30^\circ$$

問 8 次の三角比を，鋭角の三角比で表しなさい。

(1) $\sin100^\circ$　　(2) $\cos130^\circ$　　(3) $\tan170^\circ$

6 鈍角の三角比と計量

ねらい　鈍角の場合も，鋭角のときと同じように，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理を用いて，面積や辺の長さなどを求めることができます。

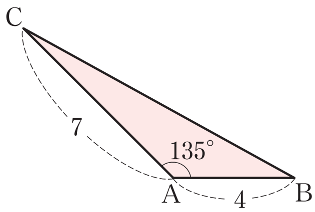
　角が鈍角の場合も，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理が成り立つ。

●三角形の面積を求めてみよう。

例 5　△ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=135^\circ$ のとき，この三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin 135^\circ$$

$$=14\times\frac{1}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$



◀ $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)$
$=\sin 45^\circ$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

●正弦定理，余弦定理を用いて三角形の辺の長さを求めてみよう。

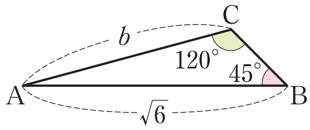
例 6　(1)　△ABC で，$B=45^\circ$，$C=120^\circ$，$c=\sqrt{6}$ のとき，b の値は，正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$$

よって　$b=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ$

$$=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2$$



◀ $\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)$
$=\sin 60^\circ$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

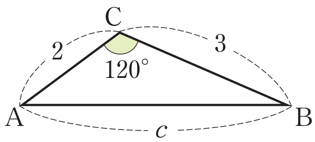
(2)　△ABC で，$a=3$，$b=2$，$C=120^\circ$ のとき，c の値は，余弦定理により

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$=3^2+2^2-2\times 3\times 2\times\cos 120^\circ$$

$$=9+4-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{19}$



◀ $\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)$
$=-\cos 60^\circ$
$=-\dfrac{1}{2}$

問9 次の △ABC について，それぞれの値を求めなさい。

→p.110 復習問題1(2)

(1) $b=\sqrt{3}$, $c=2$, $A=120^\circ$ のときの △ABC の面積 S

(2) $B=30^\circ$，$C=135^\circ$，$c=2$ のときの b の値

(3) $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$C=150^\circ$ のときの c の値

空間図形と三角比

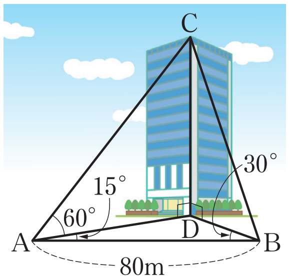
空間図形に含まれる三角形に着目して三角比を用いると，建物の高さなどを求めることができる。

例題 5 右の図で

$\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$，$\angle\mathrm{DAB}=15^\circ$，$\angle\mathrm{DBA}=30^\circ$，

$\mathrm{AB}=80\,\mathrm{m}$

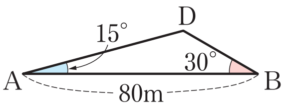
であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。



解 まず，△ABD に着目して AD を求める。

$\angle\mathrm{ADB}=180^\circ-(15^\circ+30^\circ)=135^\circ$

であるから，正弦定理により



$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin 30^\circ}=\frac{80}{\sin 135^\circ}$$

◀△ABD をぬき出して考える。

よって

$$\mathrm{AD}=\frac{80}{\sin 135^\circ}\times\sin 30^\circ$$

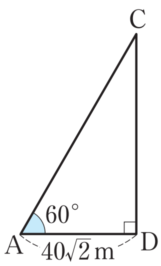
$$=80\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=40\sqrt{2}$$

◀$\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)$
$=\sin 45^\circ$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

次に，△CAD に着目して CD を求める。

◀△CAD をぬき出して考える。



$\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$，　$\angle\mathrm{CDA}=90^\circ$

であるから

$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\tan 60^\circ$

$=40\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\mathbf{40\sqrt{6}}$ **(m)**

問10 例題 5 で，$\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$，$\angle\mathrm{DAB}=15^\circ$，$\angle\mathrm{DBA}=45^\circ$，$\mathrm{AB}=100\,\mathrm{m}$ であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。

→p.110 復習問題5

復　習　問　題

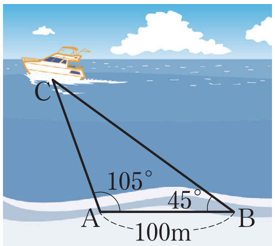
1 次の △ABC の面積を求めなさい。

(1)　$a=5,\ b=12,\ C=30^\circ$

(2)　$b=3,\ c=8,\ A=135^\circ$

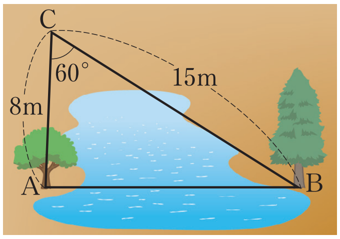
三角形の面積
p.99 例 1
p.108 例 5

2 海岸の 100 m 離れた 2 地点 A，B から船 C を見ると，$A=105^\circ$，$B=45^\circ$ であった。地点 A から船までの距離 AC を求めなさい。



正弦定理
p.101 例題 1

3 C 地点から，池の両側に立つ木 A, B までの距離と，∠ACB を測ると，$\mathrm{AC}=8\,\mathrm{m}$，$\mathrm{BC}=15\,\mathrm{m}$，$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$ であった。
2 本の木の間の距離 AB を求めなさい。



余弦定理
p.103 例題 2

4 θ が鈍角のとき，次の問に答えなさい。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

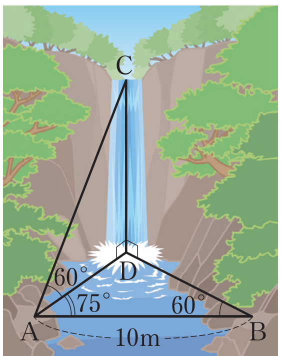
三角比の相互関係
p.106 例題 4

5 右の図で，点 A，B，D は同一水平面上にあり，$\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$，$\angle\mathrm{DAB}=75^\circ$，$\angle\mathrm{DBA}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=10\,\mathrm{m}$ である。

(1)　∠ADB を求めなさい。

(2)　距離 AD を求めなさい。

(3)　滝の高さ CD を求めなさい。



空間図形と三角比
p.109 例題 5