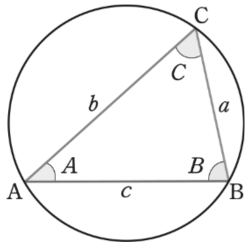
3節 三角形への応用

❶ 正弦定理

（教科書 p.144）

この節では，△ABC の 3 つの角の大きさを A，B，C で表し，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。



三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つ存在する。これを，その三角形の（[1]　　　　　　）という。

△ABC の外接円の半径を R とすると，次の（[2]　　　　　　　　）が成り立つ。

正弦定理
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ R は △ABC の外接円の半径

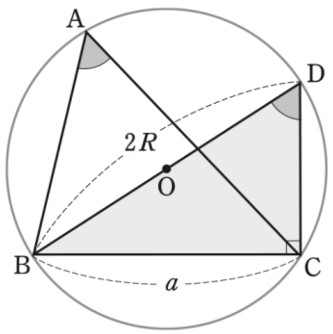
△ABC の 3 つの角がすべて鋭角である場合について，正弦定理を証明してみよう。

点 B を通る直径 BD を引くと，

∠BCD = 90° となり，

△BCD は直角三角形であるから

$$\sin D=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}=\frac{a}{2R}$$



円周角の定理により

$$A=D$$

よって　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

すなわち　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$　……①

同様にして　$\dfrac{b}{\sin B}=2R$　……②

$\dfrac{c}{\sin C}=2R$　……③

も成り立つ。

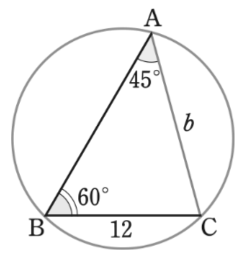
①，②，③より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つ。

A，B，C のいずれかが直角または鈍角であるときも，正弦定理は成り立つ。

三角形の 1 辺の長さと 2 つの角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 1 △ABC において，$a=12$，$A=45°$，$B=60°$ のとき，b を求めよ。また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

解 $a=12$，$A=45°$，$B=60°$ であるから，正弦定理より



$$\frac{12}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 60°}$$

よって　$b=$

また，$\dfrac{12}{\sin 45°}=2R$ より

$R=$

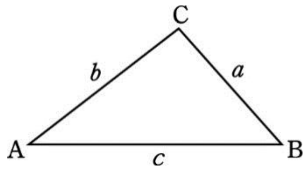
問1 △ABC において，$a=10$，$A=120°$，$C=45°$ のとき，c を求めよ。また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

❷ 余弦定理

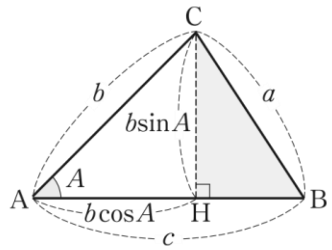
（教科書 p.146）

三角形の 1 つの角と 3 辺の長さとの間に，次の（[1]　　　　　）が成り立つ。

余弦定理
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$ $\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$ $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$



証明 △ ABC の A，B がともに鋭角であるとする。
右の図のように頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろすと，直角三角形 ACH において



$\mathrm{CH} = b\sin A$，$\mathrm{AH} = b\cos A$

である。
よって

$\mathrm{HB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$

ここで，直角三角形 BCH において，三平方の定理により

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{CH}^2$

であるから

$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2\ (\cos^2 A + \sin^2 A)$$

よって

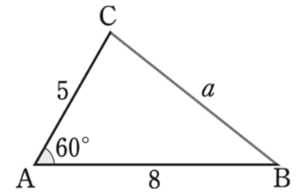
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　　……①

①は，A，B のどちらかが直角または鈍角のときも成り立つ。
同様にして，他の 2 つの式も成り立つ。

三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっているとき，余弦定理を用いて残りの辺の長さを求めることができる。

例題 2 △ ABC において，$b = 5$，$c = 8$，$A = 60°$ のとき，a を求めよ。

解 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ に，$b = 5$，$c = 8$，$A = 60°$ を代入して



$a^2 =$

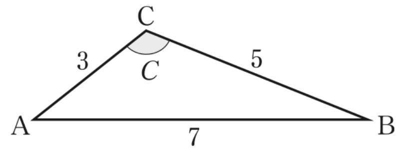
問2 △ ABC において，$a = 1$，$b = \sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c を求めよ。

余弦定理は，次のように変形して用いられることもある。

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

例題 3 △ ABC において，$a = 5$，$b = 3$，$c = 7$ のとき，C を求めよ。

解 余弦定理により



$\cos C =$

問3 △ ABC において，$a = 8$，$b = 7$，$c = 3$ のとき，B を求めよ。

三角形の辺と角

（教科書 p.148）

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさが与えられているとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めてみよう。

例題 4 $\triangle$ ABC において, $b=2$, $c=1+\sqrt{3}$, $A=60^\circ$ のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解 余弦定理により

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

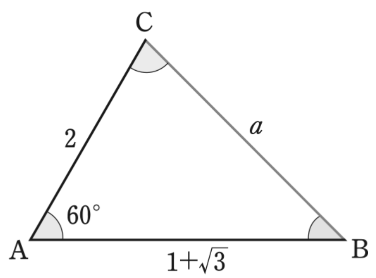
$a>0$ より　$a=$

また，正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

であるから

$$\sin B=$$



$A=60^\circ$ より $B<120^\circ$ であるから　$A+B+C=180^\circ$

$B=$

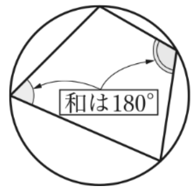
よって　$C=$

問4 $\triangle$ ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

Challenge 例題 円に内接する四角形

（教科書 p.149）

円に内接する四角形の対角の和は $180°$ であることが知られている。このことを利用して，円に内接する四角形について考えてみよう。



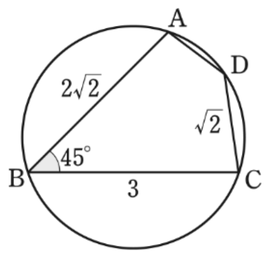
例題 円に内接する四角形 ABCD において

$AB = 2\sqrt{2}$，$BC = 3$，$CD = \sqrt{2}$

$\angle ABC = 45°$

とするとき，次の長さを求めよ。

(1)　対角線 AC　　(2)　辺 AD



解 (1)　△ABC において，余弦定理により

$AC^2 =$

$AC > 0$ より　$AC =$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから

$D = 180° - 45° = 135°$ ←― $B + D = 180°$

$AD = x$ とする。△ACD において，余弦定理により

問1 円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 5$，$BC = 4$，$CD = 4$，$\angle ABC = 60°$ とするとき，辺AD の長さを求めよ。

❸ 三角形の面積

（教科書 p.150）

三角形の面積 S を，2 辺とその間の角によって表してみよう。

$\triangle$ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすれば，

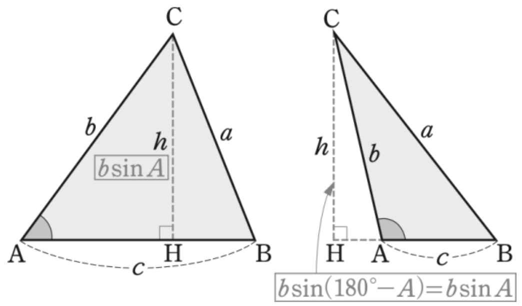
右の図において

$h = b\sin A$

したがって

$S = \frac{1}{2}ch$

$= \frac{1}{2}bc\sin A$



他の 2 辺とその間の角からも，同様の公式が得られる。

三角形の面積
$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$

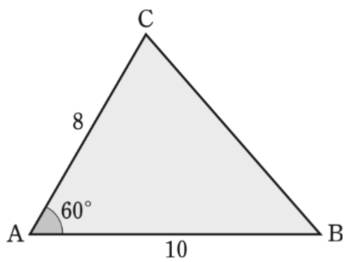
三角形の面積 $= \frac{1}{2} \times$ (2 辺の積) $\times$ (2 辺の間の角のサイン)

例1 右の図の $\triangle$ABC の面積を求めてみよう。

$b = 8$，$c = 10$，$A = 60°$

であるから，この三角形の面積 S は

$S =$



問5 次の $\triangle$ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b = 2$，$c = 5$，$A = 30°$

(2)　$a = 7$，$b = 4$，$C = 135°$

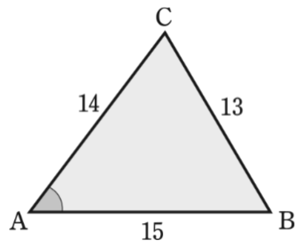
例題 5 △ABCにおいて，$a=13$，$b=14$，$c=15$であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos A$

(2) $\sin A$

(3) △ABCの面積S

解 (1) 余弦定理により



$\cos A=$

(2) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$より

$\sin^2 A=$

$\sin A>0$であるから

$\sin A=$

(3) 三角形の面積の公式より

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=$

問6 △ABCにおいて，$a=11$，$b=7$，$c=6$であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos A$

(2) $\sin A$

(3) △ABCの面積S

参考 内接円の半径と三角形の面積

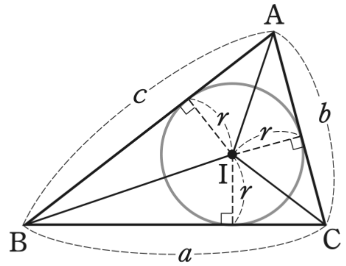
（教科書 p.152）

△ABC の 3 辺 AB，BC，CA のすべてに接する円はただ 1 つ存在する。
これを △ABC の（[1]　　　　　　　　）という。

△ABC の内接円の半径を r，中心を I とすると，△ABC の面積 S は

$$S = \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} + \triangle\mathrm{IAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

すなわち　$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}r(a + b + c)}$



例1 △ABC において，$b = 8$，$c = 3$，$A = 60°$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めてみよう。

余弦定理により

$a^2 =$

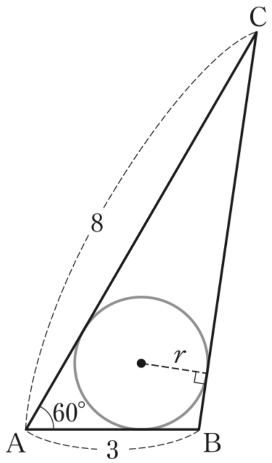
$a > 0$ より　$a =$

また，△ABC の面積を S とすると

S =

$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ であるから

よって　$r =$



問1 △ABC において，$b = 7$，$c = 8$，$A = 120°$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

④ 空間図形の計量

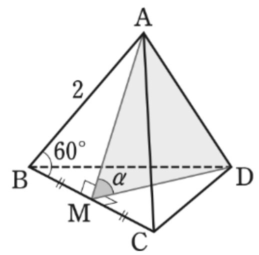
（教科書 p.153）

空間図形を扱うとき，その図形に含まれる三角形に着目すると，これまで三角形について学んだことが役立つことがある。

例題 6 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とする。

$\angle AMD = \alpha$

とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

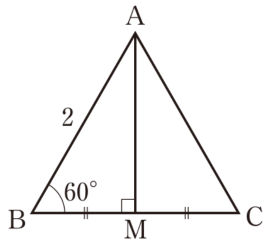


解 M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$\angle ABM = 60°$，$\angle AMB = 90°$

である。

よって　AM =

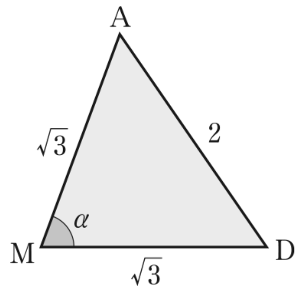


同様にして　$DM = \sqrt{3}$　　← DM = BD sin 60°

また　　$AD = 2$

したがって，△ADM において，余弦定理により

$\cos\alpha =$



問7 上の例題６において，$\angle ADM = \beta$ とするとき，$\cos\beta$ の値を求めよ。

例題 7 右の図で

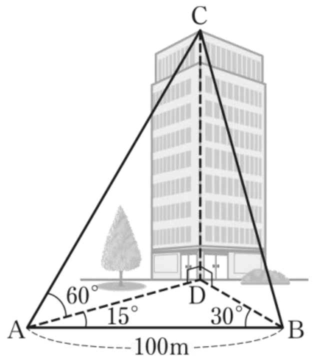
$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 15°$，

$\angle DBA = 30°$，$AB = 100m$

であるとき，ビルの高さ CD は何 m か。

小数第 1 位を四捨五入して答えよ。

ただし，$\sqrt{6} = 2.45$ とする。

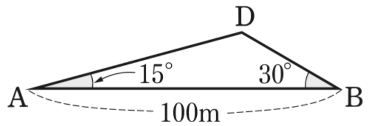


解 △ ABD において

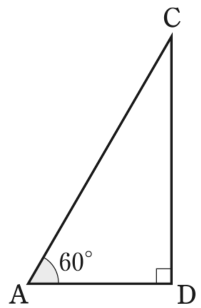
$\angle ADB = 180° - (15° + 30°) = 135°$

であるから，正弦定理により

$\frac{AD}{\sin 30°} =$



よって　AD =



また，△ CAD において

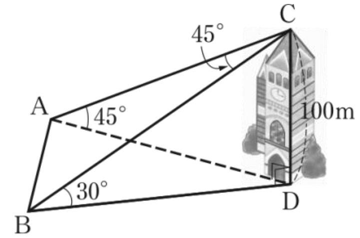
$\angle CAD = 60°$，$\angle CDA = 90°$

であるから

CD =

問8 右の図で，塔の高さ CD は 100m である。$\angle CAD = 45°$, $\angle CBD = 30°$,
$\angle ACB = 45°$ であるとき，A，B 間の距離 AB は何 m か。

ただし，$\sqrt{2} = 1.41$ とする。



Challenge 例題 立方体の断面の面積

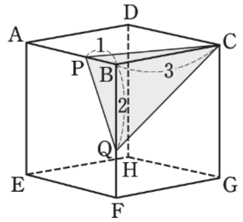
（教科書 p.155）

立方体の一部を切りとったときにできる三角形の面積を求めてみよう。

例題 1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − EFGH の辺 AB 上に点 P，辺 BF 上に点 Q を

$\mathrm{BP}=1,\ \mathrm{BQ}=2$

となるようにとる。このとき，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積 S を求めよ。

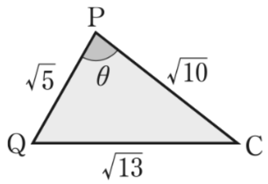


解 $\triangle\mathrm{CPQ}$ の 3 辺の長さは

$\mathrm{PQ}=$

$\mathrm{CP}=$

$\mathrm{CQ}=$



である。$\angle\mathrm{CPQ}=\theta$ とおくと，余弦定理により

$\cos\theta=$

よって，$\sin\theta>0$ より

$\sin\theta=$

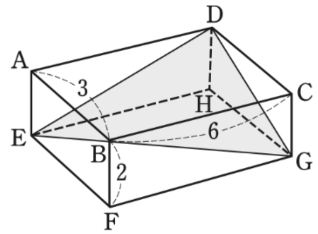
したがって，求める面積 S は

$S=$

問1 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=6,\ \mathrm{BF}=2$

である。このとき，$\triangle\mathrm{DEG}$ の面積 S を求めよ。



発展 ヘロンの公式

（教科書 p.156）

△ABC の面積 S について，次の**ヘロンの公式**が成り立つ。

ヘロンの公式
$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$　　ただし，$\boldsymbol{s=\frac{a+b+c}{2}}$

証明 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$4S^2=b^2c^2\sin^2 A=b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

$$=b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)\qquad \cdots\cdots ①$$

余弦定理により

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様にして　$1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

$a+b+c=2s$ とおくと，$-a+b+c=2(s-a)$，$a-b+c=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$ であるから

$$1+\cos A=\frac{2s(s-a)}{bc},\quad 1-\cos A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

これらを①に代入して　$4S^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

よって　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例1 3 辺の長さが 4，5，7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

$s=\frac{4+5+7}{2}=8$ であるから，ヘロンの公式により

$S=$

問1 3 辺の長さが 5，6，9 である三角形の面積 S を求めよ。

Training

（教科書 p.157）

11 $\triangle$ABC の外接円の半径を R とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $a = 5$，$A = 30°$，$B = 135°$ のとき，b と R を求めよ。

(2) $a = \sqrt{2}$，$R = 1$，$B = 60°$ のとき，b と A を求めよ。

12 $\triangle$ABC において，次の問に答えよ。

(1) $a = 4$，$c = \sqrt{3}$，$B = 30°$ のとき，b を求めよ。

(2) $b = 7$，$c = 8$，$A = 120°$ のとき，a を求めよ。

13 △ABCにおいて，次の問に答えよ。

(1) $a=3$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$ のとき，C を求めよ。

(2) $a=3\sqrt{2}$，$b=5$，$c=1$ のとき，B を求めよ。

14 △ABCにおいて，$a=2$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=120°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

15 次の△ABC の面積 S を求めよ。

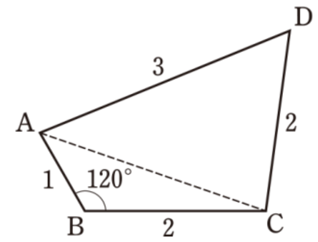
(1) $a=3$，$c=8$，$B=120°$

(2) $a=9$，$b=8$，$c=7$

16 右の図の四角形 ABCD において

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CD}=2$，$\mathrm{DA}=3$，$B=120°$

とするとき，次の値を求めよ。



(1) AC

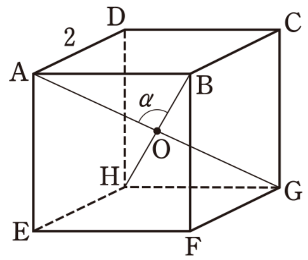
(2) 角 D

(3) 四角形 ABCD の面積

17 右の図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH において，対角線 AG，BH の交点を O とする。

$\angle \mathrm{AOB} = \alpha$

とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

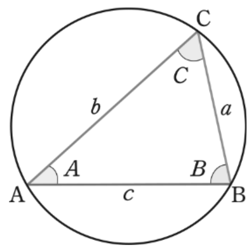


３節 三角形への応用

❶ 正弦定理

（教科書 p.144）

この節では，△ABC の 3 つの角の大きさを A，B，C で表し，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。



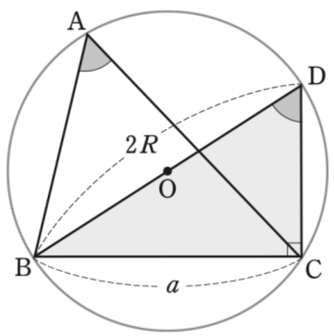
三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つ存在する。これを，その三角形の（[1] 外接円 ）という。

△ABC の外接円の半径を R とすると，次の（[2] 正弦定理 ）が成り立つ。

正弦定理
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ R は △ABC の外接円の半径

△ABC の 3 つの角がすべて鋭角である場合について，正弦定理を証明してみよう。

点 B を通る直径 BD を引くと，



$\angle BCD = 90°$ となり，

△BCD は直角三角形であるから

$$\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}$$

円周角の定理により

$$A=D$$

よって　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

すなわち　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$　……①

同様にして　$\dfrac{b}{\sin B}=2R$　……②

$\dfrac{c}{\sin C}=2R$　……③

も成り立つ。

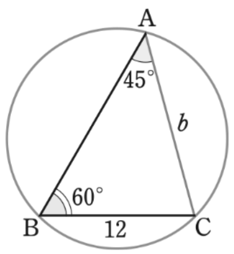
①，②，③より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つ。

A，B，C のいずれかが直角または鈍角であるときも，正弦定理は成り立つ。

三角形の 1 辺の長さと 2 つの角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 1　△ABC において，$a=12$，$A=45°$，$B=60°$ のとき，b を求めよ。また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

解　$a=12$，$A=45°$，$B=60°$ であるから，正弦定理より



$$\frac{12}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 60°}$$

よって　$b=\dfrac{12\sin 60°}{\sin 45°}$

$$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{6}$$

また，$\dfrac{12}{\sin 45°}=2R$ より

$$R=\frac{12}{2\sin 45°}=\frac{6}{\sin 45°}$$

$$=6\div\frac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$

問1　△ABC において，$a=10$，$A=120°$，$C=45°$ のとき，c を求めよ。また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

正弦定理により

$$\frac{10}{\sin 120°}=\frac{c}{\sin 45°}$$

よって

$$c=\frac{10\sin 45°}{\sin 120°}=10\times\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

また，$\dfrac{10}{\sin 120°}=2R$ より

$$R=\frac{10}{2\sin 120°}=\frac{5}{\sin 120°}=5\div\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

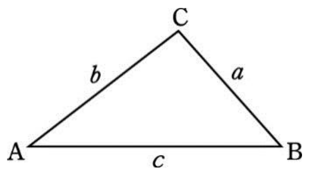
❷ 余弦定理

（教科書 p.146）

三角形の 1 つの角と 3 辺の長さとの間に，次の（1　余弦定理　）が成り立つ。

余弦定理

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



証明　△ABC の A，B がともに鋭角であるとする。
右の図のように頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろすと，直角三角形 ACH において

$\mathrm{CH} = b\sin A$，$\mathrm{AH} = b\cos A$

である。
よって

$\mathrm{HB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$

ここで，直角三角形 BCH において，三平方の定理により

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{CH}^2$

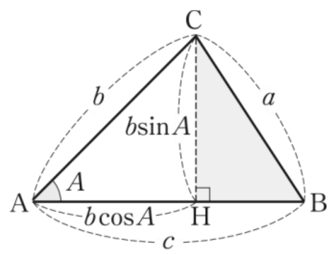
であるから

$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2\,(\cos^2 A + \sin^2 A)$$

よって

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　　……①

①は，A，B のどちらかが直角または鈍角のときも成り立つ。
同様にして，他の 2 つの式も成り立つ。



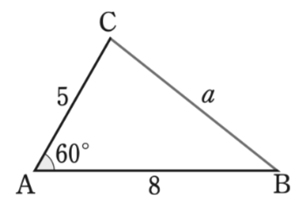
三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっているとき，余弦定理を用いて残りの辺の長さを求めることができる。

例題 2　△ABC において，$b = 5$，$c = 8$，$A = 60°$ のとき，a を求めよ。

解　余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ に，$b = 5$，$c = 8$，$A = 60°$ を代入して

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cos 60°$$
$$= 25 + 64 - 80\times\frac{1}{2} = 49$$

$a > 0$ より　$a = \sqrt{49} = 7$



問2　△ABC において，$a = 1$，$b = \sqrt{2}$，$C = 135°$ のとき，c を求めよ。

余弦定理により

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos 135°$$
$$= 1 + 2 - 2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5$$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{5}$

余弦定理は，次のように変形して用いられることもある。

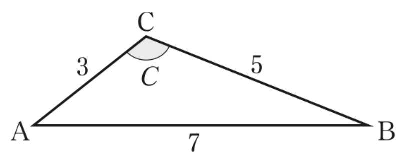
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

例題 3　△ABC において，$a = 5$，$b = 3$，$c = 7$ のとき，C を求めよ。

解　余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$= \frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

よって　$C = 120°$



問3　△ABC において，$a = 8$，$b = 7$，$c = 3$ のとき，B を求めよ。

余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8} = \frac{1}{2}$$

よって　$B = 60°$

三角形の辺と角

（教科書 p.148）

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさが与えられているとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めてみよう。

例題 4 $\triangle$ ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=60°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解 余弦定理により

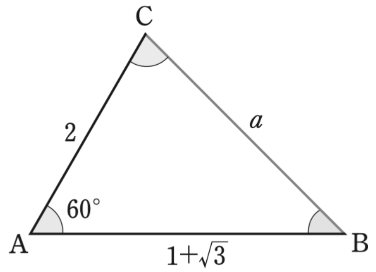
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=2^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cos 60°$$
$$=4+\left(4+2\sqrt{3}\right)-2\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$=6$$

$a>0$ より　$a=\sqrt{6}$

また，正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

であるから



$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$
$$=\frac{2\sin 60°}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A=60°$ より $B<120°$ であるから　$A+B+C=180°$

$B=45°$

よって　$C=180°-(60°+45°)=75°$

したがって　$a=\sqrt{6}$，$B=45°$，$C=75°$

問4 $\triangle$ ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$C=45°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理により

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$=2^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2-2\cdot2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cos 45°$$
$$=4+2+4\sqrt{3}+6-4-4\sqrt{3}=8$$

$c>0$ より　$c=2\sqrt{2}$

また，正弦定理により

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ であるから

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sin 45°}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$C=45°$ より $A<135°$ であるから

$A=30°$

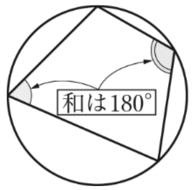
よって　$B=180°-(45°+30°)=105°$

したがって　$c=2\sqrt{2}$，$A=30°$，$B=105°$

Challenge 例題 円に内接する四角形

（教科書 p.149）

円に内接する四角形の対角の和は 180° であることが知られている。このことを利用して，円に内接する四角形について考えてみよう。



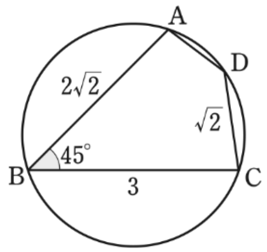
例題 円に内接する四角形 ABCD において

$AB = 2\sqrt{2}$，$BC = 3$，$CD = \sqrt{2}$

$\angle ABC = 45°$

とするとき，次の長さを求めよ。

(1) 対角線 AC　　(2) 辺 AD



解 (1) △ABC において，余弦定理により

$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45°$

$= 8 + 9 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5$

$AC > 0$ より　$AC = \sqrt{5}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接しているから

$D = 180° - 45° = 135°$　←　$B + D = 180°$

$AD = x$ とする。△ACD において，余弦定理により

$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cos 135°$

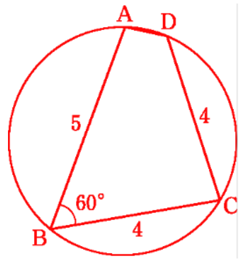
整理すると　$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x > 0$ より　$x = 1$

すなわち　$AD = 1$

問1 円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 5$，$BC = 4$，$CD = 4$，$\angle ABC = 60°$ とするとき，辺AD の長さを求めよ。



△ABC において，余弦定理により

$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60°$

$= 25 + 16 - 40 \times \frac{1}{2}$

$= 21$

$AC > 0$ より　$AC = \sqrt{21}$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$D = 180° - 60° = 120°$

$AD = x$ とする。

△ACD において，余弦定理により

$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cos 120°$

整理すると　$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

$x > 0$ より　$x = 1$

すなわち　$AD = 1$

③ 三角形の面積

（教科書 p.150）

三角形の面積 S を，2 辺とその間の角によって表してみよう。

△ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすれば，

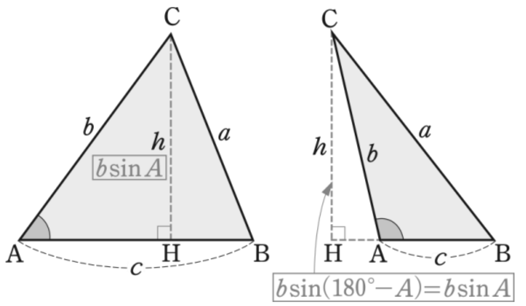
右の図において

$h = b\sin A$

したがって

$S = \frac{1}{2}ch$

$= \frac{1}{2}bc\sin A$



他の 2 辺とその間の角からも，同様の公式が得られる。

三角形の面積
$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

三角形の面積 $= \frac{1}{2} \times$ (2 辺の積) $\times$ (2 辺の間の角のサイン)

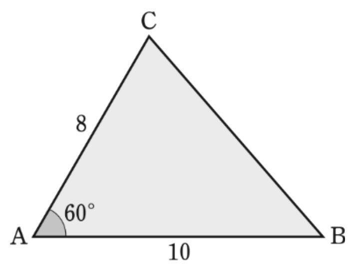
例1 右の図の △ABC の面積を求めてみよう。

$b = 8$，$c = 10$，$A = 60°$

であるから，この三角形の面積 S は

$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10\sin 60°$

$= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$



問5 次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b = 2$，$c = 5$，$A = 30°$

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5\sin 30°$

$= \frac{5}{2}$

(2) $a = 7$，$b = 4$，$C = 135°$

$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\sin 135°$

$= 7\sqrt{2}$

例題 5 △ABCにおいて，$a=13$，$b=14$，$c=15$であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos A$

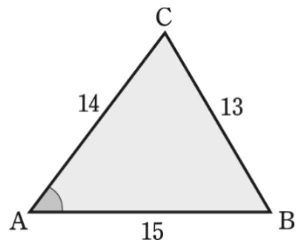
(2) $\sin A$

(3) △ABCの面積S

解 (1) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{14^2+15^2-13^2}{2\cdot14\cdot15}=\frac{3}{5}$$



(2) $\sin^2A+\cos^2A=1$より

$$\sin^2A=1-\cos^2A$$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$\sin A>0$であるから

$$\sin A=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

(3) 三角形の面積の公式より

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot14\cdot15\cdot\frac{4}{5}=84$$

問6 △ABCにおいて，$a=11$，$b=7$，$c=6$であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos A$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{7^2+6^2-11^2}{2\cdot7\cdot6}=-\frac{3}{7}$$

(2) $\sin A$

$\sin^2A+\cos^2A=1$より

$$\sin^2A=1-\cos^2A$$

$$=1-\left(-\frac{3}{7}\right)^2=\frac{40}{49}$$

$\sin A>0$であるから

$$\sin A=\sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

(3) △ABCの面積S

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$$

参考 内接円の半径と三角形の面積

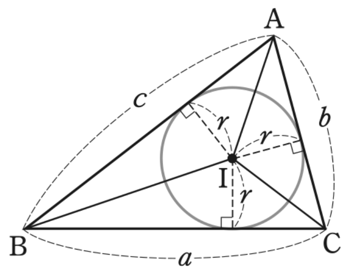
（教科書 p.152）

△ABC の 3 辺 AB，BC，CA のすべてに接する円はただ 1 つ存在する。
これを △ABC の（[1] 内接円 ）という。

△ABC の内接円の半径を r，中心を I とすると，△ABC の面積 S は

$S=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

すなわち　$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}r(a+b+c)}$



例1 △ABC において，$b=8$，$c=3$，$A=60°$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めてみよう。

余弦定理により

$a^2=8^2+3^2-2\cdot8\cdot3\cos60°$

$=64+9-48\times\frac{1}{2}=49$

$a>0$ より　$a=7$

また，△ABC の面積を S とすると

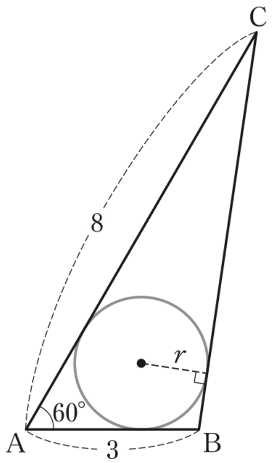
$S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot3\sin60°$

$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

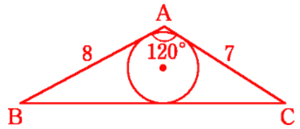
$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ であるから

$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+8+3)$

よって　$r=\frac{6\sqrt{3}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



問1 △ABC において，$b=7$，$c=8$，$A=120°$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。



余弦定理により

$a^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cos120°$

$=49+64-112\times\left(-\frac{1}{2}\right)=169$

$a>0$ より　$a=13$

また，△ABC の面積を S とすると

$S=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\sin120°=28\times\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ であるから

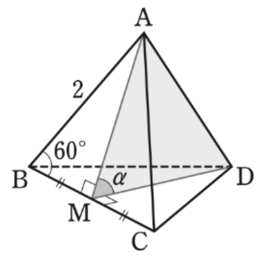
$14\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(13+7+8)$

よって　$r=\frac{14\sqrt{3}}{14}=\sqrt{3}$

④ 空間図形の計量

（教科書 p.153）

空間図形を扱うとき，その図形に含まれる三角形に着目すると，これまで三角形について学んだことが役立つことがある。



例題 6 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とする。

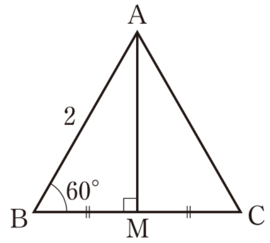
$\angle AMD = \alpha$

とするとき，$\cos \alpha$ の値を求めよ。

解 M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$\angle ABM = 60°$，$\angle AMB = 90°$

である。



よって　$AM = AB\sin 60°$

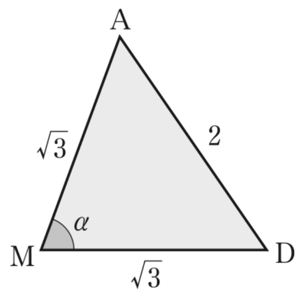
$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

同様にして　$DM = \sqrt{3}$　　―― $DM = BD\sin 60°$

また　　　　$AD = 2$

したがって，△ADM において，余弦定理により



$$\cos\alpha = \frac{AM^2+DM^2-AD^2}{2\cdot AM\cdot DM}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

問7 上の例題６において，$\angle ADM = \beta$ とするとき，$\cos\beta$ の値を求めよ。

余弦定理により

$$\cos\beta = \frac{AD^2+DM^2+AM^2}{2\cdot AD\cdot DM}$$

$$= \frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

例題 7 右の図で

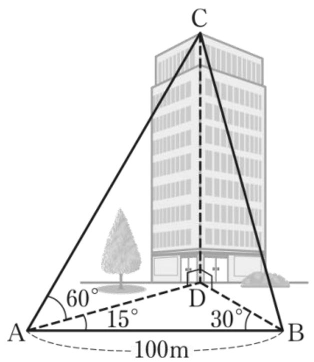
$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 15°$，

$\angle DBA = 30°$，$AB = 100m$

であるとき，ビルの高さ CD は何 m か。

小数第 1 位を四捨五入して答えよ。

ただし，$\sqrt{6} = 2.45$ とする。

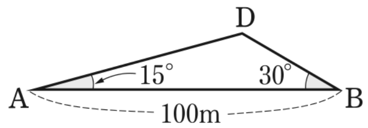


解 △ ABD において

$\angle ADB = 180° - (15° + 30°) = 135°$

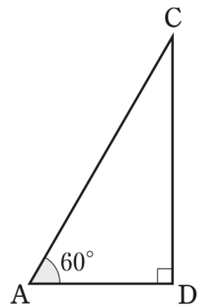
であるから，正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{100}{\sin 135°}$$



よって　$AD = \frac{100 \sin 30°}{\sin 135°}$

$$= 100 \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$$



また，△ CAD において

$\angle CAD = 60°$，$\angle CDA = 90°$

であるから

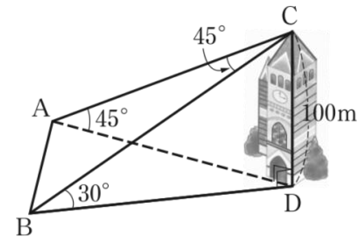
$CD = AD \tan 60° = 50\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= 50\sqrt{6} = 50 \times 2.45 = 122.5 \fallingdotseq 123(m)$

問8 右の図で，塔の高さ CD は 100m である。$\angle CAD = 45°$，$\angle CBD = 30°$，

$\angle ACB = 45°$ であるとき，A，B 間の距離 AB は何 m か。

ただし，$\sqrt{2} = 1.41$ とする。



△ ACD において

$AC \sin 45° = 100$ より

$$AC = \frac{100}{\sin 45°} = 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}$$

また，△ BCD において

$BC \sin 30° = 100$ より

$$BC = \frac{100}{\sin 30°} = 100 \div \frac{1}{2} = 200$$

ここで，△ ABC において，余弦定理により

$$AB^2 = \left(100\sqrt{2}\right)^2 + 200^2 - 2 \cdot 100\sqrt{2} \cdot 200 \cos 45°$$

$$= 100^2 \left(2 + 4 - 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 100^2 \times 2$$

$AB > 0$ より

$AB = 100\sqrt{2} = 100 \times 1.41 = 141(m)$

Challenge 例題 立方体の断面の面積

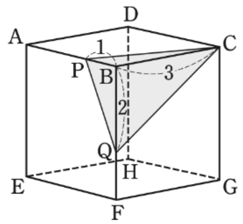
（教科書 p.155）

立方体の一部を切りとったときにできる三角形の面積を求めてみよう。

例題 1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − EFGH の辺 AB 上に点 P，辺 BF 上に点 Q を

$$\mathrm{BP}=1,\ \mathrm{BQ}=2$$

となるようにとる。このとき，△CPQ の面積 S を求めよ。

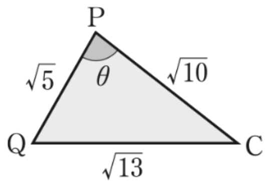


解 △CPQ の 3 辺の長さは

$\mathrm{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\mathrm{CP}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{CQ}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$



である。∠CPQ $=\theta$ とおくと，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{CP}^2+\mathrm{PQ}^2-\mathrm{CQ}^2}{2\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{PQ}}$$

$$=\frac{10+5-13}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

よって，$\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{98}{100}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

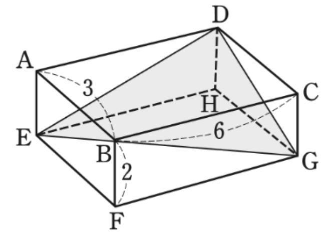
したがって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{PQ}\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{7}{2}$$

問1 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

$$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=6,\ \mathrm{BF}=2$$

である。このとき，△DEG の面積 S を求めよ。



△DEG の 3 辺の長さは

$\mathrm{DE}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

$\mathrm{EG}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

$\mathrm{GD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

である。∠DEG $=\theta$ とおくと，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{DE}^2+\mathrm{EG}^2-\mathrm{GD}^2}{2\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EG}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{10})^2+(3\sqrt{5})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot2\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

よって，$\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{7}{25}}=\frac{\sqrt{7}}{5}$$

したがって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EG}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}=3\sqrt{14}$$

発展 ヘロンの公式

（教科書 p.156）

△ABC の面積 S について，次の**ヘロンの公式**が成り立つ。

ヘロンの公式
$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$　　ただし，$\boldsymbol{s=\frac{a+b+c}{2}}$

証明 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$4S^2=b^2c^2\sin^2A=b^2c^2(1-\cos^2A)$

$\quad=b^2c^2\,(1+\cos A)(1-\cos A)$　　……①

余弦定理により

$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$\quad=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$

同様にして　$1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

$a+b+c=2s$ とおくと，$-a+b+c=2(s-a)$，$a-b+c=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$ であるから

$1+\cos A=\frac{2s(s-a)}{bc}$，$1-\cos A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを①に代入して　$4S^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

よって　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例1 3 辺の長さが 4，5，7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

$s=\frac{4+5+7}{2}=8$ であるから，ヘロンの公式により

$S=\sqrt{8\cdot(8-4)\cdot(8-5)\cdot(8-7)}=4\sqrt{6}$

問1 3 辺の長さが 5，6，9 である三角形の面積 S を求めよ。

$s=\frac{5+6+9}{2}=10$ であるから，ヘロンの公式により

$S=\sqrt{10\cdot(10-5)\cdot(10-6)\cdot(10-9)}$

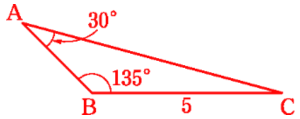
$\quad=10\sqrt{2}$

Training

（教科書 p.157）

11 $\triangle$ABC の外接円の半径を R とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$a=5$，$A=30°$，$B=135°$ のとき，b と R を求めよ。



正弦定理により

$$\frac{5}{\sin 30°}=\frac{b}{\sin 135°}$$

よって

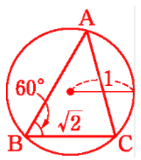
$$b=\frac{5\sin 135°}{\sin 30}=5\times\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}$$

$$=5\sqrt{2}$$

また，$\frac{5}{\sin 30°}=2R$ より

$$R=\frac{5}{2\sin 30°}=5\div\left(2\times\frac{1}{2}\right)=5$$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$R=1$，$B=60°$ のとき，b と A を求めよ。



正弦定理により

$$\frac{b}{\sin 60°}=2\times 1$$

よって　$b=2\sin 60°$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

また，$\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=2\times 1$ より

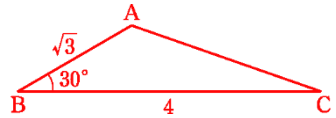
$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$B=60°$ より $A<120°$ であるから

$$A=45°$$

12 $\triangle$ABC において，次の問に答えよ。

(1)　$a=4$，$c=\sqrt{3}$，$B=30°$ のとき，b を求めよ。



余弦定理により

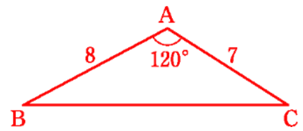
$$b^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+4^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cos 30°$$

$$=3+16-8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$

$b>0$ より

$$b=\sqrt{7}$$

(2)　$b=7$，$c=8$，$A=120°$ のとき，a を求めよ。



余弦定理により

$$a^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cos 120°$$

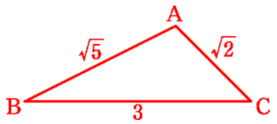
$$=49+64-112\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=169$$

$a>0$ より　$a=13$

13 △ABC において，次の問に答えよ。

(1)　$a=3$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$ のとき，C を求めよ。

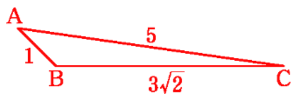


余弦定理により

$$\cos C=\frac{3^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{2\cdot 3\cdot \sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$C=45°$

(2)　$a=3\sqrt{2}$，$b=5$，$c=1$ のとき，B を求めよ。



余弦定理により

$$\cos B=\frac{1^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-5^2}{2\cdot 1\cdot 3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=135°$

14 △ABC において，$a=2$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=120°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理により

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=2^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cos 120°\\&=4+3-2\sqrt{3}+1-4\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=4+3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2\\&=6\end{aligned}$$

$c>0$ より　$c=\sqrt{6}$

また，正弦定理により

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin A&=\frac{a\sin C}{c}\\&=\frac{2\sin 120°}{\sqrt{6}}\\&=\frac{2}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$C=120°$ より $A<60°$ であるから

$A=45°$

よって　$B=180°-(45°+120°)=15°$

したがって　$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，$B=15°$

15 次の $\triangle$ ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=3$，$c=8$，$B=120°$

$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin 120°$

$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

(2)　$a=9$，$b=8$，$c=7$

余弦定理により

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{8^2+7^2-9^2}{2\cdot 8\cdot 7}=\frac{2}{7}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{45}{49}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{\frac{45}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

三角形の面積の公式により

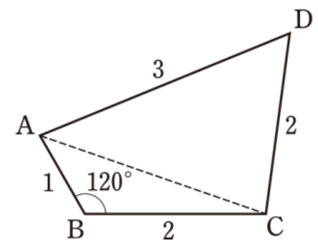
$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$=12\sqrt{5}$

16 右の図の四角形 ABCD において

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CD}=2$，$\mathrm{DA}=3$，$B=120°$

とするとき，次の値を求めよ。



(1)　AC

余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$=1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120°$

$=1+4-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{7}$

(2)　角 D

余弦定理により

$\cos D=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}}$

$=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2}$

よって　$D=60°$

(3)　四角形 ABCD の面積

求める面積を S とすると

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin D$

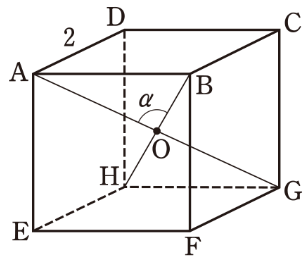
$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120°+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

17 右の図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD − EFGH において，対角線 AG，BH の交点を O とする。

$\angle AOB = \alpha$

とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。



$BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$

$OB = \frac{1}{2}BH = \sqrt{3}$

同様にして

$OA = \sqrt{3}$

したがって，△OAB に余弦定理を用いて

$$\cos\alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$