1節 2次関数とそのグラフ

❶ 関数

（教科書 p.72）

自転車に乗って，毎時 15km の速さで x 時間進む。そのとき，進む距離を $y$km とすると

（1 ）

と表される。ただし，（2 ）である。

このとき，$x = 1$ とすると

$x = 3$ とすると

となる。

2 つの変数 x, y があって，x の値を定めると，それに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき，y は x の（3 ）であるという。

問1 1 辺の長さが $x$cm の正方形の面積を $y\text{cm}^2$ とするとき, y は x の関数である。y を x の式で表せ。

y が x の関数であることを

$y = f(x)$

のような記号で表す。これを単に，関数 $f(x)$ ということもある。

また，関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ に対応する y の値を $x = a$ における（4 ）といい，（5 ）で表す。

例 1 関数 $f(x) = 12 - 4x$ について

$f(1) =$

$f(-2) =$

$f(a) =$

$\boxed{f(x) = 12-4x}$

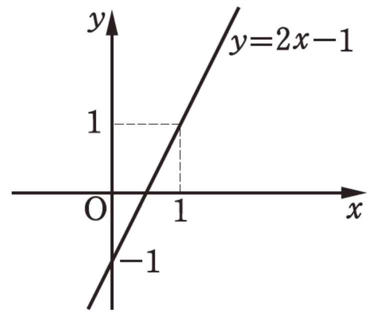
問2 次の関数 $f(x)$ について，$f(2)$，$f(-3)$，$f(a)$を求めよ。

(1) $f(x) = 2x - 3$

(2) $f(x) = x^2$

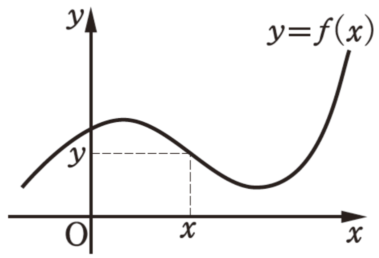
関数のグラフ

（教科書 p.73）



1 次関数 $y = 2x - 1$

のグラフは，y 軸上の点 $(0,\ -1)$ を通り，傾き 2 の直線である。このグラフは, $y = 2x - 1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなっている。



関数 $y = f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$を座標とする点全体からなる図形を，

（6 ）という。

関数の定義域・値域

（教科書 p.73）

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の（[7]　　　　　　　）という。とくに断らなければ，定義域は $f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

また，x が定義域のすべての値をとるとき，それに応じて変数 y がとる値の範囲を，この関数の（[8]　　　　　　）という。

例2 関数 $y=2x+1$ のグラフは点(　　　　　　　)を通り，傾き(　　　　　)の直線である。この関数の定義域をすべての実数としたとき，値域はすべての実数である。

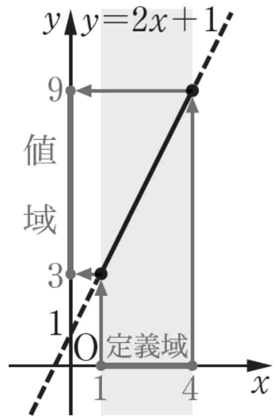
また，この関数の定義域を

$1 \leqq x \leqq 4$

としたとき，値域は

(　　　　　　　　)

である。



問3 次の定義域における関数 $y=-3x+2$ の値域を求めよ。

(1) すべての実数

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$

❷ 2次関数

（教科書 p.74）

関数　$y = 2x^2$

$y = 2x^2 - 16x + 33$

などのように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の（1　　　　　　　）であるという。

一般に，x の 2 次関数

$y = ax^2 + bx + c$

の形に表される。ただし，a，b，c は定数で，$a \neq 0$ である。

問4 周の長さが 12cm の長方形で，横の長さを $x$cm，面積を $y$cm² とするとき，y を x の式で表せ。ただし，$0 < x < 6$ とする。

$y = ax^2$ のグラフ

（教科書p.74）

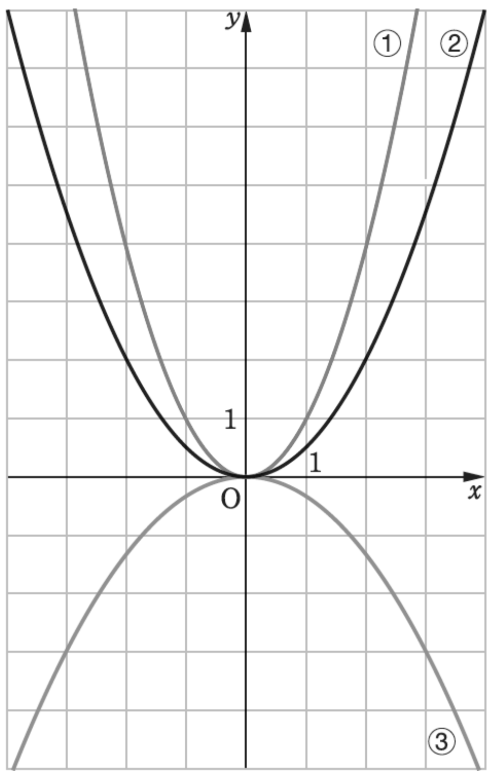
右の図は，2 次関数

$y = x^2$　　……①

$y = \frac{1}{2}x^2$　　……②

$y = -\frac{1}{3}x^2$　　……③

のグラフである。



2 次関数

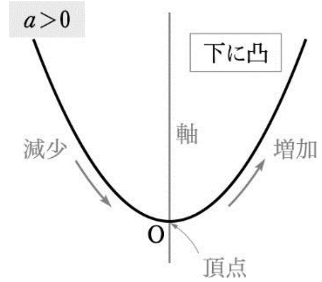
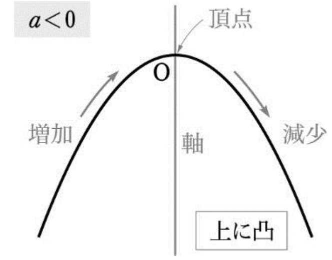
$y = ax^2$

のグラフの形の曲線を（2　　　　　　）という。一般に，放物線の対称軸を（3　　　　），軸と放物線の交点を（4　　　　　）という。

$y = ax^2$ のグラフは軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

また，この放物線は

$a > 0$ のときは（5　　　　　　），$a < 0$ のときは（6　　　　　　）であるという。

$a > 0$ のとき	$a < 0$ のとき
・値域は $y \geqq 0$ である。 ・y の値は $x = 0$ で減少から増加に変わる。 ・グラフは下に凸（とつ）の放物線 	・値域は $y \leqq 0$ である。 ・y の値は $x = 0$ で増加から減少に変わる。 ・グラフは上に凸の放物線 

問 5 次の 2 次関数のグラフをかけ。

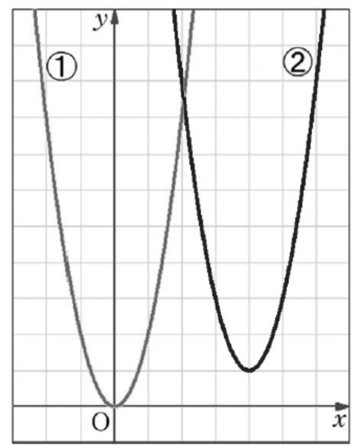
(1)　$y = 2x^2$　　　　(2)　$y = -\frac{1}{2}x^2$

右の図は，2 つの 2 次関数

$y = 2x^2$　　……①

$y = 2x^2 - 16x + 33$　　……②

のグラフをコンピュータでかいたものである。これらのグラフは形や大きさが同じで，位置がずれているだけである。



一般に，グラフなどの図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を（7　　　　　　）という。②のグラフは①のグラフを平行移動したものである。

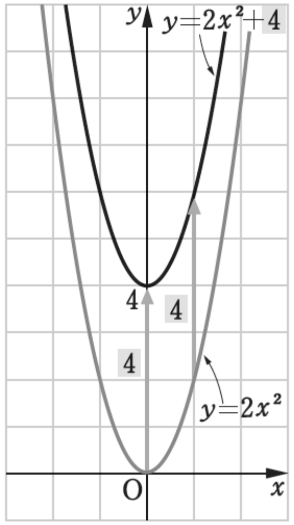
$y=ax^2+q$ のグラフ

（教科書 p.76）

例3 2 つの 2 次関数 $y=2x^2$ と $y=2x^2+4$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…								…
$2x^2+4$	…								…

$+4$



上の表から，$y=2x^2+4$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に（　　　　）だけ平行移動した放物線であることがわかる。

この放物線の

軸は

（　　　　　　），

頂点は

（　　　　　　　　）

である。

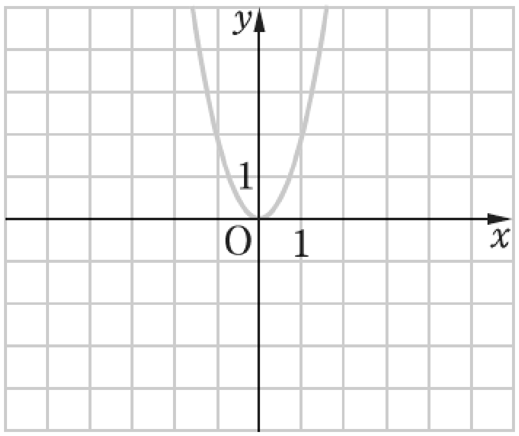
一般に，$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

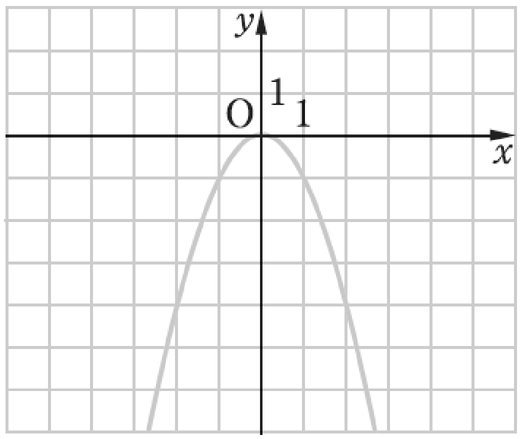
y 軸方向に q だけ平行移動

した放物線である。その軸は（[8]　　　　　　），頂点は（[9]　　　　　　　　），である。

問6 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-4$　　　　(2)　$y=-x^2+2$





$y=a(x-p)^2$ のグラフ

（教科書 p.77）

例4 2 つの 2 次関数 $y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$2x^2$	…			0						…
$2(x-3)^2$	…						0			…

上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に 3 だけずれていることがわかる。

したがって，$y=2(x-3)^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に（　　　　）

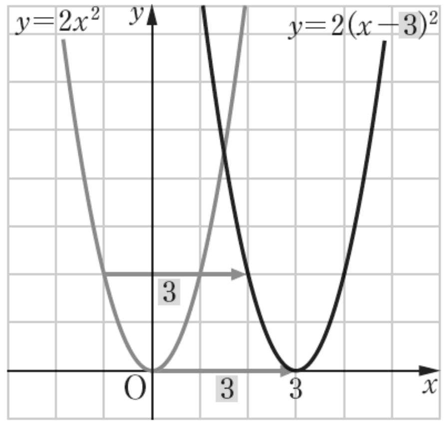
だけ平行移動した放物線である。

この放物線の

軸は（　　　　　　　　），

頂点は（　　　　　　　　）

である。



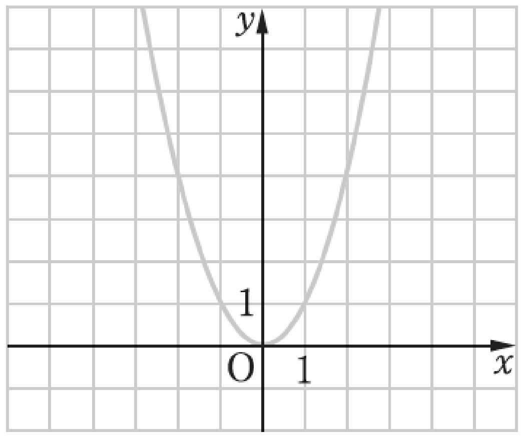
一般に，$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

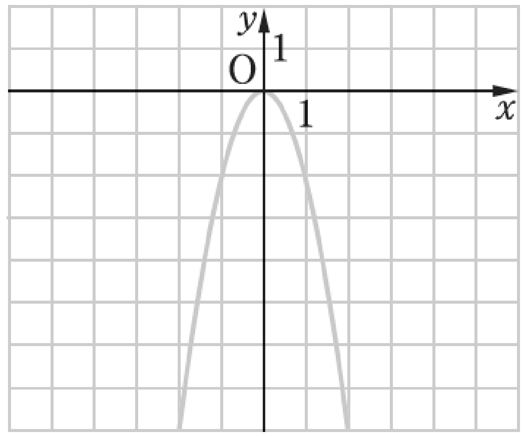
x 軸方向に p だけ平行移動

した放物線である。その軸は（[10]　　　　　　　　），頂点は（[11]　　　　　　　　），である。

問7 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-2)^2$　　　　(2)　$y=-2(x+3)^2$





$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

（教科書 p.78）

例5 2次関数

$y=2(x-3)^2+4$ ……①

のグラフは

$y=2(x-3)^2$

のグラフを

y 軸方向に（　　　）

だけ平行移動した放物線である。

よって，①のグラフは

$y=2x^2$

のグラフを

x 軸方向に（　　　）

y 軸方向に（　　　）

だけ平行移動した放物線で

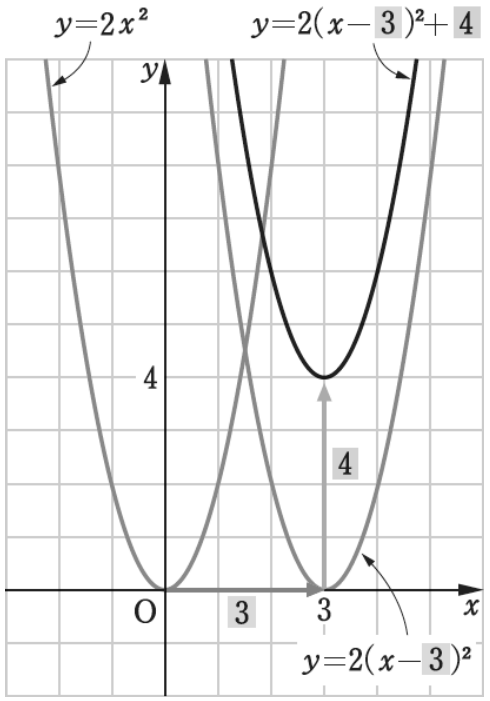
軸は

（　　　　　　）

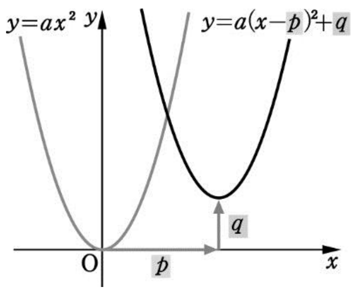
頂点は

（　　　　　　）

である。

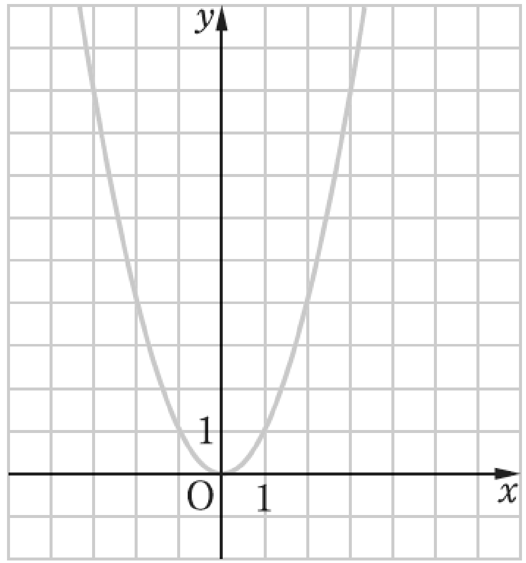


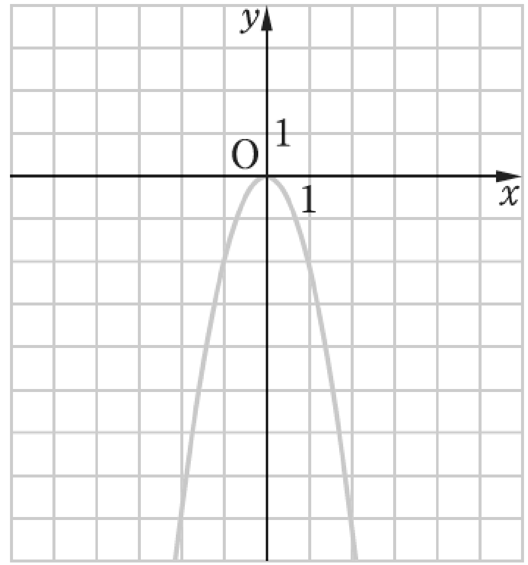
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは， $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。 その **軸は直線 $x=p$，　頂点は点 $(p,\ q)$** である。



問8 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=(x-4)^2+2$　　　(2) $y=-2(x+2)^2+3$





例6 2 次関数

$y=-2x^2$

のグラフを，頂点が点 (3, 2) になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

求める 2 次関数のグラフは

$y=-2x^2$

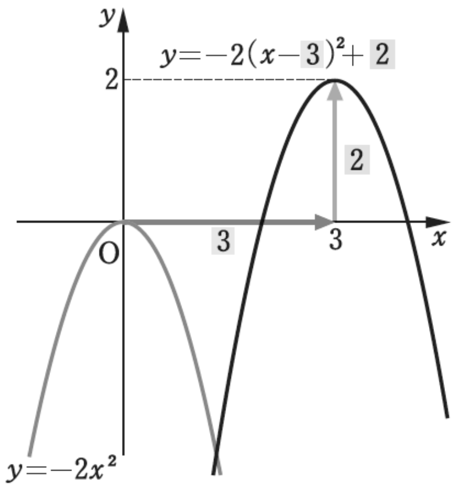
のグラフを

x 軸方向に（　　　　　）

y 軸方向に（　　　　　）

だけ平行移動した放物線である。

よって



問9 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを，頂点が次の点になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(1)　$(4,\ 2)$

(2)　$(7,\ -3)$

(3)　$(-3,\ 5)$

(4)　$(-2,\ -5)$

$ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ の変形

（教科書 p.80）

2 次関数

$y=2(x-3)^2+4$　……①

の右辺を展開して整理すると

$2(x-3)^2+4$

$=$

となる。

したがって，2 次関数

$y=2x^2-12x+22$　……②

のグラフは，①のグラフと同じものである。

②の形で表された 2 次関数は，①の形に変形すれば，軸や頂点がわかり，グラフをかくことができる。

例7 2 次関数 $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1)　$y=x^2-6x$

(6 の半分)

$\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2$

(2)　$y=x^2+8x+3$

(8 の半分)

$\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+3$

問 10 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1)　$y=x^2-2x$

(2)　$y=x^2+10x$

(3)　$y=x^2+6x-2$

(4)　$y=x^2-4x+7$

例8 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

$y=x^2-5x+7$

(5 の半分)

$=\left(x\quad\right)^2-\left(\quad\right)^2+7$　　$\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+7$

$=$

問 11 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2+3x+4$

(2) $y=x^2+x-1$

(3) $y=x^2-7x-5$

(4) $y=x^2-9x+21$

例9 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1) $y=2x^2-12x+19$

(2) $y=-3x^2-6x+10$

問 12 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=2x^2+4x+1$

(2) $y=3x^2-12x-2$

(3) $y=-x^2+10x+7$

(4) $y=-2x^2-6x-5$

このように，x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを（[12]　　　　　　　）という。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

（教科書 p.82）

例 10 2 次関数　$y=2x^2-8x+5$　……①

のグラフをかいてみよう。

①の式は　$y=$

と変形されるから，①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に（　　　　　）

y 軸方向に（　　　　　）

だけ平行移動した放物線である。

したがって，①のグラフは

軸が

（　　　　　　　　　）

頂点が

（　　　　　　　　　）

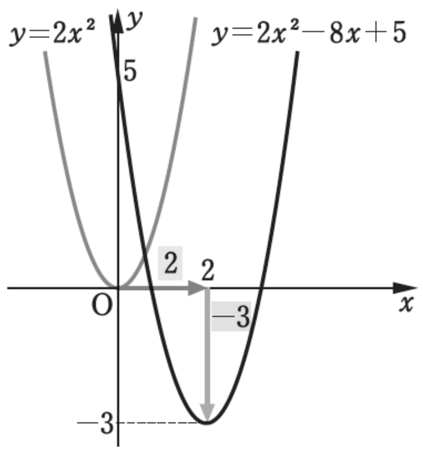
の下に凸の放物線である。

また，$x=0$ のとき（　　　　　　）であるから，

グラフは y 軸と

（　　　　　　　　　）

で交わる。よって，グラフは右の図のようになる。



例題 1 2 次関数 $y=-2x^2-4x+3$ のグラフをかけ。

解 与えられた 2 次関数は

$y=$

と変形される。よって，そのグラフは

軸が

（　　　　　　　　　）

頂点が

（　　　　　　　　　）

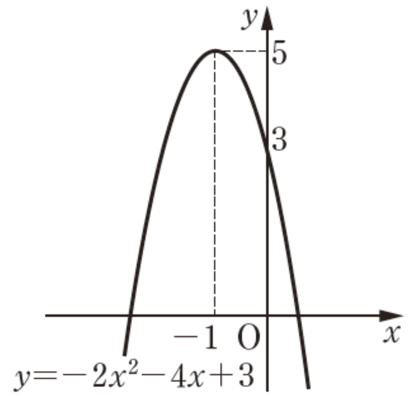
の上に凸の放物線である。また，グラフは

y 軸と

（　　　　　　　　　）

で交わる。

よって，グラフは右の図のようになる。



問 13 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-4x+3$

(2)　$y=2x^2+4x+3$

(3) $y=-2x^2-6x-3$

(4) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$

一般に，2 次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

は次のように

$$y=a(x-p)^2+q$$

の形に変形することができる。

$y=ax^2+bx+c$ ―― x^2 の係数でくくる

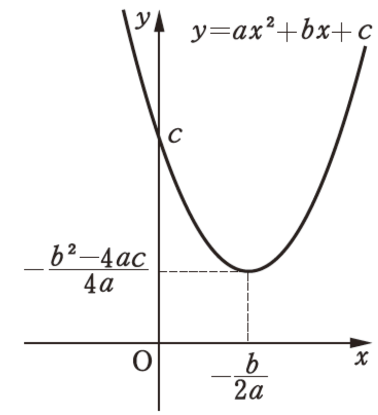
$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$ ―― $a(x^2+\circ\, x)+c$

$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$ ―― $a\left\{\left(x-\frac{\circ}{2}\right)^2-\left(\frac{\circ}{2}\right)^2\right\}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

よって，そのグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，右の図のようになる。



この放物線の

軸は

頂点は

となる。

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。したがって，x^2 の係数が等しい 2 つの放物線は，一方を平行移動して他方に重ねることができる。

例題 2 2 次関数 $y=x^2+2x+3$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフになるか。

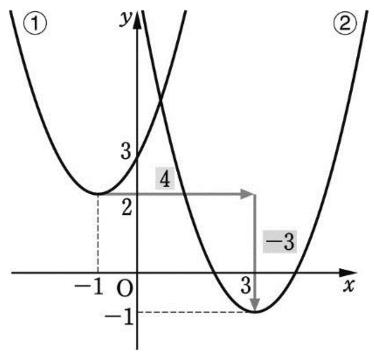
考え方 x^2 の係数がともに 1 であるから，2 つの放物線は平行移動して重ねることができる。よって，頂点の移動について調べるとよい。

解 2 つの 2 次関数を

$y=x^2+2x+3$ ……①

$y=x^2-6x+8$ ……②

とおく。



①の 2 次関数は

と変形できるから，グラフの頂点は

である。

②の 2 次関数は

と変形できるから，グラフの頂点は

である。

①と②の x^2 の係数は等しいから，①のグラフを

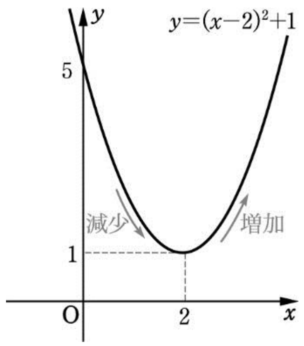
だけ平行移動すれば②のグラフになる。

問 14 2 次関数 $y=x^2-8x+13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y=x^2-4x+2$ のグラフになるか。

③ ２次関数の最大・最小

（教科書 p.85）

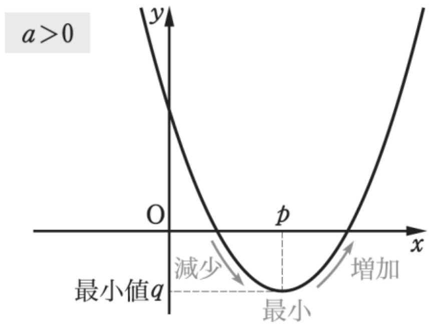
例 11 2 次関数 $y=(x-2)^2+1$ のグラフは直線 $x=2$ を軸とし，点 $(2,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。
したがって，y の値は（　　　　　　）で減少から増加に変わるから（　　　　　　）のとき最小となり，この関数の最小値は（　　　　）である。
また，y の値はいくらでも大きくなるから，
この関数の最大値は（　　　　　）。

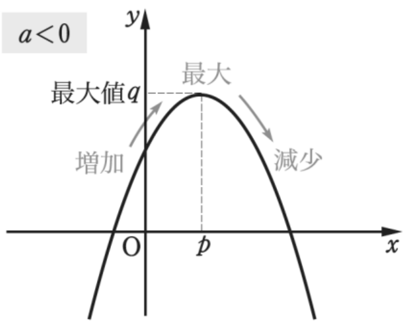


一般に，2 次関数の $y=ax^2+bx+c$ の最大値または最小値は

$y=a(x-p)^2+q$

と変形して，この関数のグラフを考えることにより求めることができる。





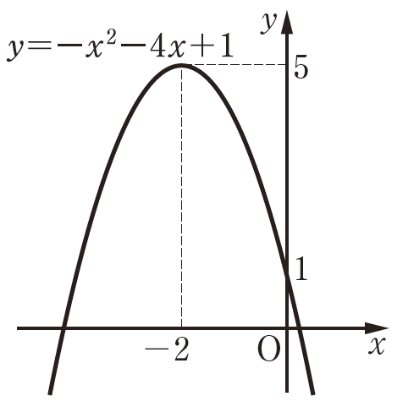
$y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小
2 次関数の $y=a(x-p)^2+q$ は $\boldsymbol{a>0}$ ならば，$\boldsymbol{x=p}$ **で最小値** $\boldsymbol{q}$ をとり，最大値はない。 $\boldsymbol{a<0}$ ならば，$\boldsymbol{x=p}$ **で最大値** $\boldsymbol{q}$ をとり，最小値はない。

例題 3 2 次関数 $y=-x^2-4x+1$ の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解 与えられた 2 次関数は

$y=$

と変形される。よって，この関数は
（　　　　　　　）のとき，最大値（　　　　　）をとる。
最小値は（　　　　　）。



問 15 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^2-6x+7$

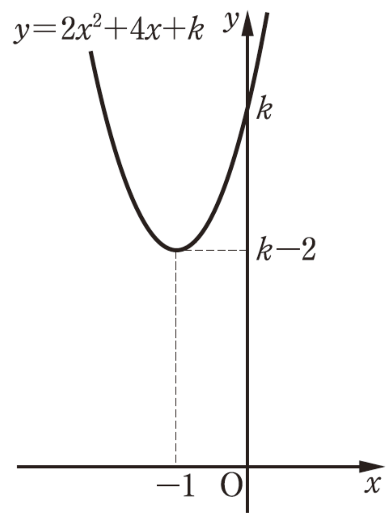
(2) $y=-x^2-2x+2$

例題 4 2 次関数 $y=2x^2+4x+k$ は最小値 3 をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

解 与えられた 2 次関数は

$y=$

と変形される。
（　　　　　　　）のとき，この関数は最小値（　　　　　　）をとるから
（　　　　　　　　）
よって（　　　　　　）



問 16 2 次関数 $y=-2x^2+16x-3k$ は最大値 5 をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

定義域が限られたときの最大値・最小値

（教科書 p.87）

定義域がある範囲に制限されている関数では，関数を表す式の後に( )を用いて関数の定義域を示すことがある。

例題 5 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y = x^2 - 2x - 2$　$(-2 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y = -x^2 + 6x - 6$　$(4 \leqq x \leqq 6)$

解　(1)　与えられた 2 次関数は

(　　　　　　　　　　　　)

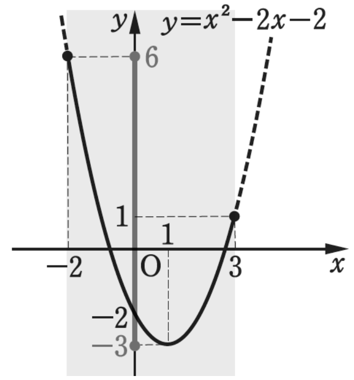
と変形される。$-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

(　　　　　　　　)のとき　最大値(　　　　　)

(　　　　　　　　)のとき　最小値(　　　　　)



(2)　与えられた 2 次関数は

(　　　　　　　　　　　　)

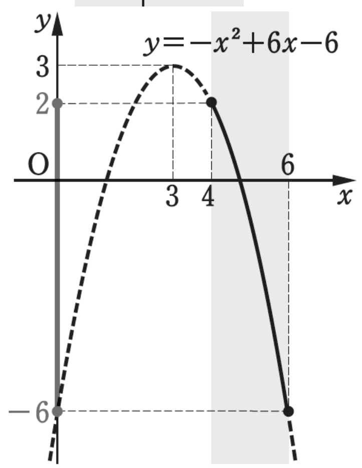
と変形される。$4 \leqq x \leqq 6$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

(　　　　　　　　)のとき　最大値(　　　　　)

(　　　　　　　　)のとき　最小値(　　　　　)



問 17 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y = x^2 + 4x + 3$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y = -2x^2 + 4x + 3$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$

Challenge 例題 定義域が変化するときの最大･最小

（教科書 p.88）

例題 $a>0$ のとき，2 次関数 $y=x^2-4x+5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最小値を求めよ。

考え方 グラフの軸は直線 $x=2$ より，定義域に 2 を含まない $0<a<2$ の場合と，定義域に 2 を含む $2 \leqq a$ の場合に分けて考える。

解 2 次関数 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

のグラフは，軸が直線 $x=2$，頂点が点 $(2,\ 1)$ の下に凸の放物線である。

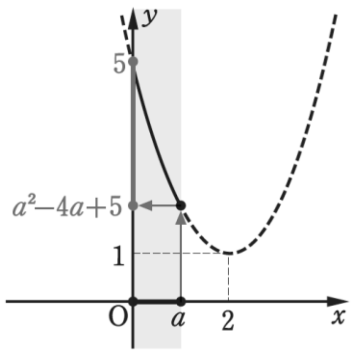
（ⅰ） $0<a<2$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　　　　　　）のとき　最小値（　　　　　　　　）



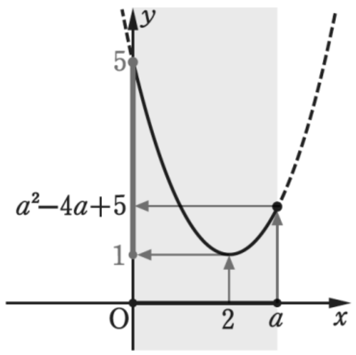
（ⅱ） $2 \leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　　　　　　）のとき　最小値（　　　　）



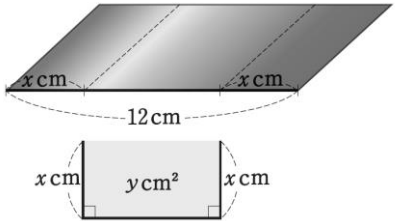
（ⅰ），（ⅱ）より $\left\{ \right.$

問1 $a>0$ のとき，2 次関数 $y=-x^2+6x+1$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を求めよ。

最大・最小の応用

（教科書 p.89）

例題 6 幅 12cm の銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cm の溝をつくる。右の図で示した部分の面積を $y$cm² とするとき，y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



解 底の幅は（　　　　　　　　　　　）である。

深さや底の幅は正であるから

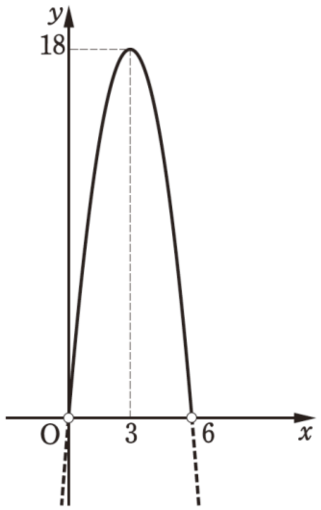
（　　　　　　　　　　　　　　　）

すなわち

（　　　　　　　　　　）……①

面積 $y$cm² は

$y =$



①におけるこの関数のグラフは，

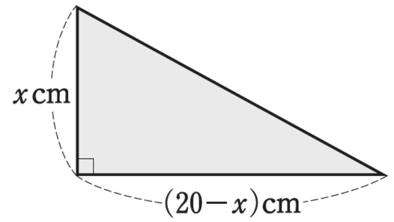
右の図の放物線の実線部分である。

よって，

（　　　　　　　）のとき，y は最大値（　　　　　）

をとる。

問 18 直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



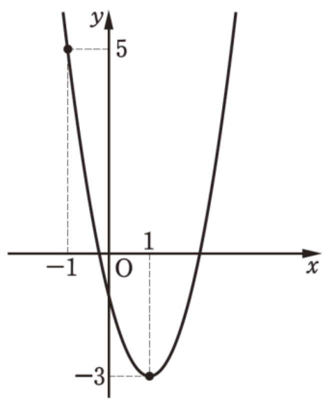
④ 2次関数の決定

頂点に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.90）

例題 7 グラフが点 $(1,\ -3)$ を頂点とし，点 $(-1,\ 5)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

解 頂点が点 $(1,\ -3)$ であるから，
求める 2 次関数は
　（　　　　　　　　　　　）　　……①
と表される。
また，グラフが点 $(-1,\ 5)$ を通るから，
①の式において
　$x=-1$ のとき $y=5$
である。
よって（　　　　　　　　　　　）
すなわち（　　　　　　　　）
ゆえに（　　　　　　）
したがって，求める 2 次関数は
　（　　　　　　　　　　　）



問 19 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-1,\ -5)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る。

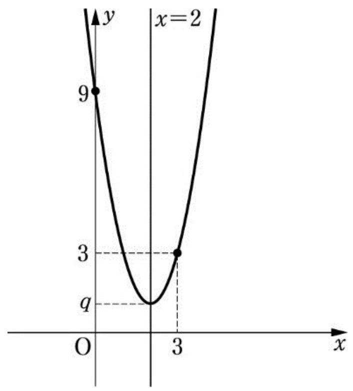
(2)　頂点が点 $(2,\ -1)$ で，点 $(-1,\ -19)$ を通る。

軸に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.91）

例題 8 グラフが直線 $x=2$ を軸とし，2 点 $(3,\ 3)$，$(0,\ 9)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

解 軸が直線 $x=2$ であるから，求める 2 次関数は



と表される。

グラフが点 $(3,\ 3)$ を通るから，

すなわち（　　　　　　　　）

また，グラフが点 $(0,\ 9)$ を通るから

すなわち（　　　　　　　　）

よって

$\begin{cases} & \cdots\cdots① \\ & \cdots\cdots② \end{cases}$

② − ① より（　　　　　　　）

すなわち（　　　　　　）

①より

したがって，求める 2 次関数は

問 20 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

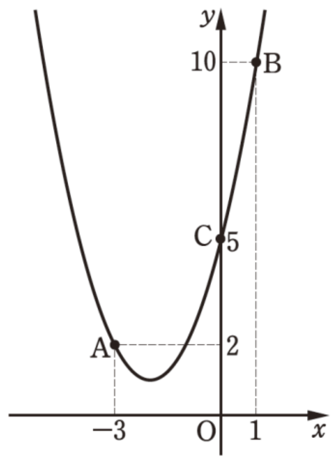
(1)　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 2)$ を通る。

(2)　頂点の x 座標が 3 で，2 点 $(-2,\ 13)$，$(6,\ -3)$ を通る。

グラフ上の3点が与えられたとき

（教科書 p.92）

例題 9 グラフが 3 点 A$(-3,\ 2)$，B$(1,\ 10)$，C$(0,\ 5)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。



解 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。

グラフが点 A$(-3,\ 2)$ を通るから

（　　　　　　　　　　　　　　　　）

さらに，グラフが点 B$(1,\ 10)$，点 C$(0,\ 5)$ を通ることから，同様な式をつくって整理すると

$$\begin{cases} & \cdots\cdots ① \\ & \cdots\cdots ② \\ & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である。まず，①，②の c を消去する。

①，③より（　　　　　　　　　　）

すなわち（　　　　　　　　　　）　　……④

②，③より（　　　　　　　　　）　　……⑤

④＋⑤より（　　　　　　　）すなわち（　　　　　　）

⑤より（　　　　　　　　　　　　　）

よって，求める 2 次関数は（　　　　　　　　　　　）

3 文字についての 1 次方程式を連立したものを（[1]　　　　　　　　　　　　　　　）という。連立 3 元 1 次方程式を解くには，1 つずつ文字を消去していけばよい。

問 21 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　3 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 7)$ を通る。

(2)　3 点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ -3)$ を通る。

参考 連立3元1次方程式の解法

（教科書 p.93）

連立３元１次方程式を解くには，まず，１つの文字を消去し，他の２つの文字についての連立方程式を解く。さらに，得られた値を代入して，残りの文字の値を求めればよい。

例1 次の連立３元１次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x-2y+z=9 & \cdots\cdots① \\ 2x-3y+3z=16 & \cdots\cdots② \\ 3x+2y-2z=-2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

まず，文字 z を消去する。

①×３－②より（　　　　　　　　　）　……④

①×２＋③ より（　　　　　　　　　）　……⑤

次に，④，⑤を連立させて文字 y を消去する。

④×２－⑤×３ より（　　　　　　　　　）

よって（　　　　　　）　……⑥

⑥を④に代入して y の値を求めると

（　　　　　　　）　……⑦

⑥，⑦を①に代入して z の値を求めると

（　　　　　　）

したがって（　　　　　　　　　　　）

1 連立３元１次方程式

⬇ １文字を消去

2 ２文字の連立方程式

⬇ 解く

3 ２文字の値がわかる

⬇ 1の式に代入

4 残りの文字の値がわかる

問1 次の連立３元１次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 4x-2y+z=-1 \\ 16x-4y+3z=17 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

問2 グラフが 3 点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ -9)$，$(4,\ 3)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

参考 ## グラフの平行移動

（教科書 p.94）

例1 2 次関数　$y=x^2-2x+2$　……①

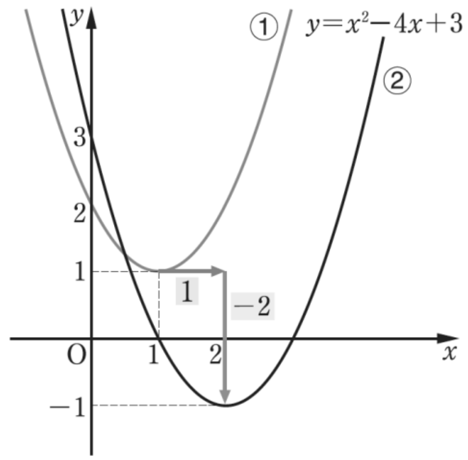
のグラフを

x 軸方向に 1

y 軸方向に -2

だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

①のグラフは



より，　　　　　を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を x 軸方向に（　　　　　），y 軸方向に（　　　　　）だけ平行移動すると，

その頂点は　　　　　　となる。また，x^2 の係数が 1 であるから，

求める 2 次関数は

（　　　　　　　　　　　）すなわち（　　　　　　　　　　　）……②

関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの関数は，x を $x-p$ に，y を $y-q$ に置き換えた

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=f(x-p)+q}$$

である。

例 1 において，①で x を $x-1$ に，y を $y+2$ に置き換えると

$y+2=(x-1)^2-2(x-1)+2$　すなわち　$y=x^2-4x+3$

となり，②が得られる。

問1 2 次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

参考

グラフの対称移動

（教科書 p.95）

例1 2 次関数　$y = x^2 - 2x + 2$　　　　　　・・・・・・①

のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

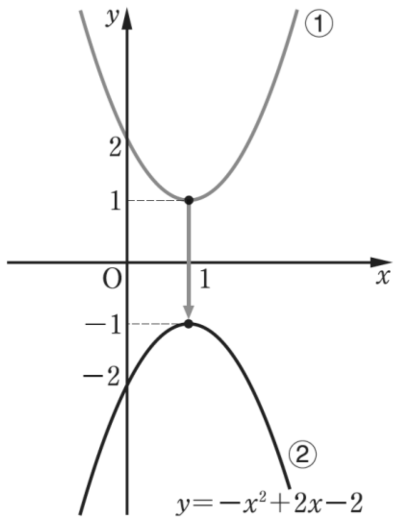
①のグラフは，(　　　　　　　　　　) を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を x 軸に関して対称移動するとその頂点は

(　　　　　　　　　　) となり，上に凸の放物線となる。よって，求める 2 次関数は

(　　　　　　　　　　　　　　　) すなわち

(　　　　　　　　　　　　　　　)　　・・・・・・②



関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの関数は，y を $-y$ に置き換えた

$\boldsymbol{-y = f(x)}$　すなわち　$\boldsymbol{y = -f(x)}$

である。例 1 において，①で y を $-y$ に置き換えると

$-y = x^2 - 2x + 2$　すなわち　$y = -x^2 + 2x - 2$

となり，②が得られる。

同様に，関数 $y = f(x)$ のグラフを

y 軸に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{y = f(-x)}$

原点に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{-y = f(-x)}$

すなわち　$\boldsymbol{y = -f(-x)}$

である。

問1 2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

Training

（教科書 p.96）

1　$f(x)=x^2-3x+4$ において，次の値を求めよ。

(1)　$f(2)$

(2)　$f(a)$

(3)　$f(a-1)$

(4)　$f(2-a)$

2　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-12x+16$

(2)　$y=-x^2+8x-15$

(3) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

(4) $y=(x+2)(x-4)$

3 2 次関数 $y=-2x^2-8x-5$ のグラフをどのように平行移動すれば，2 次関数 $y=-2x^2+4x-3$ のグラフになるか。

4 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=3x^2+6x+5$

(2) $y=-x^2+2x+1$

5　2 次関数 $y=-x^2+2kx+7$ は $x=3$ のとき最大値をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。また，この関数の最大値を求めよ。

6　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=-2x^2-4x+1$　$(-2 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2-4x+5$　$(6 \leqq x \leqq 8)$

7 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が $(-2,\ 7)$ で，点 $(1,\ -2)$ を通る。

(2) $x=-1$ を軸とし，2 点 $(-2,\ -3)$，$(1,\ 3)$ を通る。

(3) 3 点 $(-1,\ -8)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通る。

(4)　x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -3)$ で交わる。

1 節　2 次関数とそのグラフ

❶ 関数

（教科書 p.72）

自転車に乗って，毎時 15km の速さで x 時間進む。そのとき，進む距離を $y$km とすると

（[1]　$y = 15x$　）

と表される。ただし，（[2]　$x \geqq 0$　）である。

このとき，$x = 1$ とすると　$y = 15$

$x = 3$ とすると　$y = 45$

となる。

2 つの変数 x, y があって，x の値を定めると，それに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき，y は x の（[3]　関数　）であるという。

問1　1 辺の長さが $x$cm の正方形の面積を $y\mathrm{cm}^2$ とするとき，y は x の関数である。y を x の式で表せ。

$y = x^2$（ただし，$x > 0$）

y が x の関数であることを

$y = f(x)$

のような記号で表す。これを単に，関数 $f(x)$ ということもある。

また，関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ に対応する y の値を $x = a$ における（[4]　関数の値　）といい，（[5]　$f(a)$　）で表す。

例 1　関数 $f(x) = 12 - 4x$ について

$f(1) = 12 - 4 \cdot 1 = 8$

$f(-2) = 12 - 4 \cdot (-2) = 20$

$f(a) = 12 - 4a$

$f(\boxed{x}) = 12 - 4\boxed{x}$

問2　次の関数 $f(x)$ について，$f(2)$，$f(-3)$，$f(a)$を求めよ。

(1)　$f(x) = 2x - 3$

$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$

$f(-3) = 2 \times (-3) - 3 = -9$

$f(a) = 2a - 3$

(2)　$f(x) = x^2$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(-3) = (-3)^2 = 9$

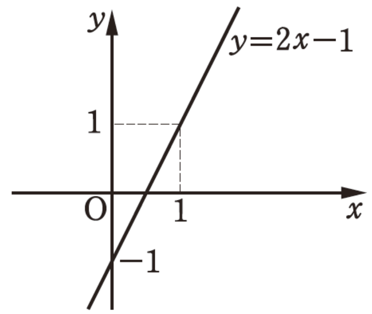
$f(a) = a^2$

関数のグラフ

（教科書 p.73）

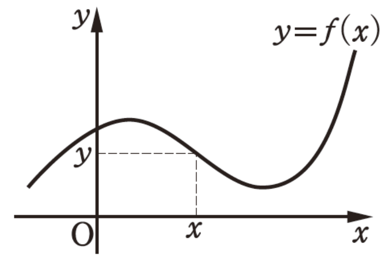
1 次関数　$y = 2x - 1$

のグラフは，y 軸上の点 $(0,\ -1)$ を通り，傾き 2 の直線である。このグラフは，$y = 2x - 1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなっている。



関数 $y = f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$を座標とする点全体からなる図形を，

（[6]　関数 $y = f(x)$ のグラフ　）という。



関数の定義域・値域

（教科書 p.73）

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の（[7] 定義域 ）という。とくに断らなければ，定義域は $f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

また，x が定義域のすべての値をとるとき，それに応じて変数 y がとる値の範囲を，この関数の（[8] 値域 ）という。

例2 関数 $y=2x+1$ のグラフは点（ (0, 1) ）を通り，傾き（ 2 ）の直線である。この関数の定義域をすべての実数としたとき，値域はすべての実数である。

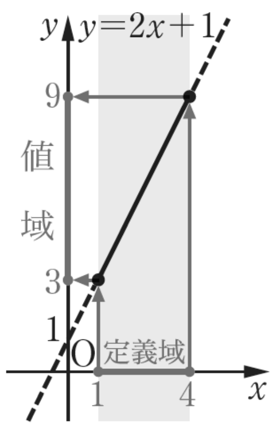
また，この関数の定義域を

$1 \leqq x \leqq 4$

としたとき，値域は

（ $3 \leqq y \leqq 9$ ）

である。



問3 次の定義域における関数 $y=-3x+2$ の値域を求めよ。

(1) すべての実数

すべての実数

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$

x が増加すると y は減少し

$x=-1$ のとき　$y=5$

$x=2$ のとき　$y=-4$

であるから，値域は

$-4 \leqq y \leqq 5$

である。

② 2次関数

（教科書 p.74）

関数　$y=2x^2$

$y=2x^2-16x+33$

などのように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の（1　2 次関数　）であるという。

一般に，x の 2 次関数

$y=ax^2+bx+c$

の形に表される。ただし，a，b，c は定数で，$a\neq 0$ である。

問4 周の長さが 12cm の長方形で，横の長さを $x$cm，面積を $y$cm² とするとき，y を x の式で表せ。ただし，$0<x<6$ とする。

横の長さと縦の長さの和は

$12\div 2=6$(cm)

縦の長さは

$(6-x)$cm

$y=x(6-x)$

$y=-x^2+6x\quad(0<x<6)$

$y=ax^2$ のグラフ

（教科書p.74）

右の図は，2 次関数

$y=x^2$　……①

$y=\frac{1}{2}x^2$　……②

$y=-\frac{1}{3}x^2$　……③

のグラフである。

2 次関数

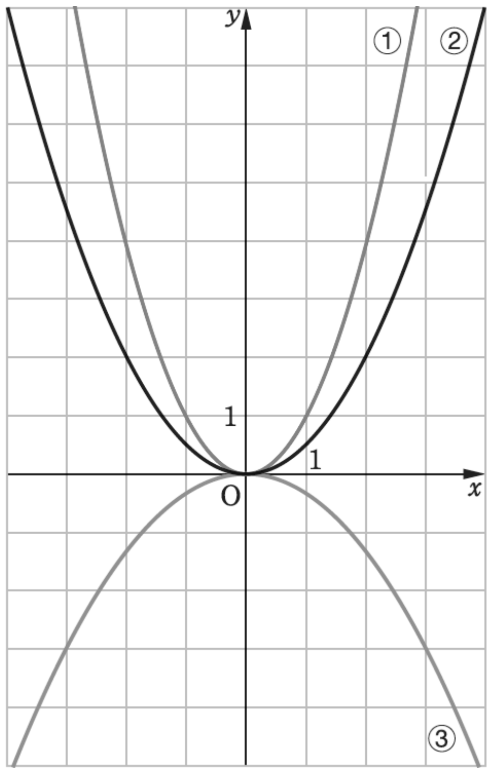
$y=ax^2$

のグラフの形の曲線を（2　放物線　）という。一般に，放物線の対称軸を（3　軸　），軸と放物線の交点を（4　頂点　）という。

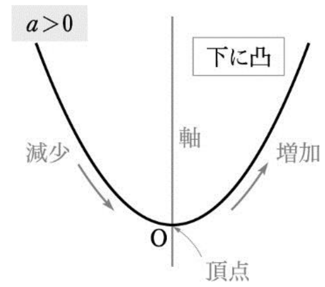
$y=ax^2$ のグラフは軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

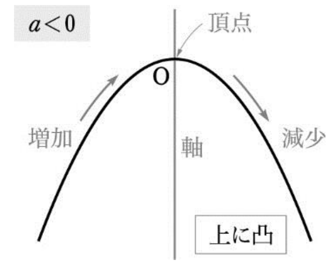
また，この放物線は

$a>0$ のときは（5　下に凸　），$a<0$ のときは（6　上に凸　）であるという。



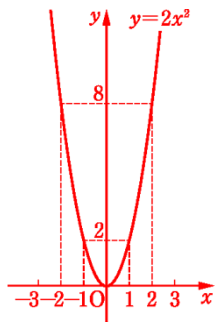
$a>0$ のとき	$a<0$ のとき
・値域は $y\geqq 0$ である。 ・y の値は $x=0$ で減少から増加に変わる。 ・グラフは下に凸（とつ）の放物線	・値域は $y\leqq 0$ である。 ・y の値は $x=0$ で増加から減少に変わる。 ・グラフは上に凸の放物線



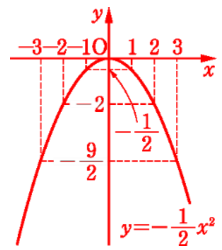


問 5 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2$



(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2$



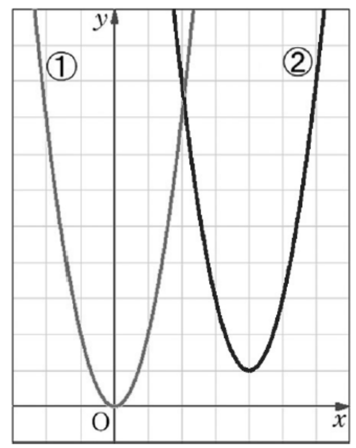
右の図は，2 つの 2 次関数

$y=2x^2$　……①

$y=2x^2-16x+33$　……②

のグラフをコンピュータでかいたものである。これらのグラフは形や大きさが同じで，位置がずれているだけである。

一般に，グラフなどの図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を（7　平行移動　）という。②のグラフは①のグラフを平行移動したものである。



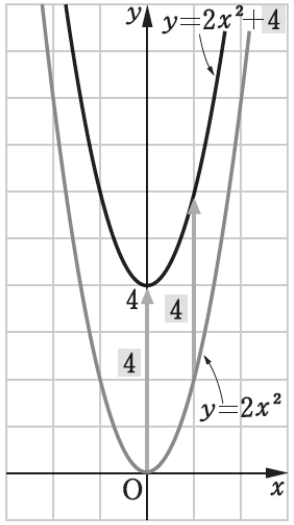
$y=ax^2+q$ のグラフ

（教科書 p.76）

例3 2 つの 2 次関数 $y=2x^2$ と $y=2x^2+4$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$2x^2+4$	…	22	12	6	4	6	12	22	…

＋4



上の表から，$y=2x^2+4$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に（　4　）だけ平行移動した放物線であることがわかる。

この放物線の

軸は

（　y 軸　），

頂点は

（　点 $(0,\ 4)$　）

である。

一般に，$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

y 軸方向に q だけ平行移動

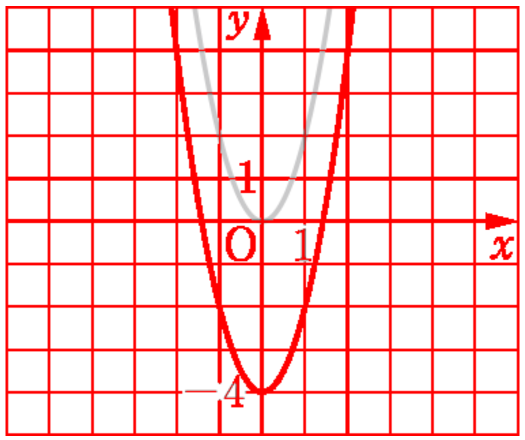
した放物線である。その軸は（[8]　y 軸　），頂点は（[9]　点 $(0,\ q)$　），である。

問6 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-4$

軸は y 軸（直線 $x=0$），

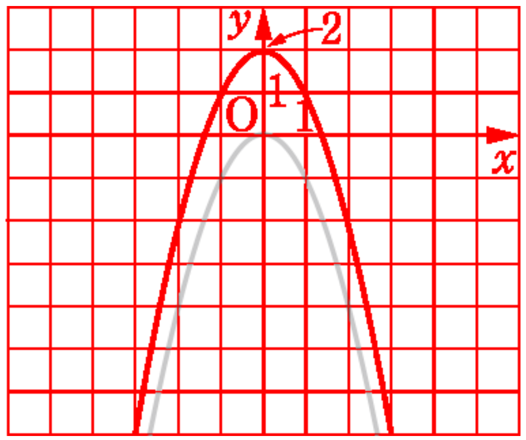
頂点は点 $(0,\ -4)$



(2)　$y=-x^2+2$

軸は y 軸（直線 $x=0$），

頂点は $(0,\ 2)$



$y=a(x-p)^2$ のグラフ

（教科書 p.77）

例4 2 つの 2 次関数 $y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	5	…
$2x^2$	…	8	2	0	2	8	18	32	50	…
$2(x-3)^2$	…	50	32	18	8	2	0	2	8	…

上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に 3 だけずれていることがわかる。

したがって，$y=2(x-3)^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に（　3　）

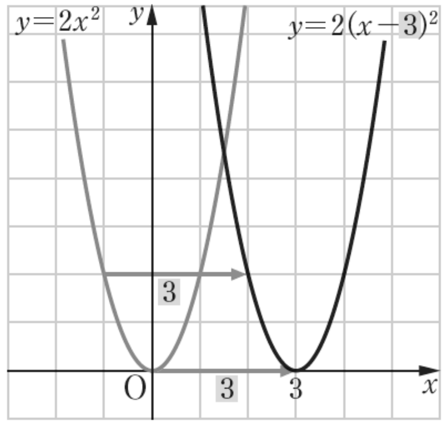
だけ平行移動した放物線である。

この放物線の

軸は（　直線 $x=3$　），

頂点は（　点 $(3,\ 0)$　）

である。



一般に，$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

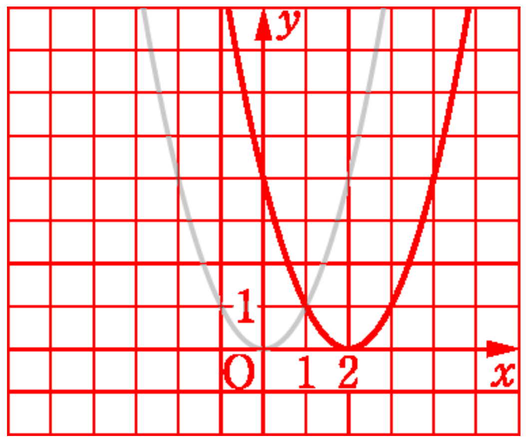
した放物線である。その軸は（[10]　直線 $x=p$　），頂点は（[11]　点 $(p,\ 0)$　），である。

問7 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-2)^2$

軸は直線 $x=2$，

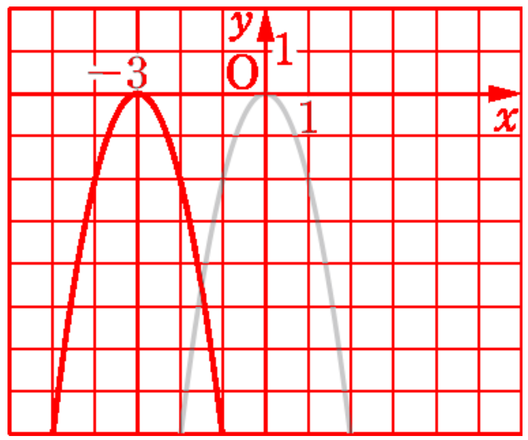
頂点は点 $(2,\ 0)$



(2)　$y=-2(x+3)^2$

軸は直線 $x=-3$，

頂点は点 $(-3,\ 0)$



$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

（教科書 p.78）

例5 2次関数

$y=2(x-3)^2+4$　　……①

のグラフは

$y=2(x-3)^2$

のグラフを

y 軸方向に（　4　）

だけ平行移動した放物線である。

よって，①のグラフは

$y=2x^2$

のグラフを

x 軸方向に（　3　）

y 軸方向に（　4　）

だけ平行移動した放物線で

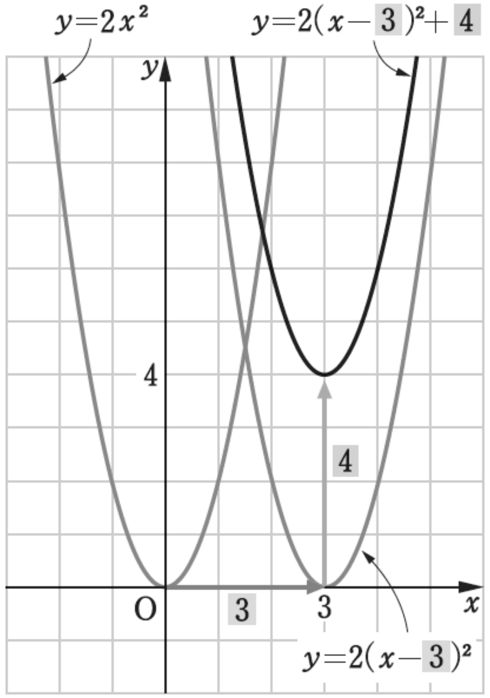
軸は

（　直線 $x=3$　）

頂点は

（　点 (3，4)　）

である。



$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，

$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p

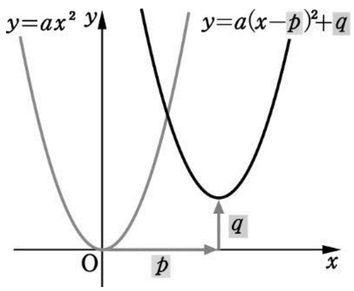
y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線である。

その

軸は直線 $x=p$，　頂点は点 $(p，q)$

である。

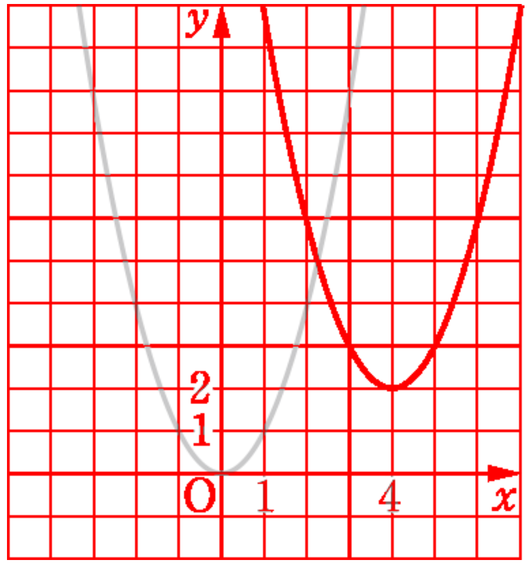


問8 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-4)^2+2$

軸は直線 $x=4$

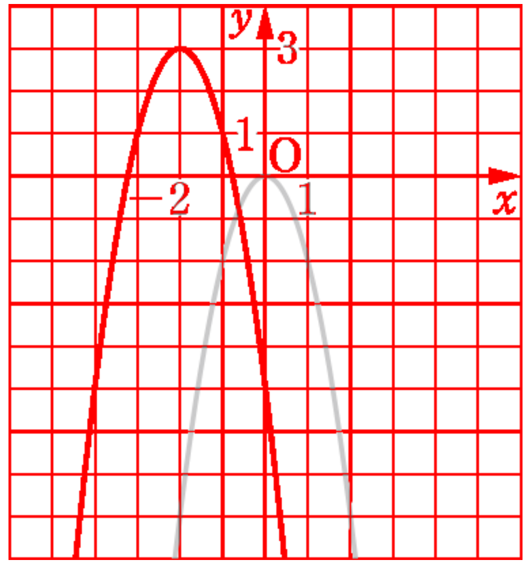
頂点は点 (4，2)



(2)　$y=-2(x+2)^2+3$

軸は直線 $x=-2$

頂点は点 (−2，3)



例6 2 次関数

$y=-2x^2$

のグラフを，頂点が点 (3, 2) になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

求める 2 次関数のグラフは

$y=-2x^2$

のグラフを

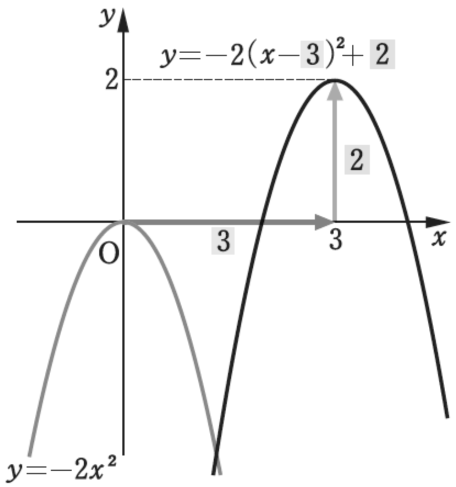
x 軸方向に（　3　）

y 軸方向に（　2　）

だけ平行移動した放物線である。

よって

$y=-2(x-3)^2+2$



問9 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを，頂点が次の点になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(1)　(4, 2)

$y=2(x-4)^2+2$

(2)　(7, −3)

$y=2(x-7)^2-3$

(3)　(−3, 5)

$y=2(x+3)^2+5$

(4)　(−2, −5)

$y=2(x+2)^2-5$

$ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ の変形

（教科書 p.80）

2 次関数

$y=2(x-3)^2+4$　……①

の右辺を展開して整理すると

$2(x-3)^2+4$

$=2(x^2-6x+9)+4$

$=2x^2-12x+22$

となる。

したがって，2 次関数

$y=2x^2-12x+22$　……②

のグラフは，①のグラフと同じものである。

②の形で表された 2 次関数は，①の形に変形すれば，軸や頂点がわかり，グラフをかくことができる。

例7 2 次関数 $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1)　$y=x^2-6x$

(6 の半分)

$=(x-3)^2-3^2$　　$\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2$

$=(x-3)^2-9$

(2)　$y=x^2+8x+3$

(8 の半分)

$=(x+4)^2-4^2+3$　　$\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+3$

$=(x+4)^2-13$

問 10 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1)　$y=x^2-2x$

$=(x-1)^2-1^2$

$=(x-1)^2-1$

(2)　$y=x^2+10x$

$=(x+5)^2-5^2$

$=(x+5)^2-25$

(3)　$y=x^2+6x-2$

$=(x+3)^2-3^2-2$

$=(x+3)^2-11$

(4)　$y=x^2-4x+7$

$=(x-2)^2-2^2+7$

$=(x-2)^2+3$

例8 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

$y=x^2-5x+7$

(5 の半分)

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7$ ―― $\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+7$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

問 11 次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2+3x+4$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

(2) $y=x^2+x-1$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

(3) $y=x^2-7x-5$

$=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-5$

$=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{69}{4}$

(4) $y=x^2-9x+21$

$=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2+21$

$=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

例9 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1) $y=2x^2-12x+19$

$=2(x^2-6x)+19$

$=2\{(x-3)^2-3^2\}+19$

$=2(x-3)^2-2\cdot3^2+19$

$=2(x-3)^2+1$

(2) $y=-3x^2-6x+10$

$=-3(x^2+2x)+10$

$=-3\{(x+1)^2-1^2\}+10$

$=-3(x+1)^2+3\cdot1^2+10$

$=-3(x+1)^2+13$

問 12 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=2x^2+4x+1$

$=2(x^2+2x)+1$

$=2\{(x+1)^2-1^2\}+1$

$=2(x+1)^2-2\cdot1^2+1$

$=2(x+1)^2-1$

(2) $y=3x^2-12x-2$

$=3(x^2-4x)-2$

$=3\{(x-2)^2-2^2\}-2$

$=3(x-2)^2-3\cdot2^2-2$

$=3(x-2)^2-14$

(3) $y=-x^2+10x+7$

$=-(x^2-10x)+7$

$=-\{(x-5)^2-5^2\}+7$

$=-(x-5)^2+5^2+7$

$=-(x-5)^2+32$

(4) $y=-2x^2-6x-5$

$=-2(x^2+3x)-5$

$=-2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-5$

$=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-5$

$=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

このように，x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを（[12]　平方完成　）という。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

（教科書 p.82）

例 10 2 次関数　$y=2x^2-8x+5$　……①

のグラフをかいてみよう。

①の式は　$y=2(x^2-4x)+5=2\{(x-2)^2-2^2\}+5$

$=2(x-2)^2-3$

と変形されるから，①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に（　2　）

y 軸方向に（　-3　）

だけ平行移動した放物線である。

したがって，①のグラフは

軸が

（　直線 $x=2$　）

頂点が

（　点 $(2,\ -3)$　）

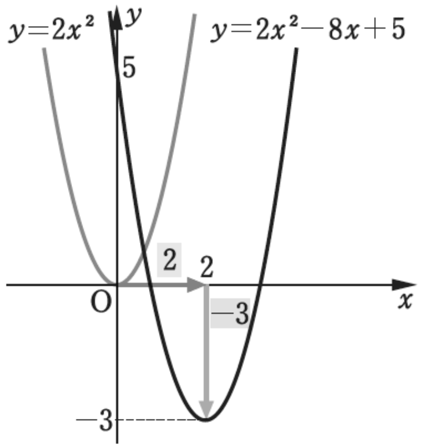
の下に凸の放物線である。

また，$x=0$ のとき（　$y=5$　）であるから，

グラフは y 軸と

（　点 $(0,\ 5)$　）

で交わる。よって，グラフは右の図のようになる。



例題 1 2 次関数 $y=-2x^2-4x+3$ のグラフをかけ。

解 与えられた 2 次関数は

$y=-2(x^2+2x)+3=-2\{(x+1)^2-1^2\}+3$

$=-2(x+1)^2+5$

と変形される。よって，そのグラフは

軸が

（　直線 $x=-1$　）

頂点が

（　点 $(-1,\ 5)$　）

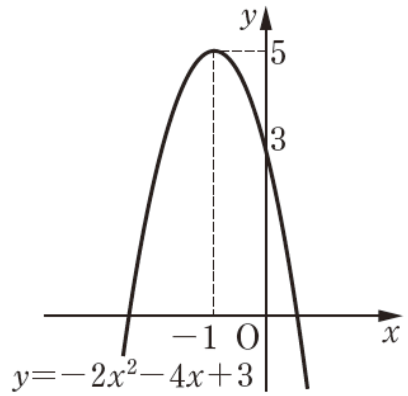
の上に凸の放物線である。また，グラフは

y 軸と

（　点 $(0,\ 3)$　）

で交わる。

よって，グラフは右の図のようになる。



問 13 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

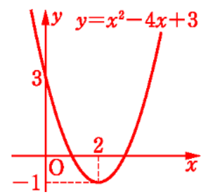
(1)　$y=x^2-4x+3$

$y=x^2-4x+3$

$=(x-2)^2-2^2+3$

$=(x-2)^2-1$

軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$



(2)　$y=2x^2+4x+3$

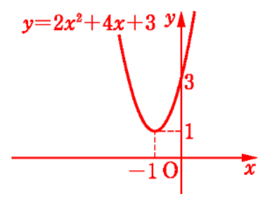
$y=2x^2+4x+3$

$=2(x^2+2x)+3$

$=2\{(x+1)^2-1^2\}+3$

$=2(x+1)^2+1$

軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ 1)$



(3)　$y=-2x^2-6x-3$

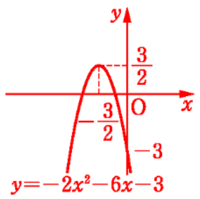
$y=-2x^2-6x-3$

$=-2(x^2+3x)-3$

$=-2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-3$

$=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

軸は直線 $x=-\frac{3}{2}$，頂点は点 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$



(4)　$y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$

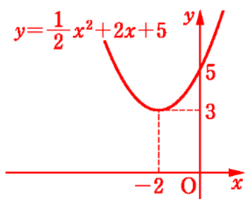
$y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$

$=\frac{1}{2}(x^2+4x)+5$

$=\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}+5$

$=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ 3)$



一般に，2 次関数

$y=ax^2+bx+c$

は次のように

$y=a(x-p)^2+q$

の形に変形することができる。

$y=ax^2+bx+c$　　　　x^2 の係数でくくる

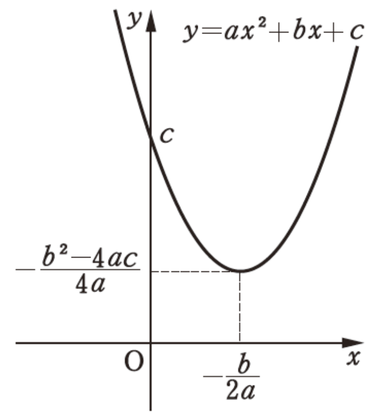
$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$　　　　$a(x^2+\bigcirc x)+c$

$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$　　　　$a\left\{\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

よって，そのグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，右の図のようになる。



この放物線の

軸は

直線　$x=-\frac{b}{2a}$

頂点は

点　$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

となる。

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。したがって，x^2 の係数が等しい 2 つの放物線は，一方を平行移動して他方に重ねることができる。

例題 2 2 次関数 $y=x^2+2x+3$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフになるか。

考え方 x^2 の係数がともに 1 であるから，2 つの放物線は平行移動して重ねることができる。よって，頂点の移動について調べるとよい。

解 2 つの 2 次関数を

$y=x^2+2x+3$ ……①

$y=x^2-6x+8$ ……②

とおく。

①の 2 次関数は

$y=(x+1)^2+2$

と変形できるから，グラフの頂点は

点 $(-1,\ 2)$

である。

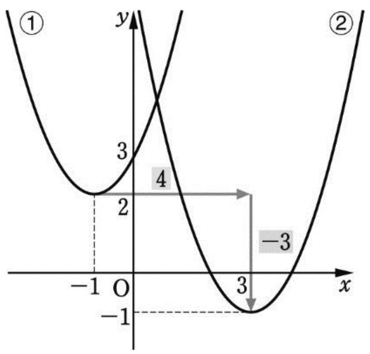
②の 2 次関数は

$y=(x-3)^2-1$

と変形できるから，グラフの頂点は

点 $(3,\ -1)$

である。



①と②の x^2 の係数は等しいから，①のグラフを

x 軸方向に 4，y 軸方向に -3

だけ平行移動すれば②のグラフになる。

問 14 2 次関数 $y=x^2-8x+13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y=x^2-4x+2$ のグラフになるか。

2 つの 2 次関数を

$y=x^2-8x+13$ ……①

$y=x^2-4x+2$ ……②

とおく。

①の 2 次関数は

$y=(x-4)^2-3$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(4,\ -3)$ である。

②の 2 次関数は

$y=(x-2)^2-2$

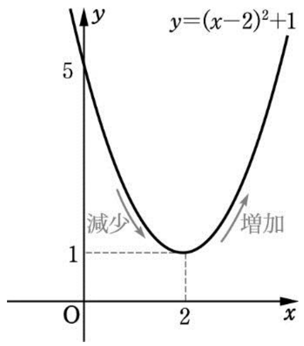
と変形できるから，グラフの頂点は点 $(2,\ -2)$ である。

①と②の x^2 の係数は等しいから，①のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すれば②のグラフになる。

③ 2次関数の最大・最小

（教科書 p.85）

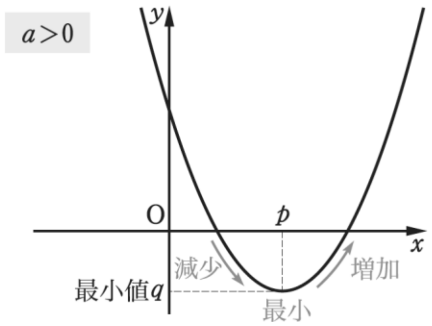
例 11 2次関数 $y=(x-2)^2+1$ のグラフは直線 $x=2$ を軸とし，点 $(2,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。
したがって，y の値は（　$x=2$　）で減少から増加に変わるから（　$x=2$　）のとき最小となり，この関数の最小値は（　1　）である。
また，y の値はいくらでも大きくなるから，
この関数の最大値は（　ない　）。

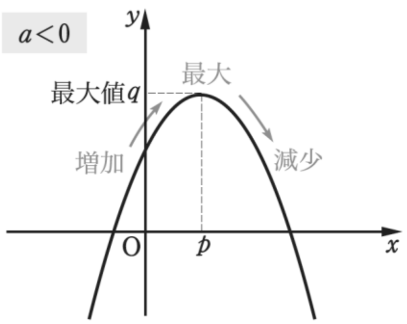


一般に，2次関数の $y=ax^2+bx+c$ の最大値または最小値は

$$y=a(x-p)^2+q$$

と変形して，この関数のグラフを考えることにより求めることができる。





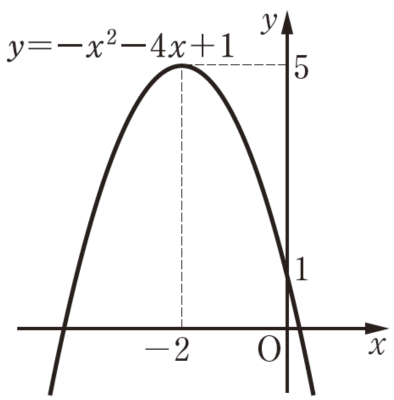
$y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小
2次関数の $y=a(x-p)^2+q$ は **$a>0$ ならば，$x=p$ で最小値 q** をとり，最大値はない。 **$a<0$ ならば，$x=p$ で最大値 q** をとり，最小値はない。

例題 3 2次関数 $y=-x^2-4x+1$ の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解 与えられた2次関数は

$$y=-(x^2+4x)+1$$
$$=-\{(x+2)^2-2^2\}+1$$
$$=-(x+2)^2+5$$

と変形される。よって，この関数は
（　$x=-2$　）のとき，最大値（　5　）をとる。
最小値は（　ない　）。



問 15 次の2次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^2-6x+7$
$$=(x-3)^2-3^2+7$$
$$=(x-3)^2-2$$
$x=3$ のとき　最小値 -2
最大値はない

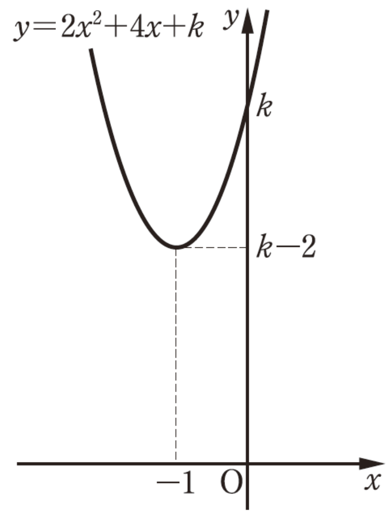
(2)　$y=-x^2-2x+2$
$$=-(x^2+2x)+2$$
$$=-\{(x+1)^2-1^2\}+2$$
$$=-(x+1)^2+3$$
$x=-1$ のとき　最大値 3
最小値はない

例題 4 2次関数 $y=2x^2+4x+k$ は最小値3をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

解 与えられた2次関数は

$$y=2(x^2+2x)+k$$
$$=2\{(x+1)^2-1^2\}+k$$
$$=2(x+1)^2+k-2$$

と変形される。
（　$x=-1$　）のとき，この関数は最小値（　$k-2$　）
をとるから
（　$k-2=3$　）
よって（　$k=5$　）



問 16 2次関数 $y=-2x^2+16x-3k$ は最大値5をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

与えられた2次関数は

$$y=-2x^2+16x-3k$$
$$=-2(x^2-8x)-3k$$
$$=-2\{(x-4)^2-4^2\}-3k$$
$$=-2(x-4)^2+32-3k$$

と変形される。$x=4$ のとき，この関数は最大値 $32-3k$ をとるから

$$32-3k=5$$

よって　$k=9$

定義域が限られたときの最大値・最小値

（教科書 p.87）

定義域がある範囲に制限されている関数では，関数を表す式の後に( )を用いて関数の定義域を示すことがある。

例題 5 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x - 2 \ (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -x^2 + 6x - 6 \ (4 \leqq x \leqq 6)$

解 (1) 与えられた 2 次関数は

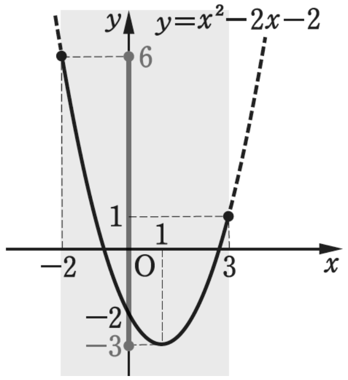
（　$y = (x-1)^2 - 3$　）

と変形される。$-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　$x = -2$　）のとき　最大値（　6　）

（　$x = 1$　）のとき　最小値（　-3　）



(2) 与えられた 2 次関数は

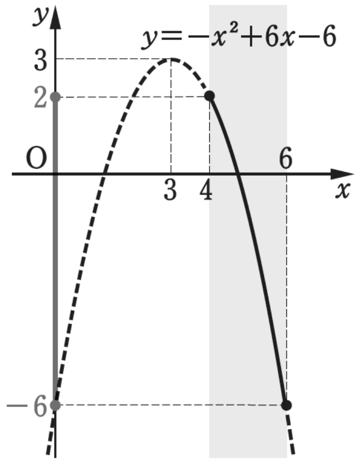
（　$y = -(x-3)^2 + 3$　）

と変形される。$4 \leqq x \leqq 6$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　$x = 4$　）のとき　最大値（　2　）

（　$x = 6$　）のとき　最小値（　-6　）



問 17 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = x^2 + 4x + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$

与えられた 2 次関数は

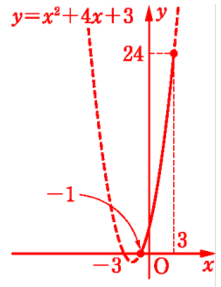
$y = x^2 + 4x + 3$

$\quad = (x+2)^2 - 2^2 + 3$

$\quad = (x+2)^2 - 1$

と変形される。

$-1 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



よって

$x = 3$ のとき　最大値 24

$x = -1$ のとき　最小値 0

(2) $y = -2x^2 + 4x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

与えられた 2 次関数は

$y = -2x^2 + 4x + 3$

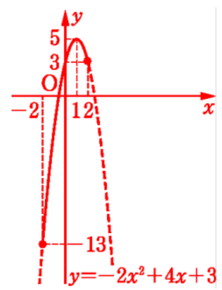
$\quad = -2(x^2 - 2x) + 3$

$\quad = -2\{(x-1)^2 - 1^2\} + 3$

$\quad = -2(x-1)^2 + 5$

と変形される。

$-2 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



よって

$x = 1$ のとき　最大値 5

$x = -2$ のとき　最小値 -13

Challenge　例題　定義域が変化するときの最大･最小

（教科書 p.88）

例題　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=x^2-4x+5$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最小値を求めよ。

考え方　グラフの軸は直線 $x=2$ より，定義域に 2 を含まない $0<a<2$ の場合と，定義域に 2 を含む $2\leqq a$ の場合に分けて考える。

解　2 次関数 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

のグラフは，軸が直線 $x=2$，頂点が点 $(2,\ 1)$ の下に凸の放物線である。

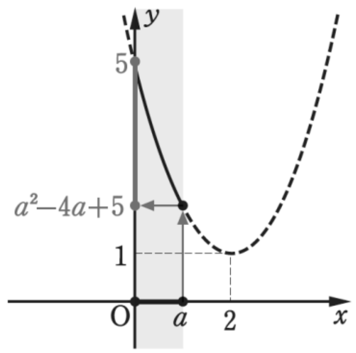
（ⅰ）　$0<a<2$ のとき

$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　$x=a$　）のとき　最小値（　a^2-4a+5　）



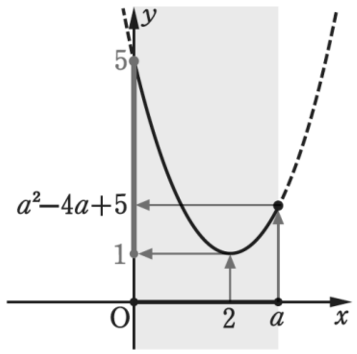
（ⅱ）　$2\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

よって

（　$x=2$　）のとき　最小値（　1　）



（ⅰ），（ⅱ）より $\begin{cases} 0<a<2\ \text{のとき} & x=a\ \text{で最小値}\ a^2-4a+5 \\ 2\leqq a\ \text{のとき} & x=2\ \text{で最小値}\ 1 \end{cases}$

問1　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=-x^2+6x+1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。

与えられた 2 次関数は

$y=-x^2+6x+1$

$\quad=-(x^2-6x)+1$

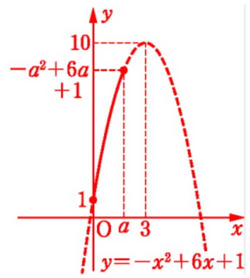
$\quad=-\{(x-3)^2-3^2\}+1$

$\quad=-(x-3)^2+10$

と変形されるから，この関数のグラフは，軸が $x=3$，頂点が点 $(3,\ 10)$ の上に凸の放物線である。

（ⅰ）$0<a<3$ のとき

$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。

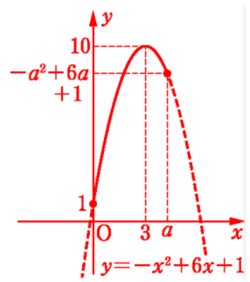


よって

$x=a$ のとき　最大値 $-a^2+6a+1$

（ⅱ）$3\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



よって

$x=3$ のとき　最大値 10

（ⅰ），（ⅱ）より

$0<a<3$ のとき

$x=a$ で　最大値 $-a^2+6a+1$

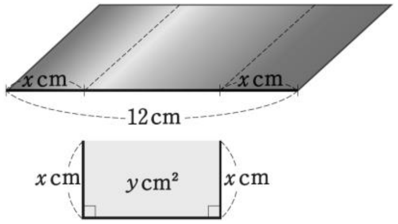
$3\leqq a$ のとき

$x=3$ で　最大値 10

最大・最小の応用

(教科書 p.89)

例題 6 幅 12cm の銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cm の溝をつくる。右の図で示した部分の面積を $y\text{cm}^2$ とするとき，y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



解 底の幅は（　$(12-2x)$cm　）である。

深さや底の幅は正であるから

（　$x>0$，$12-2x>0$　）

すなわち

（　$0<x<6$　）……①

面積 $y\text{cm}^2$ は

$y=x(12-2x)$

$=-2x^2+12x$

$=-2(x-3)^2+18$

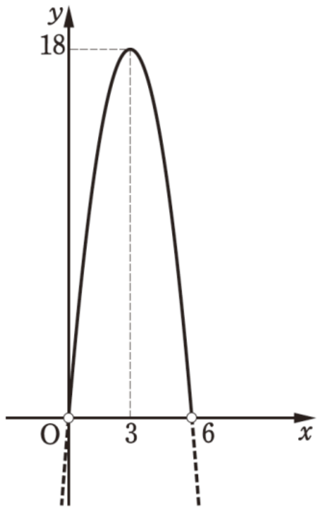
①におけるこの関数のグラフは，

右の図の放物線の実線部分である。

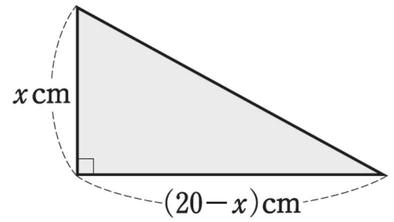
よって，

（　$x=3$　）のとき，y は最大値（　18　）

をとる。



問 18 直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



直角をはさむ 2 辺の長さをそれぞれ $x$cm，$(20-x)$cm とする。

2 辺の長さはいずれも正であるから

$x>0$，$20-x>0$

すなわち

$0<x<20$ …… ①

面積 $y\text{cm}^2$ は

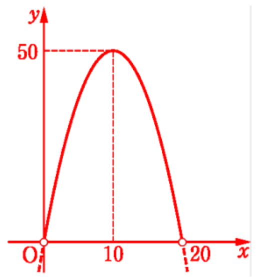
$y=\frac{1}{2}x(20-x)$

$=-\frac{1}{2}x^2+10x$

$=-\frac{1}{2}(x^2-20x+10^2)+\frac{1}{2}\cdot 10^2$

$=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$

①におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



よって，$x=10$ のとき，y は最大値 50 をとる。

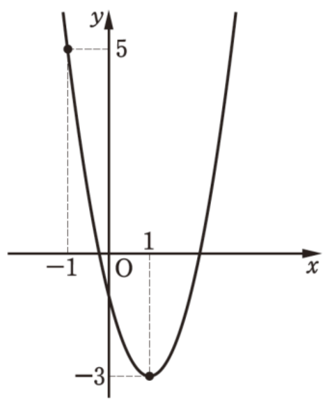
すなわち，直角をはさむ 2 辺がともに 10cm のとき面積の最大値 50cm^2

④ ２次関数の決定

頂点に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.90）

例題 7 グラフが点 (1, −3) を頂点とし，点 (−1, 5) を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。



解 頂点が点 (1, −3) であるから，
求める 2 次関数は
（ $y=a(x-1)^2-3$ ） ……①
と表される。
また，グラフが点 (−1, 5) を通るから，
①の式において
$x=-1$ のとき $y=5$
である。
よって（ $5=a(-1-1)^2-3$ ）
すなわち（ $5=4a-3$ ）
ゆえに（ $a=2$ ）
したがって，求める 2 次関数は
（ $y=2(x-1)^2-3$ ）

問 19 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (−1, −5) で，点 (1, 11) を通る。

頂点が点 (−1, −5) であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x+1)^2-5$ …… ①

と表される。また，グラフが点 (1, 11) を通るから，①の式において $x=1$ のとき $y=11$ である。

よって

$11=a(1+1)^2-5$

$4a=16$

$a=4$

よって $y=4(x+1)^2-5$

(2) 頂点が点 (2, −1) で，点 (−1, −19) を通る。

頂点が点 (2, −1) であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-2)^2-1$ …… ②

と表される。また，グラフが点 (−1, −19) を通るから，②の式において $x=-1$ のとき $y=-19$ である。

よって

$-19=a(-1-2)^2-1$

$9a=-18$

$a=-2$

したがって $y=-2(x-2)^2-1$

軸に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.91）

例題 8 グラフが直線 $x=2$ を軸とし，2 点 $(3,\ 3)$，$(0,\ 9)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

解 軸が直線 $x=2$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-2)^2+q$

と表される。

グラフが点 $(3,\ 3)$ を通るから，

$3=a(3-2)^2+q$

すなわち（　$a+q=3$　）

また，グラフが点 $(0,\ 9)$ を通るから

$9=a(0-2)^2+q$

すなわち（　$4a+q=9$　）

よって

$\begin{cases} a+q=3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+q=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② − ① より（　$3a=6$　）

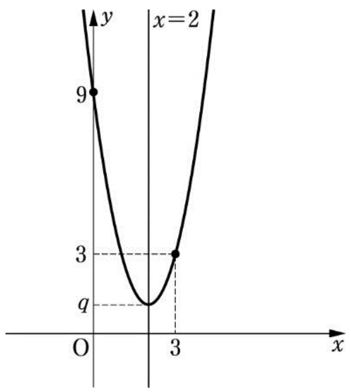
すなわち（　$a=2$　）

①より　$q=3-a$

$\quad =3-2=1$

したがって，求める 2 次関数は

$y=2(x-2)^2+1$



問 20 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 2)$ を通る。

軸が直線 $x=-2$ であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x+2)^2+q$

と表される。

グラフが点 $(1,\ -1)$ を通るから

$-1=a(1+2)^2+q$

すなわち　$9a+q=-1$　……①

また，グラフが点 $(-2,\ 2)$ を通るから

$2=a(-2+2)^2+q$

すなわち　$q=2$　……②

②を①に代入して $a=-\frac{1}{3}$

したがって，求める 2 次関数は

$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+2$

(2)　頂点の x 座標が 3 で，2 点 $(-2,\ 13)$，$(6,\ -3)$ を通る。

頂点の x 座標が 3 であるから，求める 2 次関数は

$y=a(x-3)^2+q$

と表される。

グラフが点 $(-2,\ 13)$ を通るから

$13=a(-2-3)^2+q$

すなわち　$25a+q=13$

また，グラフが点 $(6,\ -3)$ を通るから

$-3=a(6-3)^2+q$

すなわち　$9a+q=-3$

よって

$\begin{cases} 25a+q=13 & \cdots\cdots ① \\ 9a+q=-3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① − ② より　$16a=16$

すなわち　$a=1$

①より　$q=13-25a$

$\quad =13-25=-12$

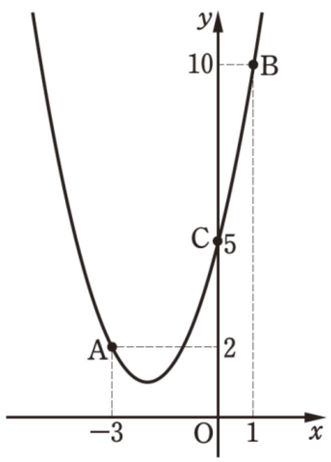
したがって，求める 2 次関数は

$y=(x-3)^2-12$

グラフ上の3点が与えられたとき

（教科書 p.92）

例題 9　グラフが 3 点 A$(-3,\ 2)$，B$(1,\ 10)$，C$(0,\ 5)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。



解　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが点 A$(-3,\ 2)$ を通るから

（　$2=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$　）

さらに，グラフが点 B$(1,\ 10)$，点 C$(0,\ 5)$ を通ることから，同様な式をつくって整理すると

$$\begin{cases} 9a-3b+c=2 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=10 & \cdots\cdots ② \\ c=5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である。まず，①，②の c を消去する。

①，③より（　$9a-3b=-3$　）

すなわち（　$3a-b=-1$　）　……④

②，③より（　$a+b=5$　）　……⑤

④＋⑤より（　$4a=4$　）すなわち（　$a=1$　）

⑤より（　$b=5-a=5-1=4$　）

よって，求める 2 次関数は（　$y=x^2+4x+5$　）

3 文字についての 1 次方程式を連立したものを（[1]　連立 3 元 1 次方程式　）という。連立 3 元 1 次方程式を解くには，1 つずつ文字を消去していけばよい。

問 21　グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　3 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 7)$ を通る。

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。グラフが与えられた 3 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 7)$ を通るから

$$\begin{cases} c=1 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=7 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②より　$4a+2b=0$

すなわち　$2a+b=0$　…… ④

①，③より　$9a+3b=6$

すなわち　$3a+b=2$　…… ⑤

⑤－④より　$a=2$

④より　$b=-2a=-2\times 2=-4$

よって　$y=2x^2-4x+1$

(2)　3 点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ -3)$ を通る。

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。グラフが与えられた 3 点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ -3)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=0 & \cdots\cdots ① \\ c=2 & \cdots\cdots ② \\ a+b+c=-3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②より　$4a-2b=-2$

すなわち　$2a-b=-1$　…… ④

②，③より　$a+b=-5$　…… ⑤

④＋⑤より　$3a=-6$　　$a=-2$

⑤より　$b=-5-a=-5-(-2)=-3$

よって　$y=-2x^2-3x+2$

参考 連立3元1次方程式の解法

（教科書 p.93）

連立 3 元 1 次方程式を解くには，まず，1 つの文字を消去し，他の 2 つの文字についての連立方程式を解く。さらに，得られた値を代入して，残りの文字の値を求めればよい。

例1 次の連立 3 元 1 次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x-2y+z=9 & \cdots\cdots① \\ 2x-3y+3z=16 & \cdots\cdots② \\ 3x+2y-2z=-2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

まず，文字 z を消去する。

①×3－②より（ $4x-3y=11$ ） ……④

①×2＋③より（ $7x-2y=16$ ） ……⑤

次に，④，⑤を連立させて文字 y を消去する。

④×2－⑤×3 より（ $-13x=-26$ ）

よって（ $x=2$ ） ……⑥

⑥を④に代入して y の値を求めると

（ $y=-1$ ） ……⑦

⑥，⑦を①に代入して z の値を求めると

（ $z=3$ ）

したがって（ $x=2$，$y=-1$，$z=3$ ）

1連立３元１次方程式
↓ １文字を消去
2２文字の連立方程式
↓ 解く
3２文字の値がわかる
↓ 1の式に代入
4残りの文字の値がわかる

問1 次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 4x-2y+z=-1 \\ 16x-4y+3z=17 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y+2z=-3 & \cdots\cdots① \\ 4x-2y+z=-1 & \cdots\cdots② \\ 16x-4y+3z=17 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－②×2 より　$-7x+5y=-1$ ……④

②×3－③ より　$-4x-2y=-20$

すなわち　$-2x-y=-10$ ……⑤

④＋⑤×5 より　$-17x=-51$

よって　$x=3$ ……⑥

⑥を⑤に代入して　$-6-y=-10$

よって　$y=4$ ……⑦

⑥，⑦を②に代入して　$12-8+z=-1$

よって　$z=-5$

ゆえに　$x=3$，$y=4$，$z=-5$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y+3z=20 & \cdots\cdots① \\ 2x+7y-3z=13 & \cdots\cdots② \\ 3x+8y+2z=38 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①＋② より　$3x+9y=33$

すなわち　$x+3y=11$ …… ④

①×2－③×3 より

$-7x-20y=-74$ …… ⑤

④×7＋⑤ より　$y=3$ …… ⑥

⑥を④に代入して　$x+9=11$

よって　$x=2$ …… ⑦

⑥，⑦を①に代入して　$2+6+3z=20$

よって　$z=4$

ゆえに　$x=2$，$y=3$，$z=4$

問2 グラフが3点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ -9)$，$(4,\ 3)$ を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが与えられた3点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ -9)$，$(4,\ 3)$ を通るから

$$\begin{cases} a+b+c=6 & \cdots\cdots ① \\ 4a-2b+c=-9 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②－①より　$3a-3b=-15$

すなわち　$a-b=-5$　……④

③－①より $15a+3b=-3$

すなわち　$5a+b=-1$　……⑤

④＋⑤より　$6a=-6$

よって　$a=-1$　……⑥

⑥を⑤に代入して　$-5+b=-1$

よって　$b=4$　……⑦

⑥，⑦を①に代入して　$-1+4+c=6$

よって　$c=3$

ゆえに　$y=-x^2+4x+3$

参考　グラフの平行移動

（教科書 p.94）

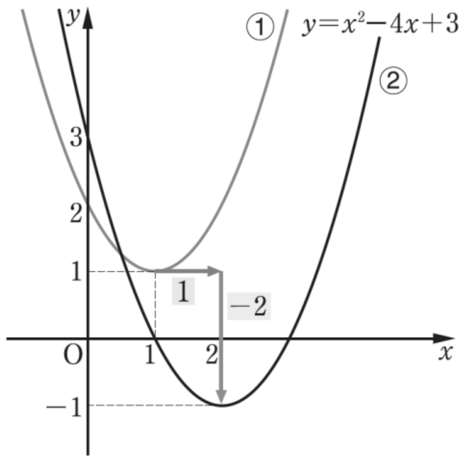
例1 2次関数　$y=x^2-2x+2$　……①

のグラフを

　x 軸方向に1

　y 軸方向に -2

だけ平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めてみよう。



①のグラフは

　$y=(x-1)^2+1$

より，点$(1,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を x 軸方向に（　1　），y 軸方向に（　-2　）だけ平行移動すると，

その頂点は　点$(2,\ -1)$ となる。また，x^2 の係数が1であるから，

求める2次関数は

　（　$y=(x-1)^2-1$　）すなわち（　$y=x^2-4x+3$　）……②

関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの関数は，x を $x-p$ に，y を $y-q$ に置き換えた

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=f(x-p)+q}$$

である。

例1において，①で x を $x-1$ に，y を $y+2$ に置き換えると

$y+2=(x-1)^2-2(x-1)+2$　すなわち　$y=x^2-4x+3$

となり，②が得られる。

問1 2次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

2次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線をグラフとする2次関数は

　$y=(x+3)^2+4(x+3)+5+1$

すなわち　$y=x^2+10x+27$

参考　グラフの対称移動

（教科書 p.95）

例1 2 次関数　$y = x^2 - 2x + 2$　　　　……①

のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

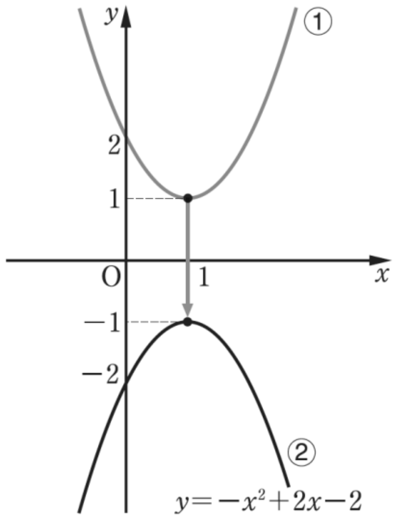
①のグラフは，（　点 $(1,\ 1)$　）を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を x 軸に関して対称移動するとその頂点は

（　点 $(1,\ -1)$　）となり，上に凸の放物線となる。よって，求める 2 次関数は

（　$y = -(x-1)^2 - 1$　）すなわち

（　$y = -x^2 + 2x - 2$　）　　……②



関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの関数は，y を $-y$ に置き換えた

$\boldsymbol{-y = f(x)}$　すなわち　$\boldsymbol{y = -f(x)}$

である。例 1 において，①で y を $-y$ に置き換えると

$-y = x^2 - 2x + 2$　すなわち　$y = -x^2 + 2x - 2$

となり，②が得られる。

同様に，関数 $y = f(x)$ のグラフを

y 軸に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{y = f(-x)}$

原点に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{-y = f(-x)}$

すなわち　$\boldsymbol{y = -f(-x)}$

である。

問1 2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数は

$y = -(-x^2 - 6x - 2)$

すなわち　$y = x^2 + 6x + 2$

2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフをy 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする2 次関数は

$y = -(-x)^2 - 6(-x) - 2$

すなわち　$y = -x^2 + 6x - 2$

2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数は

$y = -\{-(-x)^2 - 6(-x) - 2\}$

すなわち　$y = x^2 - 6x + 2$

Training

（教科書 p.96）

1 $f(x)=x^2-3x+4$ において，次の値を求めよ。

(1) $f(2)$

$f(2)=2^2-3\times 2+4=2$

(2) $f(a)$

$f(a)=a^2-3a+4$

(3) $f(a-1)$

$f(a-1)=(a-1)^2-3(a-1)+4=a^2-5a+8$

(4) $f(2-a)$

$f(2-a)=(2-a)^2-3(2-a)+4=a^2-a+2$

2 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=2x^2-12x+16$

与えられた 2 次関数は

$y=2x^2-12x+16=2(x^2-6x)+16$

$=2\{(x-3)^2-3^2\}+16$

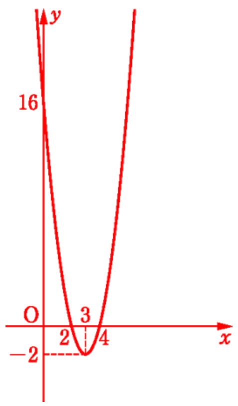
$=2(x-3)^2-2$

と変形されるから，そのグラフは

軸が直線 $x=3$

頂点が点 $(3,\ -2)$

の下に凸の放物線である。また，$x=0$ のとき $y=16$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ 16)$ で交わる。よって，グラフは下の図のようになる。



(2) $y=-x^2+8x-15$

与えられた 2 次関数は

$y=-x^2+8x-15=-(x^2-8x)-15$

$=-\{(x-4)^2-4^2\}-15$

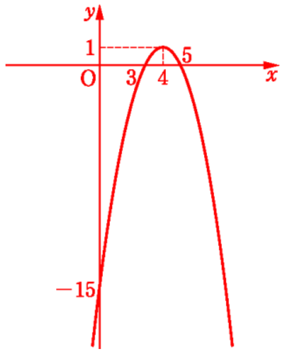
$=-(x-4)^2+1$

と変形されるから，そのグラフは

軸が直線 $x=4$

頂点が点 $(4,\ 1)$

の上に凸の放物線である。また，$x=0$ のとき $y=-15$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ -15)$ で交わる。よって，グラフは図のようになる。



(3) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

与えられた 2 次関数は

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2+2x)+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\{(x+1)^2-1^2\}+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$$

と変形されるから，そのグラフは

軸が直線 $x=-1$

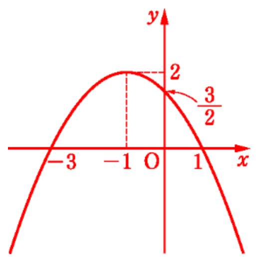
頂点が点 $(-1,\ 2)$

の上に凸の放物線である。

また，$x=0$ のとき　$y=\frac{3}{2}$

であるから，グラフは y 軸と点 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ で交わる。

よって，グラフは図のようになる。



(4) $y=(x+2)(x-4)$

与えられた 2 次関数は

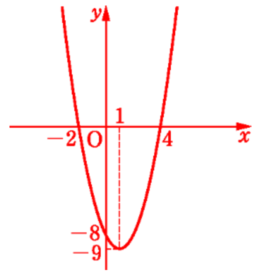
$$y=(x+2)(x-4)$$
$$=x^2-2x-8$$
$$=(x-1)^2-1^2-8$$
$$=(x-1)^2-9$$

と変形されるから，そのグラフは

軸が直線 $x=1$

頂点が点 $(1,\ -9)$

の下に凸の放物線である。また，$x=0$ のとき $y=-8$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ -8)$ で交わる。よって，グラフは図のようになる。



3 2 次関数 $y=-2x^2-8x-5$ のグラフをどのように平行移動すれば，2 次関数 $y=-2x^2+4x-3$ のグラフになるか。

2 つの 2 次関数を

$y=-2x^2-8x-5$ …… ①

$y=-2x^2+4x-3$ …… ②

とおく。

①の 2 次関数は

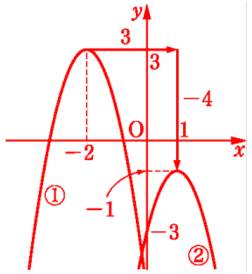
$y=-2(x+2)^2+3$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(-2,\ 3)$ である。

②の 2 次関数は

$y=-2(x-1)^2-1$ と変形できるから，グラフの頂点は点 $(1,\ -1)$ である。

①と②の x^2 の係数は等しいから，①のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に -4 だけ平行移動すれば②のグラフになる。



4 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=3x^2+6x+5$

与えられた 2 次関数は

$y=3x^2+6x+5$

$=3(x^2+2x)+5$

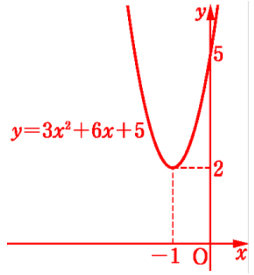
$=3\{(x+1)^2-1^2\}+5$

$=3(x+1)^2+2$

と変形される。

よって，この関数は

$x=-1$ のとき最小値 2 をとる。最大値はない。



(2) $y=-x^2+2x+1$

与えられた 2 次関数は

$y=-x^2+2x+1$

$=-(x^2-2x)+1$

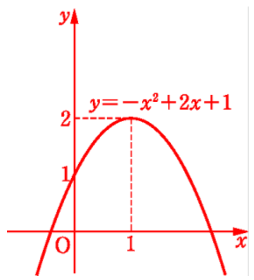
$=-\{(x-1)^2-1^2\}+1$

$=-(x-1)^2+2$

と変形される。

よって，この関数は

$x=1$ のとき最大値 2 をとる。最小値はない。



5　2 次関数 $y=-x^2+2kx+7$ は $x=3$ のとき最大値をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。また，この関数の最大値を求めよ。

与えられた 2 次関数は

$y=-x^2+2kx+7$

$\quad=-(x^2-2kx)+7$

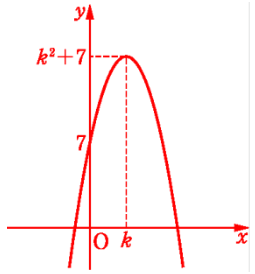
$\quad=-(x-k)^2+k^2+7$

と変形される。

$x=k$ のとき，

この関数は最大値 k^2+7 をとるから，$k=3$

最大値は　$k^2+7=3^2+7=16$



6　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=-2x^2-4x+1$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

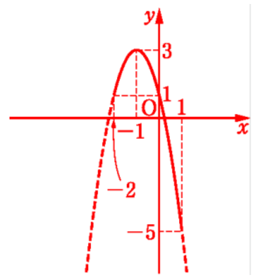
与えられた 2 次関数は

$y=-2x^2-4x+1$

$\quad=-2(x+1)^2+3$

と変形される。

$-2\leqq x\leqq 1$ におけるこの関数のグラフは図の放物線の実線部分である。



よって，

$x=-1$ のとき　最大値 3

$x=1$ のとき　最小値 -5

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2-4x+5$　$(6\leqq x\leqq 8)$

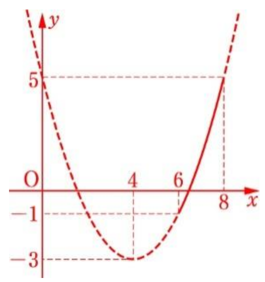
与えられた 2 次関数は

$y=\frac{1}{2}x^2-4x+5$

$\quad=\frac{1}{2}(x-4)^2-3$

と変形される。

$6\leqq x\leqq 8$ におけるこの関数のグラフは図の放物線の実線部分である。



よって，

$x=6$ のとき　最小値 -1

$x=8$ のとき　最大値 5

7　グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が $(-2,\ 7)$ で，点 $(1,\ -2)$ を通る。

頂点が $(-2,\ 7)$ であるから，

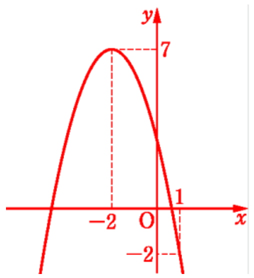
求める 2 次関数は

$y=a(x+2)^2+7$ ……①

と表される。

また，グラフが点 $(1,\ -2)$ を通るから，①の式において

$x=1$ のとき，$y=-2$ である。



よって，

$$-2=a(1+2)^2+7$$

すなわち　$9a+7=-2$

ゆえに　$a=-1$

したがって，求める 2 次関数は

$$y=-(x+2)^2+7$$

(2)　$x=-1$ を軸とし，2 点 $(-2,\ -3)$，$(1,\ 3)$ を通る。

軸が $x=-1$ であるから，

求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表される。

グラフが点 $(-2,\ -3)$ を通るから，

$$-3=a(-2+1)^2+q \quad \text{すなわち} \quad a+q=-3$$

また，グラフが点 $(1,\ 3)$ を通るから，

$$3=a(1+1)^2+q$$

すなわち　$4a+q=3$

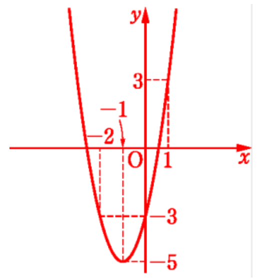
よって

$$\begin{cases} a+q=-3 & \cdots\cdots① \\ 4a+q=3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② − ① より　$3a=6$

すなわち　$a=2$

①より　$q=-5$



したがって，求める 2 次関数は

$$y=2(x+1)^2-5$$

(3)　3 点 $(-1,\ -8)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通る。

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが点 $(-1,\ -8)$ を通るから

$$-8=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$$

さらに，グラフが点 $(0,\ 1)$，点 $(2,\ 1)$ を通ることから，同様な式をつくって整理すると

$$\begin{cases} a-b+c=-8 & \cdots\cdots① \\ c=1 & \cdots\cdots② \\ 4a+2b+c=1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

まず，①，③の c を消去する。

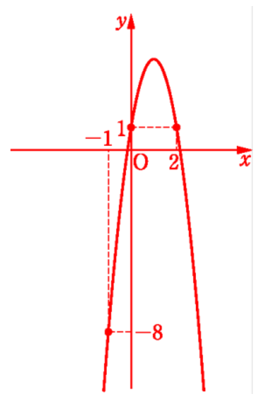
①，②より　$a-b=-9$ ……④

②，③より　$4a+2b=0$

すなわち　$2a+b=0$ ……⑤

④ + ⑤ より $3a=-9$ すなわち　$a=-3$

④より　$b=a+9=-3+9=6$



よって，求める 2 次関数は

$$y=-3x^2+6x+1$$

(4)　x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -3)$ で交わる。

グラフが x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x+2)(x-3)$$

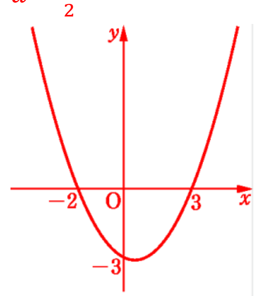
と表される。

y 軸と点 $(0,\ -3)$ で交わるから

$$-3 = a(0+2)(0-3)$$

すなわち　$-6a = -3$ より

$$a = \frac{1}{2}$$



したがって，求める 2 次関数は

$$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-3)$$

すなわち

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$