１節　式の計算

❶ 整式

単項式と多項式

（教科書 p.8）

数，文字およびそれらの積として表される式を（1　　　　　　）という。

単項式において，掛け合わされている文字の個数を（2　　　　　　）といい，数の部分をその（3　　　　　　）という。

例 1 $2x$ の次数は（　　　　），係数は（　　　　）

$-3x^2$ の次数は（　　　　），係数は（　　　　）

$4x^2y^3$ の次数は（　　　　），係数は（　　　　）

問1 次の単項式の次数と係数を答えよ。

(1)　$4x^2$

(2)　$\frac{1}{3}x$

(3)　$\frac{3}{2}x^3y^2$

(4)　$-x^2y$

例2 $2x+1$ の項は，$2x$ と 1

$3x^2-2x-4$ の項は，（　　　　　　　　）

問2 $2x^3-x^2+5x-3$ の項をすべて答えよ。

整式の整理

（教科書 p.8）

（4　　　　　　）：$2x^2+4x+3x^2$ における $2x^2$，$3x^2$ のように，文字の部分が同じ項。

（5　　　　　　）は１つにまとめることができ，まとめることを，整式を（6　　　　　　）という。

例3 $4x^2+x^3-2x-x^2+5+3x^3$ を整理すると

例３のように，整式を整理し，項を次数の高いものから順に並べることを，（　　　　　　）に整理するという。

問3 次の整式を降べきの順に整理せよ。

(1)　$x+5x^2-2+7x^3-4x$

(2)　$5x-x^2+3x^3+6x^2+3-2x^3$

（7　　　　　　）：整理された整式で，各項の次数のうち最も高いもの。

（8　　　　　　）：（9　　　　　　）が n の整式。

（10　　　　　　）：整式の項の中で，文字を含まない項。

例4 $2x+1$ は（　　　　）次式，定数項は（　　　　）

$-5x^3+7x-3$ は（　　　　）次式，定数項は（　　　　）

問4 次の整式は何次式で，定数項は何か。

(1)　$3x^4-x^3+5x^2-7x-1$

(2)　$x-5x^2+2-7x^3$

整式 $4x^2+ax-2x+3a$ において，文字 x に着目して，文字 a を定数として扱うと，この整式は

$$4x^2+(a-2)x+3a$$

と変形できる。

このことを，x について（11　　　　　　　　　　　）に整理するという。

この整式は，x については（12　　　　　　）次式で，定数項は（13　　　　　　　）である。

また，この整式を a について降べきの順に整理すると，

（14　　　　　　　　　　　　　　　　）となるから，a については（15　　　　　　）次式で，定数項は

（16　　　　　　　　　　）である。

問5 次の整式を x について降べきの順に整理せよ。また，x については何次式で，その場合の定数項は何か。

(1)　x^2+ax+a^2-x-1

(2)　$x^2+2xy-3y^2-3x-5y+2$

❷ 整式の加法・減法・乗法

整式の加法･減法

（教科書 p.10）

例5 整式 $A=5x^2-6x+4$，$B=2x^2-3$ について

$A+B$

$$\begin{array}{rr} & 5x^2-6x+4 \\ +) & 2x^2 \qquad -3 \\ \hline & 7x^2-6x+1 \end{array}$$

$A-B$

$$\begin{array}{rr} & 5x^2-6x+4 \\ -) & 2x^2 \qquad -3 \\ \hline & 3x^2-6x+7 \end{array}$$

問6 次の整式 A，B について，$A+B$，$A-B$ を求めよ。

(1)　$A=4x^2-3x+10$，$B=x^2+x+6$

(2)　$A=x^3-x^2+1$，$B=x^2+x-1$

例題 1 $A=x^2+3x-1$，$B=2x^2-x+5$ のとき，$A-2B$ を求めよ。

解 $A-2B$

問7 $A=3x^2-2x+5$，$B=2x^2-4x-1$ のとき，次の式を計算せよ。

(1)　$A+2B$

(2)　$2A-3B$

指数法則

（教科書 p.11）

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}}=a^{n}\ \text{（指数）}$$

a の（1　　　　　）：a をいくつか掛けたもの。a を n 個掛けたものをa の（2　　　　　）といい，a^n と表す。このとき，n を a^n の（3　　　　　）という。

$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5$ ← $\boxed{a^2\times a^3=a^{2+3}}$

$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2$

$=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^6$ ← $\boxed{(a^2)^3=a^{2\times 3}}$

$(ab)^3=ab\times ab\times ab=(a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$

$=(a\times a\times a)\times(b\times b\times b)=a^3b^3$ ← $\boxed{(ab)^3=a^3b^3}$

m，n を正の整数とするとき，次の（4　　　　　）が成り立つ。

指数法則	
[1] $\boldsymbol{a^m\times a^n=a^{m+n}}$	[2] $\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$
[3] $\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$	

例6 $a^3 \times a^5$　　　　$(a^4)^3$

$(a^2b)^4$

問8 次の計算をせよ。

(1)　$a^6 \times a^3$

(2)　$a \times a^7$

(3)　$(a^5)^3$

(4)　$(a^4)^8$

(5)　$(ab^4)^2$

(6)　$(a^3b^5)^6$

単項式の積は，係数，文字の部分の積をそれぞれ計算すればよい。

例7 $(3x)^2 \times 5x^4$

問9 次の計算をせよ。

(1)　$2x^3 \times 3x^5$

(2)　$9xy \times (-5x^4)$

(3)　$(3x^3)^4 \times 10x^2$

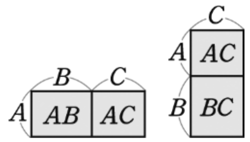
(4)　$(-2xy^3)^2 \times (3xy)^3$

式の展開

（教科書 p.12）

整式の積を計算するには，次の分配法則を用いる。

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(A+B)C=AC+BC$$



例8 $2x^2(5x^2-4x-1)=$

問 10 次の計算をせよ。

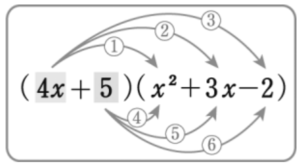
（1）$4x(x^2+4x-3)$

（2）$(3x^2-2x+5)\times(-2x)$

（[5]　　　　　　）：整式の積を単項式の和の形に表すこと。

例9 $(4x+5)(x^2+3x-2)$

$=$



$$\begin{array}{rrr} & x^2 + & 3x-2 \\ \times) & 4x + & 5 \\ \hline \end{array}$$

問 11 次の式を展開せよ。

（1）$(x+6)(2x+3)$

（2）$(3x-2)(x-1)$

（3）$(x+5)(2x^2-3x-6)$

（4）$(2x-3)(4x^2-x+2)$

乗法公式

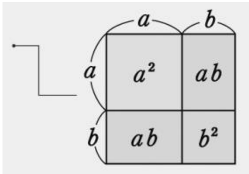
（教科書 p.13）

乗法公式(1)

［1］ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

［2］ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

［3］ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$



例 10 (1)　$(3x+y)^2=$

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

(2)　$(5x-1)^2=$

$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

(3)　$(2x+3y)(2x-3y)=$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問 12 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)^2$

(2)　$(x-5)^2$

(3)　$(x+3y)^2$

(4)　$(3x-4y)^2$

(5)　$(3x+2)(3x-2)$

(6)　$(5x+2y)(5x-2y)$

乗法公式(2)

［4］ $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ab}$

例 11 (1)　$(x+3)(x+2)=$

(2)　$(x-2y)(x+y)=$

問 13 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+5)(x+3)$

(2)　$(x-3)(x+6)$

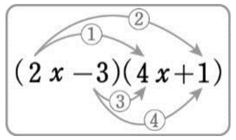
(3)　$(x+4y)(x-7y)$

(4)　$(x-y)(x-5y)$

乗法公式(3)
[5]　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

例 12 (1)　$(2x-3)(4x+1)$

$=$



(2)　$(3x+2y)(2x-y)$

$=$

問 14 次の式を展開せよ。

(1)　$(3x+4)(2x+3)$

(2)　$(4x+1)(5x-2)$

(3)　$(2x-3y)(x+5y)$

(4)　$(3x-2y)(4x-3y)$

置き換えによる展開の工夫

（教科書 p.14）

例 13 $(x-y+1)(x-y-1)$ を展開する。

$x-y=A$ とおくと

$(x-y+1)(x-y-1)=$

$x-y$

問 15 次の式を展開せよ。

(1)　$(a-b+3)(a-b-7)$

(2)　$(x+y)(x+y-z)$

例題 2 次の等式が成り立つことを示せ。

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

証 明 $a+b=A$ とおくと

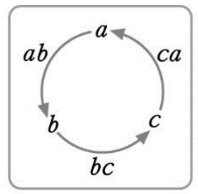
$(a+b+c)^2$

$=(A+c)^2$

$=A^2+2Ac+c^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$



―― ab, bc, ca の順に並べた

例 14 $(a+2b-1)^2$ を，例題 2 の結果を利用して展開してみよう。

$(a+2b-1)^2$

$=$

問 16 次の式を展開せよ。

(1)　$(a-b-2)^2$

(2)　$(a-3b+2c)^2$

発展 3次式の乗法公式

（教科書p.16）

3 次式の乗法公式(1)
[1] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$
[2] $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

問1 公式[1]，[2]が成り立つことを確かめよ。

例1 (1)　$(x+2)^3=$

(2)　$(3x-2y)^3=$

問2 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$

(2)　$(2x-3)^3$

(3)　$(3x+y)^3$

(4)　$(x-2y)^3$

3 次式の乗法公式(2)
[3] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3+\boldsymbol{b}^3$
[4] $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3-\boldsymbol{b}^3$

問3 公式[3]，[4]が成り立つことを確かめよ。

例2 (1)　$(x+2)(x^2-2x+4)=$

(2)　$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

$=$

問4 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+5)(x^2-5x+25)$

(2)　$(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

③ 因数分解

$(x+1)(x+2)$ を展開すると，x^2+3x+2 になる。

逆に，x^2+3x+2 を $(x+1)(x+2)$ のような積の形にすることを（1　　　　　　　）といい，$x+1$ や $x+2$ を x^2+3x+2 の（2　　　　　）という。

$(x+1)(x+2)$
展開 ↓↑ 因数分解
x^2+3x+2

因数分解とは，与えられた整式を 1 次以上の整式の積の形に表すことである。

共通因数のくくり出し

（教科書 p.17）

整式の各項に共通な因数があるとき，分配法則を用いて，整式を因数分解することができる。

$$AB+AC=A(B+C)$$

$$AC+BC=(A+B)C$$

例 15 (1)　$ab+ac-ad=$

(2)　$2xy-y=$

(3)　$4x^2y-6xy^2=$

問 17 次の式を因数分解せよ。

(1)　$xy+xz$

(2)　$3a^2b+b$

(3)　$abc-acd$

(4)　$12x^2y+18xy^2$

2次式の因数分解

（教科書 p.18）

因数分解の公式(1)
[1]　$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$ [2]　$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$ [3]　$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

例 16 (1)　$x^2+6x+9=$

(2)　$4x^2-4xy+y^2=$

(3)　$x^2-16y^2=$

問 18 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2+4x+4

(2)　$4x^2-20xy+25y^2$

(3)　$9x^2-25$

(4)　$36x^2-49y^2$

因数分解の公式(2)
[4] $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

x^2+2x-8 を因数分解するには

$\begin{cases}積 & ab=-8\\ 和 & a+b=2\end{cases}$

となる２つの数 a，b の組を見つければよい。このような２つの数は（　　　，　　　）であるから

積が−8となる２数の組	1 -8	-1 8	2 -4	-2 4
和	-7	7	-2	2
	×	×	×	○

$x^2+2x-8=$

例 17　$x^2-10x+21=$

$\begin{cases}21=(-3)\cdot(-7)\\ -10=(-3)+(-7)\end{cases}$

問 19 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2+5x+6

(2)　x^2-x-12

(3)　$x^2-9x+18$

(4)　$x^2+5x-24$

例 18　$x^2-8xy+15y^2$ を因数分解してみる。

x についての２次式とみると

$x^2-8xy+15y^2=$

$\begin{cases}15y^2=(-3y)\cdot(-5y)\\ -8y=(-3y)+(-5y)\end{cases}$

問 20 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+6xy+8y^2$

$\begin{cases}8y^2=2y\cdot 4y\\ 6y=2y+4y\end{cases}$

(2)　$x^2-3xy-18y^2$

$\begin{cases}-18y^2=(-6y)\cdot 3y\\ -3y=(-6y)+3y\end{cases}$

因数分解の公式(3)
[5] $\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$

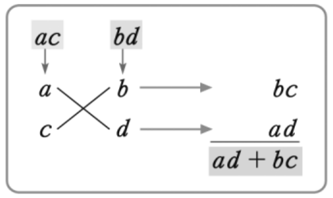
$5x^2+13x+6$ を因数分解するには

公式[5]より

$ac=5$　……①

$ad+bc=13$　……②

$bd=6$　……③

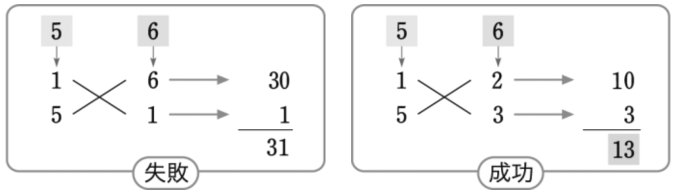


を満たす a，b，c，d を見つければよい。

①積が 5 となる a，c の組	a	1	5
	c	5	1

③積が 6 となる b，d の組	b	1	6	2	3
	d	6	1	3	2

まず，①と③に注目し，そのなかで②を満たすものをさがす。



$\begin{cases}a=1,\ b=2\\ c=5,\ d=3\end{cases}$ とすれば，条件①，②，③を満たす。

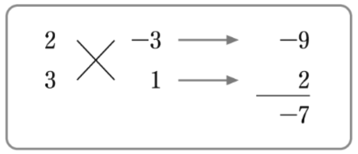
したがって

$5x^2+13x+6=(x+2)(5x+3)$

（³　　　　　　　　　）：このような因数分解の方法のこと。

例 19　$6x^2-7x-3$

$=$



問 21 次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2+3x+1$

(2)　$5x^2-12x+4$

(3)　$8x^2+2x-3$

(4)　$4x^2-11x+6$

(5)　$12x^2-x-6$

(6)　$6x^2-13x+6$

例題 3 $3x^2-13xy+4y^2$ を因数分解せよ。

解 x についての 2 次式とみると，x の係数は $-13y$，定数項は $4y^2$ である。

$$3x^2-13xy+4y^2$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccr} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -4y & \longrightarrow & -12y \\ 3 & & -\ y & \longrightarrow & -\ y \\ \hline & & & & -13y \end{array}$$

問 22 次の式を因数分解せよ。

(1)　$4x^2+3xy-7y^2$

(2)　$8x^2-2xy-15y^2$

因数分解の工夫

（教科書 p.20）

整式の一部を別の文字に置き換えると，共通因数でくくったり，公式にあてはめたりすることで因数分解できることがある。

例 20 $y(x-1)+2(1-x)$ を因数分解してみよう。

$x-1=A$ とおくと

$y(x-1)+2(1-x)$

$=$ ←── $1-x=-(x-1)$

$=$ ←── A を $x-1$ に戻す

問 23 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x(x+y)+5y(x+y)$

(2)　$(a-b)^2-3(a-b)$

(3)　$x(a-b)+b-a$

例題 4 $(x-y)^2-6(x-y)+8$ を因数分解せよ。

解 $x-y=A$ とおくと

$(x-y)^2-6(x-y)+8=$

問 24 次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x+y)^2+7(x+y)+10$

(2)　$(x+2y)^2-6(x+2y)+9$

(3)　$x^2-(y+z)^2$

例題 5 $2ab+b^2+4a-b-6$ を因数分解せよ。

考え方 この式は a について 1 次式，b について 2 次式であるから，
次数の低い a について整理する。

解 a について整理すると

$$2ab+b^2+4a-b-6=$$

問 25 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+xy-x+y-2$

(2)　$2ab+2b^2-a+b-1$

最も次数の低い文字が 2 つ以上あるときは，そのうちの 1 つの文字について整理する。

例題 6 $2x^2+3xy+y^2+x-y-6$ 因数分解せよ。

考え方 x についての 2 次式とみて，降べきの順に整理する。次に，定数項にあたる y の式を因数分解し，教科書 19 ページの公式[5]を利用する。

解 $2x^2+3xy+y^2+x-y-6$　　←── x について整理

$=$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y+2 & \to & 2y+4 \\ 2 & & y-3 & \to & y-3 \\ \hline & & & & 3y+1 \end{array}$$

問 26 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+4xy+3y^2-4x-14y-5$

(2)　$3x^2+2xy-y^2-x+3y-2$

発展　3次方程式の因数分解

（教科書p.22）

教科書 16 ページの公式[3]，[4]から，次の 3 次式の因数分解の公式が成り立つ。

3 次式の因数分解の公式
[1] $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ [2] $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例1 (1)　$x^3+27=$

(2)　$8x^3-125y^3=$

問1 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+64

(2)　x^3-1

(3)　$27x^3+y^3$

Training

（教科書 p.23）

1 $A=x^2+x-3$，$B=2x^2-x+4$，$C=-3x^2+5$ のとき，次の式を計算せよ。

(1) $A-B-C$

(2) $3(2A+B)-2(3A-C)$

2 次の計算をせよ。

(1) $4a^5\times 3a^2$

(2) $-x^3\times(-x)^4$

(3) $5a^3b\times(-7a^4b^5)$

(4) $(-2xy)^3\times(3x^2y^3)^2$

3 次の式を展開せよ。

(1) $5xy(x^2-xy+3y^2)$

(2) $(3x-1)(x^2+7x+5)$

(3) $(9x+2y)^2$

(4) $(6x-7y)^2$

(5) $(3x+10y)(3x-10y)$

(6) $(x-8y)(x+6y)$

(7) $(5x-2y)(3x-y)$

(8) $(4x+5y)(5x-4y)$

4　次の式を展開せよ。

(1)　$(a+b+c)(a-b+c)$

(2)　$(2a-3b+1)^2$

5　次の式を因数分解せよ。

(1)　$3a^3b^2-6a^2b^3+12a^2b^2c$

(2)　$x^2-8x+16$

(3)　$16a^2+24ab+9b^2$

(4)　$16x^2-81y^2$

(5)　$x^2-11x+10$

(6)　$x^2+3xy-54y^2$

(7)　$10x^2+17x+6$

(8)　$8x^2-13x-6$

(9)　$15x^2-22xy+8y^2$

(10)　$6x^2+23xy-18y^2$

6 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^3-12x^2+18x$

(2) ax^2-9ay^2

(3) $x(x-3y)-4y(3y-x)$

(4) $(2x+y)^2+6(2x+y)-7$

(5) $2(x-y)^2+(y-x)-3$

(6) $a^2b-3ab+a+2b-2$

(7) $2x^2+5xy+2y^2-5x-y-3$

(8) $x^2-y^2+4x+6y-5$

１節　式の計算

①整式

単項式と多項式

（教科書 p.8）

数，文字およびそれらの積として表される式を（[1]　単項式　）という。

単項式において，掛け合わされている文字の個数を（[2]　次数　）といい，数の部分をその（[3]　係数　）という。

例１ $2x$ の次数は（　1　），係数は（　2　）

$-3x^2$ の次数は（　2　），係数は（　-3　）

$4x^2y^3$ の次数は（　5　），係数は（　4　）

問1 次の単項式の次数と係数を答えよ。

(1)　$4x^2$

次数は 2，係数は 4

(2)　$\frac{1}{3}x$

次数は 1，係数は $\frac{1}{3}$

(3)　$\frac{3}{2}x^3y^2$

次数は 5，係数は $\frac{3}{2}$

(4)　$-x^2y$

次数は 3，係数は -1

例2 $2x+1$ の項は，$2x$ と 1

$3x^2-2x-4$ の項は，（　$3x^2$，$-2x$，4　）

問2 $2x^3-x^2+5x-3$ の項をすべて答えよ。

$2x^3$，$-x^2$，$5x$，-3

整式の整理

（教科書 p.8）

（[4]　同類項　）：$2x^2+4x+3x^2$ における $2x^2$，$3x^2$ のように，文字の部分が同じ項。

（[5]　同類項　）は１つにまとめることができ，まとめることを，整式を（[6]　整理する　）という。

例3 $4x^2+x^3-2x-x^2+5+3x^3$ を整理すると

$4x^3+3x^2-2x+5$

例３のように，整式を整理し，項を次数の高いものから順に並べることを，（　降べきの順　）に整理するという。

問3 次の整式を降べきの順に整理せよ。

(1)　$x+5x^2-2+7x^3-4x$

$=7x^3+5x^2+(1-4)x-2$

$=7x^3+5x^2-3x-2$

(2)　$5x-x^2+3x^3+6x^2+3-2x^3$

$=(3-2)x^3+(-1+6)x^2+5x+3$

$=x^3+5x^2+5x+3$

（[7]　次数　）：整理された整式で，各項の次数のうち最も高いもの。

（[8]　n 次式　）：（[9]　次数　）が n の整式。

（[10]　定数項　）：整式の項の中で，文字を含まない項。

例4 $2x+1$ は（　1　）次式，定数項は（　1　）

$-5x^3+7x-3$ は（　3　）次式，定数項は（　-3　）

問4 次の整式は何次式で，定数項は何か。

(1)　$3x^4-x^3+5x^2-7x-1$

4次式で，定数項は -1

(2)　$x-5x^2+2-7x^3$

3次式で，定数項は 2

整式 $4x^2+ax-2x+3a$ において，文字 x に着目して，文字 a を定数として扱うと，この整式は

$4x^2+(a-2)x+3a$

と変形できる。

このことを，x について（11　降べきの順　）に整理するという。

この整式は，x については（12　2　）次式で，定数項は（13　$3a$　）である。

また，この整式を a について降べきの順に整理すると，

（14　$(x+3)a+(4x^2-2x)$　）となるから，a については（15　1　）次式で，定数項は

（16　$4x^2-2x$　）である。

問5 次の整式を x について降べきの順に整理せよ。また，x については何次式で，その場合の定数項は何か。

(1)　x^2+ax+a^2-x-1

$=x^2+(a-1)x+(a^2-1)$

2 次式で，定数項は a^2-1

(2)　$x^2+2xy-3y^2-3x-5y+2$

$=x^2+(2y-3)x+(-3y^2-5y+2)$

2 次式で，定数項は $-3y^2-5y+2$

❷ 整式の加法・減法・乗法

整式の加法・減法

（教科書 p.10）

例5 整式 $A=5x^2-6x+4$，$B=2x^2-3$ について

$A+B=(5x^2-6x+4)+(2x^2-3)$
$=5x^2-6x+4+2x^2-3$
$=(5+2)x^2-6x+4-3$
$=7x^2-6x+1$

$$\begin{array}{rr} & 5x^2-6x+4 \\ +) & 2x^2\quad\ \ -3 \\ \hline & 7x^2-6x+1 \end{array}$$

$A-B=(5x^2-6x+4)-(2x^2-3)$
$=5x^2-6x+4-2x^2+3$
$=(5-2)x^2-6x+4+3$
$=3x^2-6x+7$

$$\begin{array}{rr} & 5x^2-6x+4 \\ -) & 2x^2\quad\ \ -3 \\ \hline & 3x^2-6x+7 \end{array}$$

問6 次の整式 A，B について，$A+B$，$A-B$ を求めよ。

(1)　$A=4x^2-3x+10$，$B=x^2+x+6$

$A+B$
$=(4x^2-3x+10)+(x^2+x+6)$
$=4x^2-3x+10+x^2+x+6$
$=(4+1)x^2+(-3+1)x+10+6$
$=5x^2-2x+16$

$A-B$
$=(4x^2-3x+10)-(x^2+x+6)$
$=4x^2-3x+10-x^2-x-6$
$=(4-1)x^2+(-3-1)x+10-6$
$=3x^2-4x+4$

(2)　$A=x^3-x^2+1$，$B=x^2+x-1$

$A+B$
$=(x^3-x^2+1)+(x^2+x-1)$
$=x^3-x^2+1+x^2+x-1$
$=x^3+(-1+1)x^2+x+1-1$
$=x^3+x$

$A-B$
$=(x^3-x^2+1)-(x^2+x-1)$
$=x^3-x^2+1-x^2-x+1$
$=x^3+(-1-1)x^2-x+1+1$
$=x^3-2x^2-x+2$

例題 1　$A=x^2+3x-1$，$B=2x^2-x+5$ のとき，$A-2B$ を求めよ。

解　$A-2B=(x^2+3x-1)-2(2x^2-x+5)$
$=x^2+3x-1-4x^2+2x-10$
$=(1-4)x^2+(3+2)x-1-10$
$=-3x^2+5x-11$

問7 $A=3x^2-2x+5$，$B=2x^2-4x-1$ のとき，次の式を計算せよ。

(1)　$A+2B$
$=(3x^2-2x+5)+2(2x^2-4x-1)$
$=3x^2-2x+5+4x^2-8x-2$
$=(3+4)x^2+(-2-8)x+5-2$
$=7x^2-10x+3$

(2)　$2A-3B$
$=2(3x^2-2x+5)-3(2x^2-4x-1)$
$=6x^2-4x+10-6x^2+12x+3$
$=(6-6)x^2+(-4+12)x+10+3$
$=8x+13$

指数法則

（教科書 p.11）

a の（[1]　累乗　）：a をいくつか掛けたもの。a を n 個掛けたものを a の（[2]　n 乗　）といい，a^n と表す。このとき，n を a^n の（[3]　指数　）という。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\ 個}=a^{n}\ \leftarrow 指数$$

$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5$ ←― $\boxed{a^2\times a^3=a^{2+3}}$

$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2$
$=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)=a^6$ ←― $\boxed{(a^2)^3=a^{2\times3}}$

$(ab)^3=ab\times ab\times ab=(a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$
$=(a\times a\times a)\times(b\times b\times b)=a^3b^3$ ←― $\boxed{(ab)^3=a^3b^3}$

m，n を正の整数とするとき，次の（[4]　指数法則　）が成り立つ。

指数法則	
[1]　$a^m\times a^n=a^{m+n}$	[2]　$(a^m)^n=a^{mn}$
[3]　$(ab)^n=a^nb^n$	

例6 $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$　　$(a^4)^3 = a^{4\times3} = a^{12}$

$(a^2b)^4 = (a^2)^4b^4 = a^{2\times4}b^4 = a^8b^4$

問8 次の計算をせよ。

(1)　$a^6 \times a^3 = a^{6+3} = a^9$

(2)　$a \times a^7 = a^{1+7} = a^8$

(3)　$(a^5)^3 = a^{5\times3} = a^{15}$

(4)　$(a^4)^8 = a^{4\times8} = a^{32}$

(5)　$(ab^4)^2 = a^2(b^4)^2 = a^2b^{4\times2} = a^2b^8$

(6)　$(a^3b^5)^6 = (a^3)^6(b^5)^6 = a^{3\times6}b^{5\times6} = a^{18}b^{30}$

単項式の積は，係数，文字の部分の積をそれぞれ計算すればよい。

例7 $(3x)^2 \times 5x^4 = 3^2x^2 \times 5x^4$

$= (3^2 \times 5) \times (x^2 \times x^4) = 45x^6$

問9 次の計算をせよ。

(1)　$2x^3 \times 3x^5 = (2\times3) \times (x^3 \times x^5) = 6x^8$

(2)　$9xy \times (-5x^4)$

$= \{9 \times (-5)\} \times (xy \times x^4)$

$= \{9 \times (-5)\} \times \{(x \times x^4) \times y\}$

$= -45x^5y$

(3)　$(3x^3)^4 \times 10x^2$

$= 3^4(x^3)^4 \times 10x^2$

$= (3^4 \times 10) \times \{(x^3)^4 \times x^2\}$

$= (81 \times 10) \times (x^{12} \times x^2)$

$= 810x^{14}$

(4)　$(-2xy^3)^2 \times (3xy)^3$

$= (-2)^2x^2(y^3)^2 \times 3^3x^3y^3$

$= \{(-2)^2 \times 3^3\} \times (x^2 \times x^3) \times \{(y^3)^2 \times y^3\}$

$= (4 \times 27) \times x^5 \times (y^6 \times y^3)$

$= 108x^5y^9$

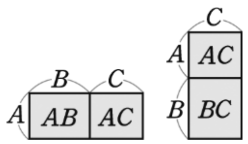
式の展開

（教科書 p.12）

整式の積を計算するには，次の分配法則を用いる。

$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$



例8 $2x^2(5x^2-4x-1)=\underset{①}{2x^2\cdot 5x^2}+\underset{②}{2x^2\cdot(-4x)}+\underset{③}{2x^2\cdot(-1)}$

$=10x^4-8x^3-2x^2$

問 10 次の計算をせよ。

（1） $4x(x^2+4x-3)$

$=4x\cdot x^2+4x\cdot 4x+4x\cdot(-3)$

$=4x^3+16x^2-12x$

（2） $(3x^2-2x+5)\times(-2x)$

$=3x^2\cdot(-2x)-2x\cdot(-2x)+5\cdot(-2x)$

$=-6x^3+4x^2-10x$

（5　展開　）：整式の積を単項式の和の形に表すこと。

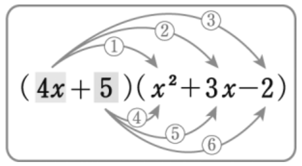
例9 $(4x+5)(x^2+3x-2)$

$=4x(x^2+3x-2)+5(x^2+3x-2)$

$=\underset{①}{4x^3}+\underset{②}{12x^2}\underset{③}{-8x}+\underset{④}{5x^2}+\underset{⑤}{15x}\underset{⑥}{-10}$

$=4x^3+(12+5)x^2+(-8+15)x-10$

$=4x^3+17x^2+7x-10$



$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & +3x & -2 \\
\times) & & 4x & +5 \\
\hline
4x^3 & +12x^2 & -8x & \\
 & 5x^2 & +15x & -10 \\
\hline
4x^3 & +17x^2 & +7x & -10
\end{array}$$

問 11 次の式を展開せよ。

（1） $(x+6)(2x+3)$

$=x(2x+3)+6(2x+3)$

$=2x^2+3x+12x+18$

$=2x^2+(3+12)x+18$

$=2x^2+15x+18$

（2） $(3x-2)(x-1)$

$=3x(x-1)-2(x-1)$

$=3x^2-3x-2x+2$

$=3x^2+(-3-2)x+2$

$=3x^2-5x+2$

（3） $(x+5)(2x^2-3x-6)$

$=x(2x^2-3x-6)+5(2x^2-3x-6)$

$=2x^3-3x^2-6x+10x^2-15x-30$

$=2x^3+(-3+10)x^2+(-6-15)x-30$

$=2x^3+7x^2-21x-30$

（4） $(2x-3)(4x^2-x+2)$

$=2x(4x^2-x+2)-3(4x^2-x+2)$

$=8x^3-2x^2+4x-12x^2+3x-6$

$=8x^3+(-2-12)x^2+(4+3)x-6$

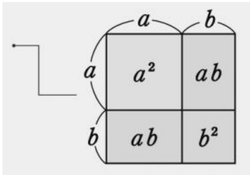
$=8x^3-14x^2+7x-6$

乗法公式

（教科書 p.13）

乗法公式(1)

[1] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$
[2] $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$
[3] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$



例 10 (1)　$(3x+y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot y+y^2=9x^2+6xy+y^2$

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

(2)　$(5x-1)^2=(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 1+1^2=25x^2-10x+1$

$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

(3)　$(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

問 12 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2$

$=x^2+4x+4$

(2)　$(x-5)^2$

$=x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2$

$=x^2-10x+25$

(3)　$(x+3y)^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2$

$=x^2+6xy+9y^2$

(4)　$(3x-4y)^2$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2$

$=9x^2-24xy+16y^2$

(5)　$(3x+2)(3x-2)$

$=(3x)^2-2^2$

$=9x^2-4$

(6)　$(5x+2y)(5x-2y)$

$=(5x)^2-(2y)^2$

$=25x^2-4y^2$

乗法公式(2)

[4] $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ab}$

例 11 (1)　$(x+3)(x+2)=x^2+(3+2)x+3\cdot 2=x^2+5x+6$

(2)　$(x-2y)(x+y)=x^2+(-2y+y)x+(-2y)\cdot y$

$=x^2-xy-2y^2$

問 13 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+5)(x+3)$

$=x^2+(5+3)x+5\cdot 3$

$=x^2+8x+15$

(2)　$(x-3)(x+6)$

$=x^2+(-3+6)x+(-3)\cdot 6$

$=x^2+3x-18$

(3)　$(x+4y)(x-7y)$

$=x^2+(4y-7y)x+4y\cdot(-7y)$

$=x^2-3xy-28y^2$

(4)　$(x-y)(x-5y)$

$=x^2+(-y-5y)x+(-y)\cdot(-5y)$

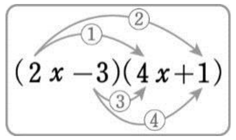
$=x^2-6xy+5y^2$

乗法公式(3)
[5]　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

例 12 (1)　$(2x-3)(4x+1)$

$=\underset{①}{2\cdot 4x^2}+\{\underset{②}{2\cdot 1}+\underset{③}{(-3)\cdot 4}\}x+\underset{④}{(-3)\cdot 1}$

$=8x^2-10x-3$



(2)　$(3x+2y)(2x-y)$

$=3\cdot 2x^2+\{3\cdot(-y)+2y\cdot 2\}x+2y\cdot(-y)$

$=6x^2+xy-2y^2$

問 14 次の式を展開せよ。

(1)　$(3x+4)(2x+3)$

$=3\cdot 2x^2+(3\cdot 3+4\cdot 2)x+4\cdot 3$

$=6x^2+17x+12$

(2)　$(4x+1)(5x-2)$

$=4\cdot 5x^2+\{4\cdot(-2)+1\cdot 5)\}x+1\cdot(-2)$

$=20x^2-3x-2$

(3)　$(2x-3y)(x+5y)$

$=2\cdot 1x^2+\{2\cdot 5y+(-3y)\cdot 1\}x+(-3y)\cdot 5y$

$=2x^2+7xy-15y^2$

(4)　$(3x-2y)(4x-3y)$

$=3\cdot 4x^2+\{3\cdot(-3y)+(-2y)\cdot 4\}x+(-2y)\cdot(-3y)$

$=12x^2-17xy+6y^2$

置き換えによる展開の工夫

（教科書 p.14）

例 13 $(x-y+1)(x-y-1)$ を展開する。

$x-y=A$ とおくと

$(x-y+1)(x-y-1)=(A+1)(A-1)$

$=A^2-1$

$=(x-y)^2-1$

$=x^2-2xy+y^2-1$

問 15 次の式を展開せよ。

(1)　$(a-b+3)(a-b-7)$

$a-b=A$ とおくと

$(a-b+3)(a-b-7)$

$=(A+3)(A-7)$

$=A^2-4A-21$

$=(a-b)^2-4(a-b)-21$

$=a^2-2ab+b^2-4a+4b-21$

(2)　$(x+y)(x+y-z)$

$x+y=A$ とおくと

$(x+y)(x+y-z)$

$=A(A-z)$

$=A^2-Az$

$=(x+y)^2-(x+y)z$

$=x^2+2xy+y^2-xz-yz$

例題 2 次の等式が成り立つことを示せ。

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

証明 $a+b=A$ とおくと

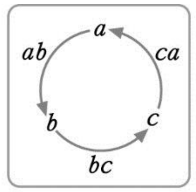
$(a+b+c)^2$

$=(A+c)^2$

$=A^2+2Ac+c^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$



ab, bc, ca の順に並べた

例 14 $(a+2b-1)^2$ を，例題 2 の結果を利用して展開してみよう。

$(a+2b-1)^2$

$=a^2+(2b)^2+(-1)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot a$

$=a^2+4b^2+1+4ab-4b-2a$

問 16 次の式を展開せよ。

(1)　$(a-b-2)^2$

$=a^2+(-b)^2+(-2)^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot(-2)+2\cdot(-2)\cdot a$

$=a^2+b^2+4^2-2ab+4b-4a$

(2)　$(a-3b+2c)^2$

$=a^2+(-3b)^2+(2c)^2+2\cdot a\cdot(-3b)+2\cdot(-3b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$

$=a^2+9b^2+4c^2-6ab-12bc+4ca$

発展　3次式の乗法公式

（教科書p.16）

３次式の乗法公式(1)
[1]　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$
[2]　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

問1 公式[1]，[2]が成り立つことを確かめよ。

[1]　$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a\cdot a^2+a\cdot 2ab+a\cdot b^2+b\cdot a^2+b\cdot 2ab+b\cdot b^2$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

[2]　$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$
$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$
$=a\cdot a^2+a\cdot(-2ab)+a\cdot b^2-b\cdot a^2-b\cdot(-2ab)-b\cdot b^2$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例1 (1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$

(2)　$(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

問2 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$
$=x^3+3x^2+3x+1$

(2)　$(2x-3)^3$
$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2-3^3$
$=8x^3-36x^2+54x-27$

(3)　$(3x+y)^3$
$=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot y+3\cdot 3x\cdot y^2+y^3$
$=27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

(4)　$(x-2y)^3$
$=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

３次式の乗法公式(2)
[3]　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3+\boldsymbol{b}^3$
[4]　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3-\boldsymbol{b}^3$

問3 公式[3]，[4]が成り立つことを確かめよ。

[3]　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a\cdot a^2+a\cdot(-ab)+a\cdot b^2+b\cdot a^2+b\cdot(-ab)+b\cdot b^2$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

[4]　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a\cdot a^2+a\cdot ab+a\cdot b^2-b\cdot a^2-b\cdot ab-b\cdot b^2$
$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$
$=a^3-b^3$

例2 (1)　$(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=x^3+2^3=x^3+8$

(2)　$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3$

問4 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+5)(x^2-5x+25)$
$=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)$
$=x^3+5^3$
$=x^3+125$

(2)　$(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$
$=(4x-3y)\{(4x)^2+4x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=(4x)^3-(2y)^3$
$=64x^3-8y^3$

③ 因数分解

$(x+1)(x+2)$ を展開すると，x^2+3x+2 になる。

逆に，x^2+3x+2 を $(x+1)(x+2)$ のような積の形にすることを（1　因数分解　）といい，$x+1$ や $x+2$ を x^2+3x+2 の（2　因数　）という。

$(x+1)(x+2)$
展開 ⇅ 因数分解
x^2+3x+2

因数分解とは，与えられた整式を 1 次以上の整式の積の形に表すことである。

共通因数のくくり出し

（教科書 p.17）

整式の各項に共通な因数があるとき，分配法則を用いて，整式を因数分解することができる。

$$AB+AC=A(B+C)$$
$$AC+BC=(A+B)C$$

例 15 (1)　$ab+ac-ad=a(b+c-d)$

(2)　$2xy-y=2x\cdot y-1\cdot y$
$=(2x-1)y$

(3)　$4x^2y-6xy^2=2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y$
$=2xy(2x-3y)$

問 17 次の式を因数分解せよ。

(1)　$xy+xz=x(y+z)$

(2)　$3a^2b+b=(3a^2+1)b$

(3)　$abc-acd=ac\cdot b-ac\cdot d=ac(b-d)$

(4)　$12x^2y+18xy^2=6xy\cdot 2x+6xy\cdot 3y=6xy(2x+3y)$

2次式の因数分解

（教科書 p.18）

因数分解の公式(1)
[1]　$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$ [2]　$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$ [3]　$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

例 16 (1)　$x^2+6x+9=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2=(x+3)^2$

(2)　$4x^2-4xy+y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot y+y^2=(2x-y)^2$

(3)　$x^2-16y^2=x^2-(4y)^2=(x+4y)(x-4y)$

問 18 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2+4x+4
$=x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2$
$=(x+2)^2$

(2)　$4x^2-20xy+25y^2$
$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2$
$=(2x-5y)^2$

(3)　$9x^2-25$
$=(3x)^2-5^2$
$=(3x+5)(3x-5)$

(4)　$36x^2-49y^2$
$=(6x)^2-(7y)^2$
$=(6x+7y)(6x-7y)$

因数分解の公式(2)

[4] $x^3+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

x^2+2x-8 を因数分解するには

$$\begin{cases}積 & ab=-8\\ 和 & a+b=2\end{cases}$$

となる２つの数 a，b の組を見つければよい。このような２つの数は（　-2，4　）であるから

積が−8となる2数の組	1 −8	−1 8	2 −4	−2 4
和	−7	7	−2	2
	×	×	×	○

$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$

例 17　$x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$　　$\begin{cases}21=(-3)\cdot(-7)\\ -10=(-3)+(-7)\end{cases}$

問 19　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2+5x+6

$=x^2+(2+3)x+2\cdot3$

$=(x+2)(x+3)$

(2)　x^2-x-12

$=x^2+\{3+(-4)\}x+3\cdot(-4)$

$=(x+3)(x-4)$

(3)　$x^2-9x+18$

$=x^2+\{(-3)+(-6)\}x+(-3)\cdot(-6)$

$=(x-3)(x-6)$

(4)　$x^2+5x-24$

$=x^2+\{(-3)+8\}x+(-3)\cdot8$

$=(x-3)(x+8)$

例 18　$x^2-8xy+15y^2$ を因数分解してみる。

x についての２次式とみると

$x^2-8xy+15y^2=x^2-8y\cdot x+15y^2$

$=(x-3y)(x-5y)$　　$\begin{cases}15y^2=(-3y)\cdot(-5y)\\ -8y=(-3y)+(-5y)\end{cases}$

問 20　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+6xy+8y^2$

$=x^2+6y\cdot x+8y^2$　　$\begin{cases}8y^2=2y\cdot4y\\ 6y=2y+4y\end{cases}$

$=(x+2y)(x+4y)$

(2)　$x^2-3xy-18y^2$

$=x^2-3y\cdot x-18y^2$　　$\begin{cases}-18y^2=(-6y)\cdot3y\\ -3y=(-6y)+3y\end{cases}$

$=(x-6y)(x+3y)$

因数分解の公式(3)

[5] $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$5x^2+13x+6$ を因数分解するには

公式[5]より

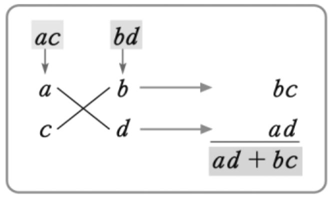
$ac=5$　　……①

$ad+bc=13$　　……②

$bd=6$　　……③

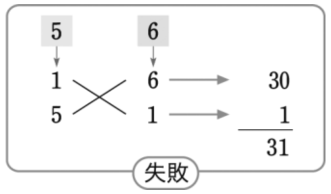
を満たす a，b，c，d を見つければよい。

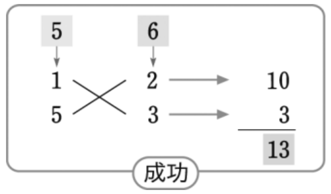
まず，①と③に注目し，そのなかで②を満たすものをさがす。



①積が5となる a，c の組	a	1	5
	c	5	1

③積が6となる b，d の組	b	1	6	2	3
	d	6	1	3	2





$\begin{cases}a=1,\ b=2\\ c=5,\ d=3\end{cases}$ とすれば，条件①，②，③を満たす。

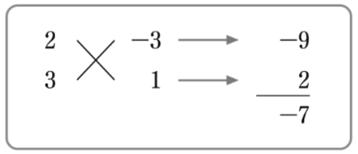
したがって

$5x^2+13x+6=(x+2)(5x+3)$

（[3]　たすき掛け　）：このような因数分解の方法のこと。

例 19　$6x^2-7x-3$

$=(2x-3)(3x+1)$



問 21 次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2+3x+1$

$=(x+1)(2x+1)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \cline{5-5} & & & & 3 \end{array}$$

(2)　$5x^2-12x+4$

$=(x-2)(5x-2)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -10 \\ 5 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \cline{5-5} & & & & -12 \end{array}$$

(3)　$8x^2+2x-3$

$=(2x-1)(4x+3)$

$$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & -1 & \longrightarrow & -4 \\ 4 & & 3 & \longrightarrow & 6 \\ \cline{5-5} & & & & 2 \end{array}$$

(4)　$4x^2-11x+6$

$=(x-2)(4x-3)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -8 \\ 4 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \cline{5-5} & & & & -11 \end{array}$$

(5)　$12x^2-x-6$

$=(3x+2)(4x-3)$

$$\begin{array}{ccrcr} 3 & \times & 2 & \longrightarrow & 8 \\ 4 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ \cline{5-5} & & & & -1 \end{array}$$

(6)　$6x^2-13x+6$

$=(2x-3)(3x-2)$

$$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ \cline{5-5} & & & & -13 \end{array}$$

例題 3 $3x^2-13xy+4y^2$ を因数分解せよ。

解 x についての 2 次式とみると，x の係数は $-13y$，定数項は $4y^2$ である。

$3x^2-13xy+4y^2$

$=3x^2-13y\cdot x+4y^2$

$=(x-4y)(3x-y)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & -4\,y & \longrightarrow & -12\,y \\ 3 & & -\,y & \longrightarrow & -\,y \\ \cline{5-5} & & & & -13\,y \end{array}$$

問 22 次の式を因数分解せよ。

(1)　$4x^2+3xy-7y^2$

$=4x^2+3y\cdot x-7y^2$

$=(x-y)(4x+7y)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & -y & \longrightarrow & -4y \\ 4 & & 7y & \longrightarrow & 7y \\ \cline{5-5} & & & & 3y \end{array}$$

(2)　$8x^2-2xy-15y^2$

$=8x^2-2y\cdot x-15y^2$

$=(2x-3y)(4x+5y)$

$$\begin{array}{ccrcr} 2 & \times & -3y & \longrightarrow & -12y \\ 4 & & 5y & \longrightarrow & 10y \\ \cline{5-5} & & & & -2y \end{array}$$

因数分解の工夫

（教科書 p.20）

整式の一部を別の文字に置き換えると，共通因数でくくったり，公式にあてはめたりすることで因数分解できることがある。

例 20 $y(x-1)+2(1-x)$ を因数分解してみよう。

$x-1=A$ とおくと

$y(x-1)+2(1-x)$

$=y(x-1)-2(x-1)$ ←── $1-x=-(x-1)$

$=yA-2A=A(y-2)=(x-1)(y-2)$ ←── A を $x-1$ に戻す

問 23 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x(x+y)+5y(x+y)$

$x+y=A$ とおくと

$x(x+y)+5y(x+y)$

$=xA+5yA$

$=A(x+5y)$

$=(x+y)(x+5y)$

(2)　$(a-b)^2-3(a-b)$

$a-b=A$ とおくと

$(a-b)^2-3(a-b)$

$=A^2-3A$

$=A(A-3)$

$=(a-b)(a-b-3)$

(3)　$x(a-b)+b-a$

$a-b=A$ とおくと

$x(a-b)+b-a$

$=x(a-b)-(a-b)$

$=xA-A$

$=A(x-1)$

$=(a-b)(x-1)$

例題 4 $(x-y)^2-6(x-y)+8$ を因数分解せよ。

解 $x-y=A$ とおくと

$(x-y)^2-6(x-y)+8=A^2-6A+8$

$=(A-2)(A-4)=(x-y-2)(x-y-4)$

問 24 次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x+y)^2+7(x+y)+10$

$x+y=A$ とおくと

$(x+y)^2+7(x+y)+10$

$=A^2+7A+10$

$=(A+2)(A+5)$

$=(x+y+2)(x+y+5)$

(2)　$(x+2y)^2-6(x+2y)+9$

$x+2y=A$ とおくと

$(x+2y)^2-6(x+2y)+9$

$=A^2-6A+9$

$=(A-3)^2$

$=(x+2y-3)^2$

(3)　$x^2-(y+z)^2$

$y+z=A$ とおくと

$x^2-(y+z)^2$

$=x^2-A^2$

$=(x+A)(x-A)$

$=\{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\}$

$=(x+y+z)(x-y-z)$

例題 5 $2ab+b^2+4a-b-6$ を因数分解せよ。

考え方 この式は a について 1 次式，b について 2 次式であるから，
次数の低い a について整理する。

解 a について整理すると

$$\begin{aligned}2ab+b^2+4a-b-6 &= 2a(b+2)+(b^2-b-6)\\ &= 2a(b+2)+(b+2)(b-3)\\ &= (b+2)(2a+b-3)\end{aligned}$$

問 25 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+xy-x+y-2$

y について整理すると

$x^2+xy-x+y-2$

$=y(x+1)+(x^2-x-2)$

$=y(x+1)+(x+1)(x-2)$

$=(x+1)\{y+(x-2)\}$

$=(x+1)(x+y-2)$

(2)　$2ab+2b^2-a+b-1$

a について整理すると

$2ab+2b^2-a+b-1$

$=a(2b-1)+(2b^2+b-1)$

$=a(2b-1)+(2b-1)(b+1)$

$=(2b-1)(a+b+1)$

最も次数の低い文字が 2 つ以上あるときは，そのうちの 1 つの文字について整理する。

例題 6 $2x^2+3xy+y^2+x-y-6$ 因数分解せよ。

考え方 x についての 2 次式とみて，降べきの順に整理する。次に，定数項にあたる y の式を因数分解し，教科書 19 ページの公式[5]を利用する。

解

$2x^2+3xy+y^2+x-y-6$ ←― x について整理

$=2x^2+(3y+1)x+(y^2-y-6)$

$=2x^2+(3y+1)x+(y+2)(y-3)$

$=\{x+(y+2)\}\{2x+(y-3)\}$

$=(x+y+2)(2x+y-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y+2 & \to & 2y+4 \\ 2 & & y-3 & \to & y-3 \\ \hline & & & & 3y+1 \end{array}$$

問 26 次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+4xy+3y^2-4x-14y-5$

$=x^2+(4y-4)x+(3y^2-14y-5)$

$=x^2+(4y-4)x+(y-5)(3y+1)$

$=\{x+(y-5)\}\{x+(3y+1)\}$

$=(x+y-5)(x+3y+1)$

$$\begin{array}{ccccc} y & \times & -5 & \to & -15y \\ 3y & & 1 & \to & y \\ \hline & & & & -14y \end{array}$$

(2)　$3x^2+2xy-y^2-x+3y-2$

$=3x^2+(2y-1)x-(y^2-3y+2)$

$=3x^2+(2y-1)x-(y-1)(y-2)$

$=\{x+(y-1)\}\{3x-(y-2)\}$

$=(x+y-1)(3x-y+2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y-1 & \to & 3y-3 \\ 3 & & -(y-2) & \to & -y+2 \\ \hline & & & & 2y-1 \end{array}$$

発展　3次方程式の因数分解

（教科書p.22）

教科書 16 ページの公式[3]，[4]から，次の 3 次式の因数分解の公式が成り立つ。

3 次式の因数分解の公式
[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ [2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例1 (1)　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)$

$=(x+3)(x^2-3x+9)$

(2)　$8x^3-125y^3=(2x)^3-(5y)^3$

$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot5y+(5y)^2\}$

$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

問1 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+64

$=x^3+4^3$

$=(x+4)(x^2-x\cdot4+4^2)$

$=(x+4)(x^2-4x+16)$

(2)　x^3-1

$=x^3-1^3$

$=(x-1)(x^2+x\cdot1+1^2)$

$=(x-1)(x^2+x+1)$

(3)　$27x^3+y^3$

$=(3x)^3+y^3$

$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\cdot y+y^2\}$

$=(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

Training

（教科書 p.23）

1 $A=x^2+x-3$，$B=2x^2-x+4$，$C=-3x^2+5$ のとき，次の式を計算せよ。

(1) $A-B-C$

$=(x^2+x-3)-(2x^2-x+4)-(-3x^2+5)$

$=x^2+x-3-2x^2+x-4+3x^2-5$

$=(1-2+3)x^2+(1+1)x-3-4-5$

$=2x^2+2x-12$

(2) $3(2A+B)-2(3A-C)$

$=6A+3B-6A+2C$

$=3B+2C$

$=3(2x^2-x+4)+2(-3x^2+5)$

$=6x^2-3x+12-6x^2+10$

$=-3x+22$

2 次の計算をせよ。

(1) $4a^5\times 3a^2$

$=4\cdot 3\cdot a^{5+2}$

$=12a^7$

(2) $-x^3\times(-x)^4$

$=-x^3\cdot x^4$

$=-x^{3+4}$

$=-x^7$

(3) $5a^3b\times(-7a^4b^5)$

$=5\cdot(-7)\ \cdot a^{3+4}\cdot b^{1+5}$

$=-35a^7b^6$

(4) $(-2xy)^3\times(3x^2y^3)^2$

$=(-2)^3x^3y^3\times 3^2(x^2)^2(y^3)^2$

$=\{(-2)^3\cdot 3^2\}\times\{x^3\cdot(x^2)^2\}\times\{y^3\cdot(y^3)^2\}$

$=-72x^7y^9$

3 次の式を展開せよ。

(1) $5xy(x^2-xy+3y^2)$

$=5xy\cdot x^2+5xy\cdot(-xy)+5xy\cdot 3y^2$

$=5x^3y-5x^2y^2+15xy^3$

(2) $(3x-1)(x^2+7x+5)$

$=3x(x^2+7x+5)-(x^2+7x+5)$

$=3x^3+21x^2+15x-x^2-7x-5$

$=3x^3+20x^2+8x-5$

(3) $(9x+2y)^2$

$=(9x)^2+2\cdot 9x\cdot 2y+(2y)^2$

$=81x^2+36xy+4y^2$

(4) $(6x-7y)^2$

$=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot 7y+(7y)^2$

$=36x^2-84xy+49y^2$

(5) $(3x+10y)(3x-10y)$

$=(3x)^2-(10y)^2$

$=9x^2-100y^2$

(6) $(x-8y)(x+6y)$

$=x^2+(-8y+6y)x-8y\cdot 6y$

$=x^2-2xy-48y^2$

(7) $(5x-2y)(3x-y)$

$=5\cdot 3x^2+\{5\cdot(-y)-2y\cdot 3\}x-2y\cdot(-y)$

$=15x^2-11xy+2y^2$

(8) $(4x+5y)(5x-4y)$

$=4\cdot 5x^2+\{4\cdot(-4y)+5y\cdot 5\}x+5y\cdot(-4y)$

$=20x^2+9xy-20y^2$

4　次の式を展開せよ。

(1)　$(a+b+c)(a-b+c)$

$a+c=A$ とおくと

$(a+b+c)(a-b+c)$

$=(A+b)(A-b)$

$=A^2-b^2$

$=(a+c)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2$

$=a^2-b^2+c^2+2ac$

(2)　$(2a-3b+1)^2$

$=(2a)^2+(-3b)^2+1^2+2\cdot 2a\cdot(-3b)+2\cdot(-3b)\cdot 1+2\cdot 1\cdot(2a)$

$=4a^2+9b^2+1-12ab-6b+4a$

$=4a^2-12ab+9b^2+4a-6b+1$

5　次の式を因数分解せよ。

(1)　$3a^3b^2-6a^2b^3+12a^2b^2c$

$=3a^2b^2\cdot a-3a^2b^2\cdot 2b+3a^2b^2\cdot 4c$

$=3a^2b^2(a-2b+4c)$

(2)　$x^2-8x+16$

$=x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2$

$=(x-4)^2$

(3)　$16a^2+24ab+9b^2$

$=(4a)^2+2\cdot 4a\cdot 3b+(3b)^2$

$=(4a+3b)^2$

(4)　$16x^2-81y^2$

$=(4x)^2-(9y)^2$

$=(4x+9y)(4x-9y)$

(5)　$x^2-11x+10$

$=x^2+(-1+10)x+(-1)\cdot(-10)$

$=(x-1)(x-10)$

(6)　$x^2+3xy-54y^2$

$=x^2+3y\cdot x-54y^2$

$=x^2+\{9y+(-6y)\}x+(-6y)\cdot 9y$

$=(x+9y)(x-6y)$

(7)　$10x^2+17x+6$

$=(2x+1)(5x+6)$

$$\begin{array}{ccccr} 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 5 \\ 5 & & 6 & \longrightarrow & 12 \\ \hline & & & & 17 \end{array}$$

(8)　$8x^2-13x-6$

$=(x-2)(8x+3)$

$$\begin{array}{ccccr} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -16 \\ 8 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & -13 \end{array}$$

(9)　$15x^2-22xy+8y^2$

$=15x^2-22y\cdot x+8y^2$

$=(3x-2y)(5x-4y)$

$$\begin{array}{ccccr} 3 & \times & -2y & \longrightarrow & -10y \\ 5 & & -4y & \longrightarrow & -12y \\ \hline & & & & -22y \end{array}$$

(10)　$6x^2+23xy-18y^2$

$=6x^2-23y\cdot x-18y^2$

$=(2x+9y)(3x-2y)$

$$\begin{array}{ccccr} 2 & \times & 9y & \longrightarrow & 27y \\ 3 & & -2y & \longrightarrow & -4y \\ \hline & & & & 23y \end{array}$$

6 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^3-12x^2+18x$

$=2x(x^2-6x+9)$

$=2x(x-3)^2$

(2) ax^2-9ay^2

$=a(x^2-9y^2)$

$=a\{x^2-(3y)^2\}$

$=a(x+3y)(x-3y)$

(3) $x(x-3y)-4y(3y-x)$

$x-3y=A$ とおくと

$x(x-3y)-4y(3y-x)$

$=x(x-3y)+4y(x-3y)$

$=xA+4yA$

$=(x+4y)A$

$=(x+4y)(x-3y)$

(4) $(2x+y)^2+6(2x+y)-7$

$2x+y=A$ とおくと

$(2x+y)^2+6(2x+y)-7$

$=A^2+6A-7$

$=(A+7)(A-1)$

$=(2x+y+7)(2x+y-1)$

(5) $2(x-y)^2+(y-x)-3$

$x-y=A$ とおくと

$2(x-y)^2+(y-x)-3$

$=2(x-y)^2-(x-y)-3$

$=2A^2-A-3$

$=(A+1)(2A-3)$

$=(x-y+1)(2x-2y-3)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & -3 & \longrightarrow & \underline{-3} \\ & & & -1 \end{array}$$

(6) $a^2b-3ab+a+2b-2$

b について整理すると

$a^2b-3ab+a+2b-2$

$=(a^2-3a+2)b+(a-2)$

$=(a-2)(a-1)b+(a-2)$

$=(a-2)\{(a-1)b+1\}$

$=(a-2)(ab-b+1)$

(7) $2x^2+5xy+2y^2-5x-y-3$

x について整理すると

$2x^2+5xy+2y^2-5x-y-3$

$=2x^2+(5y-5)x+(2y^2-y-3)$

$=2x^2+(5y-5)x+(y+1)(2y-3)$

$=\{x+(2y-3)\}\{2x+(y+1)\}$

$=(x+2y-3)(2x+y+1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & -3 & \longrightarrow & \underline{-3} \\ & & & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2y-3 & \longrightarrow & 4y-6 \\ 2 & y+1 & \longrightarrow & \underline{y+1} \\ & & & 5y-5 \end{array}$$

(8) $x^2-y^2+4x+6y-5$

x について整理すると

$x^2-y^2+4x+6y-5$

$=x^2+4x-(y^2-6y+5)$

$=x^2+4x-(y-1)(y-5)$

$=\{x+(y-1)\}\{x-(y-5)\}$

$=(x+y-1)(x-y+5)$