

2 節 2 次関数の値の変化



1 2 次関数の最大値・最小値



2 次関数は最大値や最小値をもつことがあります。このことをグラフを利用して調べ、どのようなときに最大値や最小値をもつか学びます。

● 2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大値や最小値を調べてみよう。

5

例 1 2 次関数 $y = (x-2)^2 + 1$ のグラフは、
直線 $x = 2$ を軸とし、点 $(2, 1)$ を頂点とする
下に凸の放物線である。

よって、右のグラフから

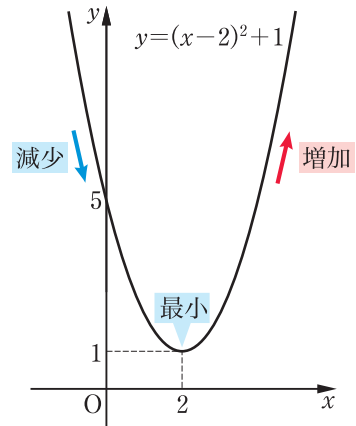
$x < 2$ の範囲で y の値は減少

$x > 2$ の範囲で y の値は増加

していることがわかる。

したがって、 $x = 2$ のとき y の値は最小となり、
最小値は 1 である。

また、 y の値はいくらでも大きくなるから、
最大値はない。



10

15

例 2 2 次関数 $y = -(x+2)^2 + 5$ のグラフは、
直線 $x = -2$ を軸とし、点 $(-2, 5)$ を頂点と
する上に凸の放物線である。

よって、右のグラフから

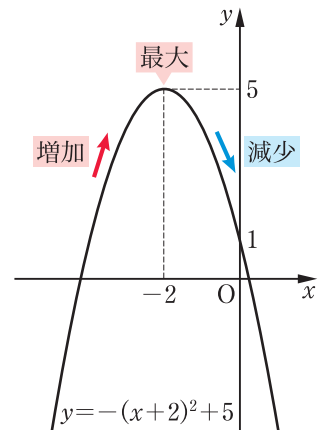
$x < -2$ の範囲で y の値は増加

$x > -2$ の範囲で y の値は減少

していることがわかる。

したがって、 $x = -2$ のとき y の値は最大となり、
最大値は 5 である。

また、 y の値はいくらでも小さくなるから、
最小値はない。



20

25

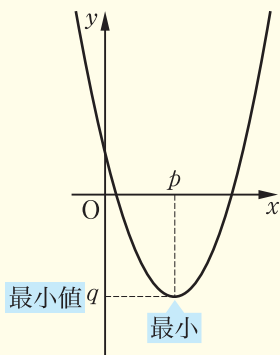
2次関数の最大値と最小値について、次のようにまとめられる。

2次関数の最大値・最小値

2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大値・最小値は、次のようになる。

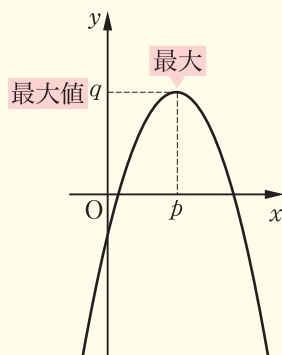
5

$a > 0$ のとき



$x = p$ のとき 最小値は q である。
最大値はない。

$a < 0$ のとき



$x = p$ のとき 最大値は q である。
最小値はない。

問1 次の2次関数の最大値または最小値を求めなさい。

- (1) $y = (x-1)^2 - 2$ (2) $y = -(x-2)^2 + 6$

例題

1

2次関数 $y = 2x^2 - 4x - 3$ の最大値または最小値を求めなさい。

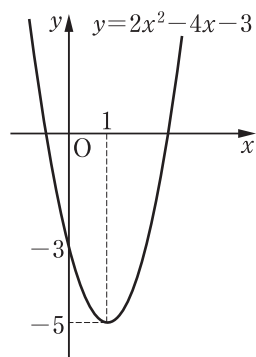
解 与えられた2次関数は

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x - 3 \\ &= 2(x-1)^2 - 5 \end{aligned}$$

と変形できる。

したがって、この関数は

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ のとき} & \text{ 最小値 } -5 \\ & \text{ 最大値はない。} \end{aligned}$$



問2 次の2次関数の最大値または最小値を求めなさい。

- (1) $y = 2x^2 - 8x + 13$ (2) $y = -3x^2 - 6x + 7$

→ p.82 復習問題□

かぎられた範囲での最大値・最小値

関数で、 x のとる値の範囲を、その関数の **定義域** という。

関数の定義域は、たとえば

$$y = (x-1)^2 - 3 \quad (-2 \leq x \leq 3)$$

のように、関数を表す式の後には () を用いて示すことがある。

5

例題

2

2次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ について、次の定義域における最大値と最小値を求めなさい。

- (1) $-2 \leq x \leq 3$ (2) $2 \leq x \leq 4$

解

(1) $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$

と変形できる。

$x = -2$ のとき $y = 6$

$x = 3$ のとき $y = 1$

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x = -2$ のとき **最大値 6**

$x = 1$ のとき **最小値 -3**

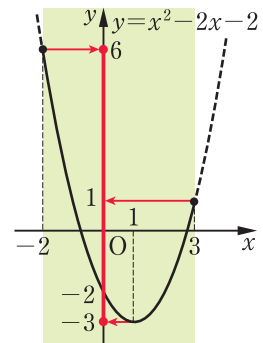
(2) $x = 2$ のとき $y = -2$

$x = 4$ のとき $y = 6$

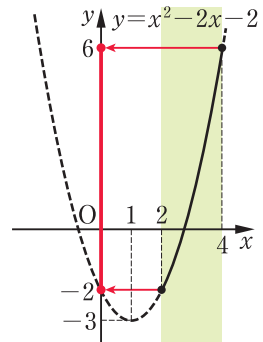
この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x = 4$ のとき **最大値 6**

$x = 2$ のとき **最小値 -2**



10



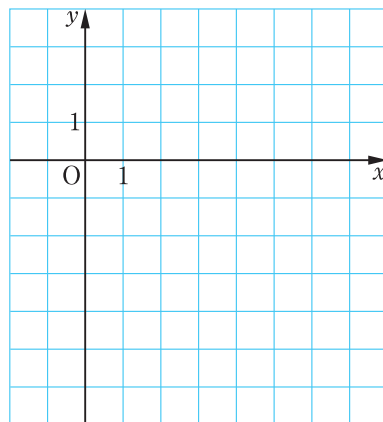
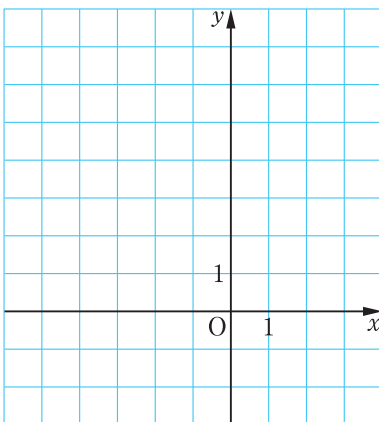
15

20

問3 次の2次関数の最大値と最小値を求めなさい。

→p.82 復習問題②

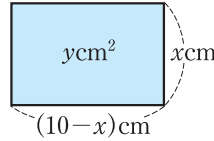
- (1) $y = (x+1)^2 - 2 \quad (-3 \leq x \leq 2)$ (2) $y = x^2 - 6x + 3 \quad (0 \leq x \leq 2)$



例題
3

長さ 20 cm の針金を折り曲げて長方形をつくる。
長方形の縦を x cm として、面積 y cm² の最大値を
求めなさい。

解 長方形の横は
 $(10-x)$ cm
と表される。



◀ 長方形の 4 辺の長さの和
が 20 cm であるから、縦
と横の和は
 $20 \div 2 = 10$ (cm)

ただし、辺の長さは正であるから

$$0 < x < 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

長方形の面積 y cm² は

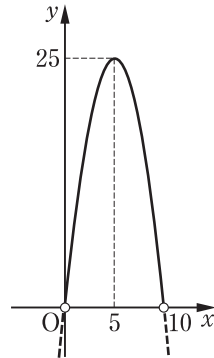
$$\begin{aligned} y &= x(10-x) \\ &= -x^2 + 10x \\ &= -(x^2 - 10x) \\ &= -(x-5)^2 + 25 \end{aligned}$$

となる。

よって、 $\textcircled{1}$ のとき、この関数の
グラフは右の図の実線部分である。
したがって

$$x = 5 \text{ のとき 最大値 } 25$$

である。



◀ 縦は $x > 0$
横は $10-x > 0$
これらを同時に成り立た
せる x の値の範囲は
 $0 < x < 10$

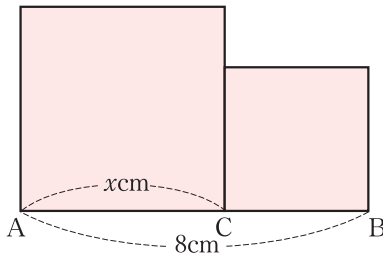
◀ グラフ上の \circ は、その点
を含まないことを示して
いる。

答 最大値 25 cm²

問 4

長さ 8 cm の線分 AB 上に点 C をとり、AC、CB を 1 辺と
する 2 つの正方形をつくる。AC の長さを x cm として、
この 2 つの正方形の面積の和 y cm² の最小値を
求めなさい。

→ p.82 復習問題③



2 二次関数のグラフと 2 次方程式



2次関数のグラフと2次方程式の間には密接な関係があります。この関係について学びます。

● 2次関数のグラフと x 軸が共有する点の x 座標について調べてみよう。

例3 2次関数

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

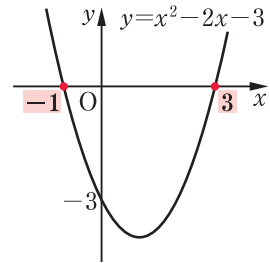
①のグラフと x 軸の共有点では、 y 座標は0となる。

よって、共有点の x 座標は、①で $y = 0$ とした

2次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の解として求められる。

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{より} \quad (x+1)(x-3) = 0$$

したがって、共有点の x 座標は $x = -1, 3$



5

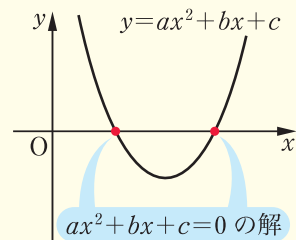
10

一般に、2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつときには、次のことが成り立つ。

2次関数のグラフと x 軸の共有点

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。



15

● いろいろな2次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

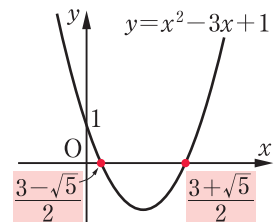
例4 2次関数 $y = x^2 - 3x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の

x 座標は、2次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解である。

これを解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって、共有点の x 座標は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$



▶ 根号の中が正のとき、解は2つあり、グラフは x 軸と2点で交わる。

20

25

問5 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

- (1) $y = x^2 - x - 6$ (2) $y = 2x^2 - 9x - 5$
 (3) $y = x^2 - 5x + 5$ (4) $y = 3x^2 + 3x - 2$

→p.82 復習問題④(1), (2), (3)

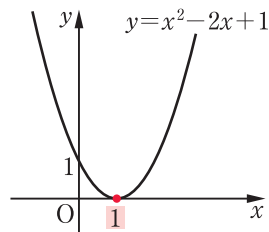
5 **例5** 2次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、2次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。これを因数分解を利用して解くと

$$(x-1)^2 = 0$$

より $x = 1$

10 したがって、共有点の x 座標は $x = 1$

例5のように、2次関数のグラフと x 軸がただ1点を共有するとき、2次関数のグラフは x 軸に**接する**という。また、その共有点を**接点**という。



解の公式を用いて求めることもできる。根号の中が0のとき、解は1つとなり、グラフは x 軸に接する。

共有点とは、交点や接点のことをいう。

15 **例6** 2次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解である。これを解の公式を用いて解くと

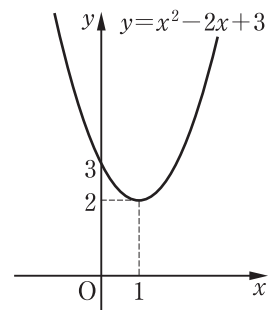
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから、解はない。

この場合、 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは

20 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

より、右の図のようになり、グラフと x 軸の共有点はない。



根号の中が負のとき、解はなく、グラフと x 軸の共有点はない。

例6のように、根号の中が負となり解がない場合は、グラフと x 軸の共有点はない。

25 **問6** 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

- (1) $y = x^2 + 6x + 9$ (2) $y = 4x^2 + 4x + 1$
 (3) $y = x^2 - 2x + 5$ (4) $y = 3x^2 + 2x + 4$

→p.82 復習問題④(4), (5)

3 2次関数のグラフと2次不等式



1章では1次不等式について学びました。ここでは、2次関数のグラフと関連させて、左辺が2次式となる不等式について学びます。

不等式

$$x^2 - 4x + 3 > 0, \quad x^2 - 4x + 3 < 0$$

5

のように、移項して右辺が0になるように整理したとき、左辺が2次式となる不等式を2次不等式じふとうしきという。

グラフがx軸と2点を共有するとき

● 2次不等式を成り立たせるxの値の範囲を調べてみよう。

例7 2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフとx軸の共有点のx座標は

10

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

より $x = 1, 3$

よって、右の図より、xの値が $1 < x < 3$ の範囲にあると、グラフはx軸の下側にある。このとき $y < 0$ であるから、2次不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ を成り立たせるxの値の範囲は

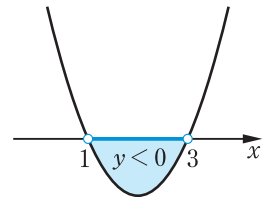
$$1 < x < 3$$

であることがわかる。

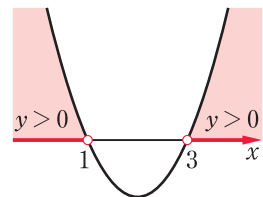
同様に右の図から、2次不等式 $x^2 - 4x + 3 > 0$ を成り立たせるxの値の範囲は

$$x < 1, 3 < x$$

であることがわかる。



15

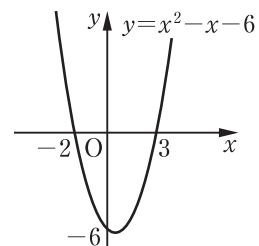


20

問7 右の $y = x^2 - x - 6$ のグラフを利用して、次の不等式を成り立たせるxの値の範囲を求めなさい。

(1) $x^2 - x - 6 < 0$

(2) $x^2 - x - 6 > 0$



25

2次不等式を成り立たせる x の値の範囲を、その
 2次不等式の^{かい}解といい、解を求めることを不等式を^と解くとい
 う。

2次不等式の解は、次のようにまとめられる。

2次不等式の解

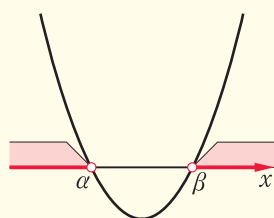
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の2つの解を

α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$ax^2 + bx + c > 0$$

の解は

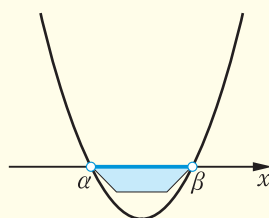
$$x < \alpha, \quad \beta < x$$



$$ax^2 + bx + c < 0$$

の解は

$$\alpha < x < \beta$$



◀ α, β はギリシャ文字の
 小文字で、 α はアルファ、
 β はベータと読む。

例題

4 次の2次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ (2) $x^2 + x - 6 < 0$

解 (1) 2次方程式 $x^2 - 6x + 5 = 0$ を解くと

$$(x-1)(x-5) = 0$$

より $x = 1, 5$

したがって、2次不等式 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ の解は

$$x \leq 1, 5 \leq x$$

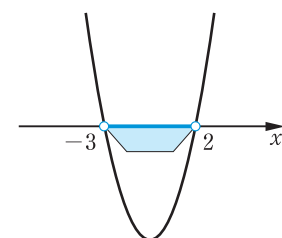
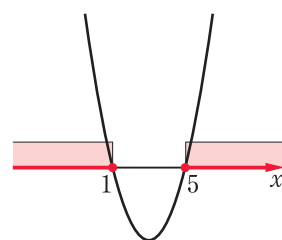
(2) 2次方程式 $x^2 + x - 6 = 0$ を解くと

$$(x+3)(x-2) = 0$$

より $x = -3, 2$

したがって、2次不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ の解は

$$-3 < x < 2$$



問8 次の2次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 7x + 10 > 0$ (2) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

(3) $x^2 + 9x + 8 \geq 0$ (4) $x^2 - 9x + 18 < 0$

→ p.82 復習問題⑤(1), (2)

いろいろな2次不等式

例題
5

2次不等式 $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ を解きなさい。

解

2次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

したがって、2次不等式 $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ の解は

$$x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leq x$$

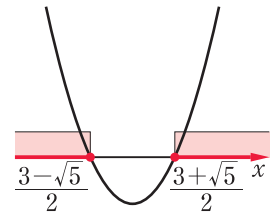
◀ 2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5



→ p.82 復習問題⑤(3)

10

問9 次の2次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 5x + 3 < 0$ (2) $2x^2 - x - 6 \geq 0$

x^2 の係数が負の2次不等式は、両辺に -1 をかけて x^2 の係数を正にしてから解くとよい。

例題
6

2次不等式 $-x^2 + x + 2 > 0$ を解きなさい。

解

$-x^2 + x + 2 > 0$ の両辺に -1 をかけると

$$x^2 - x - 2 < 0$$

2次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ を解くと

$$(x+1)(x-2) = 0$$

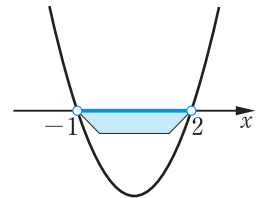
より $x = -1, 2$

したがって、2次不等式 $-x^2 + x + 2 > 0$ の解は

$$-1 < x < 2$$

◀ 不等号の向きが変わる。

15



20

問10 次の2次不等式を解きなさい。

(1) $-x^2 - x + 20 \geq 0$ (2) $-x^2 - 6x + 27 < 0$

→ p.82 復習問題⑤(4), ⑥

グラフが x 軸と 1 点を共有するとき

● 次の 2 次不等式を解いてみよう。

例 8 (1) $x^2 - 2x + 1 > 0$ (2) $x^2 - 2x + 1 < 0$

2 次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ を解くと

$$(x-1)^2 = 0$$

より $x = 1$

よって、 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフは右の図のように x 軸に接している。

(1) グラフから、 $x < 1, 1 < x$ の範囲で $y > 0$ である。

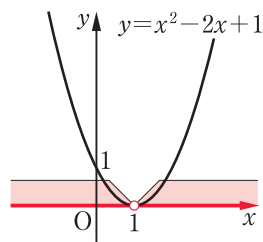
よって、 $x^2 - 2x + 1 > 0$ の解は、

1 以外のすべての実数

(2) グラフから、 $x^2 - 2x + 1 < 0$ の解はない。

問 11 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 + 6x + 9 > 0$ (2) $x^2 + 8x + 16 < 0$



◀ 解の公式を用いて解くこともできる。

◀ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ の解はすべての実数

◀ $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ の解は $x = 1$

→ p.82 復習問題⑤(5)

グラフが x 軸と共有点をもたないとき

● 次の 2 次不等式を解いてみよう。

例 9 (1) $x^2 - 2x + 3 > 0$ (2) $x^2 - 2x + 3 < 0$

2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから、解はない。

このとき、 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフはつねに x 軸の上側にあり、 x のどんな値に対しても $y > 0$ である。

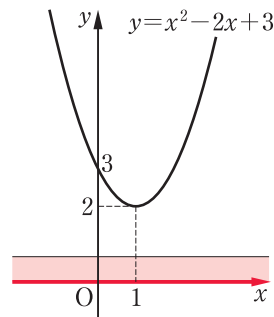
(1) グラフから、 $x^2 - 2x + 3 > 0$ の解は、

すべての実数

(2) グラフから、 $x^2 - 2x + 3 < 0$ の解はない。

問 12 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 4x + 5 > 0$ (2) $x^2 - 6x + 10 < 0$



◀ $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

→ p.82 復習問題⑤(6)

復習問題

□1 次の2次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1) $y = 2x^2 + 8x + 7$

(2) $y = -x^2 - 2x + 4$

□2 次の2次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = (x - 3)^2 + 5 \quad (2 \leq x \leq 5)$

(2) $y = -2(x - 1)^2 + 3 \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(3) $y = x^2 + 6x + 8 \quad (-2 \leq x \leq 0)$

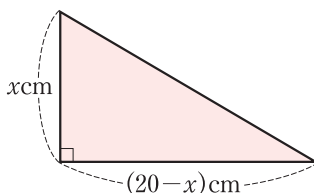
□3 直角をはさむ2辺の長さの

和が20 cmであるような

直角三角形がある。

この直角三角形の面積

$y \text{ cm}^2$ の最大値を求めなさい。



□4 次の2次関数のグラフとx軸の共有点のx座標を求めなさい。

(1) $y = (x + 2)(x - 5)$

(2) $y = x^2 + x - 12$

(3) $y = 3x^2 + 5x + 1$

(4) $y = 9x^2 - 6x + 1$

(5) $y = 2x^2 - 6x + 5$

□5 次の2次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 + 5x - 24 > 0$

(2) $x^2 + 7x + 10 \leq 0$

(3) $x^2 - 4x + 1 \leq 0$

(4) $-x^2 + x + 6 > 0$

(5) $16x^2 + 8x + 1 > 0$

(6) $x^2 + 4x + 8 < 0$

□6 地上から真上に毎秒30 mの速さでボールを投げ上げる
とき、投げ上げてからx秒後のボールの高さy mは

$$y = -5x^2 + 30x$$

で表される。ボールの高さが25 m以上にあるのは、

何秒後から何秒後までかを求めなさい。

2次関数の
最大値・最小値

← p.73 例題1

かぎられた範囲での
最大値・最小値

← p.74 例題2

かぎられた範囲での
最大値・最小値

← p.75 例題3

2次関数のグラフと
2次方程式

← p.76 例3

p.76 例4

p.77 例5

p.77 例6

2次関数のグラフと
2次不等式

← p.79 例題4

p.80 例題5

p.80 例題6

p.81 例8

p.81 例9

2次関数のグラフと
2次不等式

← p.80 例題6