

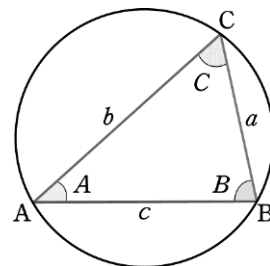
3節 三角形への応用

① 正弦定理

この節では、 $\triangle ABC$ の3つの角の大きさを A, B, C で表し、それらの角の対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。

三角形の3つの頂点を通る円はただ1つ存在する。これを、その三角形の**外接円**という。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次の**正弦定理**が成り立つ。



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

$\triangle ABC$ の3つの角がすべて鋭角である場合について、正弦定理を証明してみよう。

点 B を通る直径 BD を引くと、 $\angle BCD = 90^\circ$ となり、

$\triangle BCD$ は直角三角形であるから

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$$

円周角の定理により

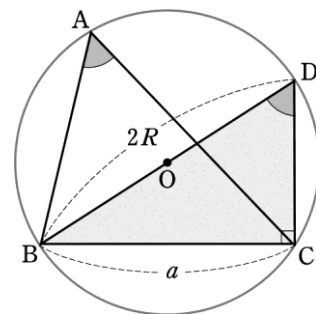
$$A = D$$

よって

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

すなわち

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \dots\dots ①$$



同様にして $\frac{b}{\sin B} = 2R \quad \dots\dots ②$

$\frac{c}{\sin C} = 2R \quad \dots\dots ③$

も成り立つ。

①, ②, ③より, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ。

A, B, C のいずれかが直角または鈍角であるときも, 正弦定理は成り立つ。

三角形の1辺の長さや2つの角の大きさがわかっているとき, 正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 1 正弦定理の利用

$\triangle ABC$ において, $a = 12, A = 45^\circ, B = 60^\circ$ のとき, b を求めよ。また, この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

解 $a = 12, A = 45^\circ, B = 60^\circ$ であるから, 正弦定理により

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

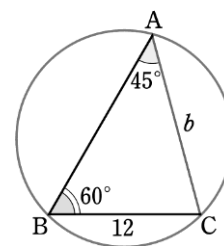
よって $b = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{6} \quad \dots\dots \text{答}$$

また, $\frac{12}{\sin 45^\circ} = 2R$ より

$$R = \frac{12}{2\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$$

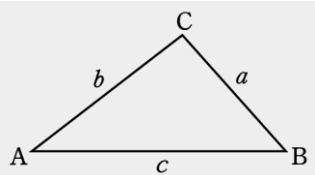
$$= 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{答}$$



問 1 $\triangle ABC$ において, $a = 10, A = 120^\circ, C = 45^\circ$ のとき, c を求めよ。また, この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

② 余弦定理

三角形の1つの角と3辺の長さとの間に、次の余弦定理が成り立つ。

余弦定理	
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$	
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	

証明 $\triangle ABC$ の A, B がともに鋭角であるとする。

右の図のように頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろすと、直角三角形 ACH において

$$CH = b \sin A, \quad AH = b \cos A$$

である。

よって

$$HB = AB - AH = c - b \cos A$$

ここで、直角三角形 BCH において、三平方の定理により

$$BC^2 = HB^2 + CH^2$$

であるから

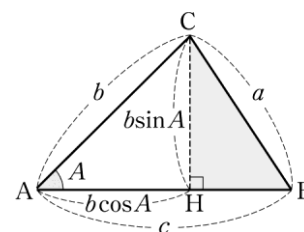
$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \end{aligned}$$

よって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①は、 A, B のどちらかが直角または鈍角のときも成り立つ。

同様にして、他の2つの式も成り立つ。



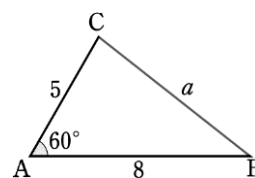
三角形の2辺の長さとその間の角の大きさがわかっているとき、余弦定理を用いて残りの辺の長さを求めることができる。

例題 2 余弦定理の利用[1]

△ABCにおいて、 $b = 5$ 、 $c = 8$ 、 $A = 60^\circ$ のとき、 a を求めよ。

解 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ に、 $b = 5$ 、 $c = 8$ 、 $A = 60^\circ$ を代入して

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 80 \times \frac{1}{2} = 49 \\ a > 0 \text{ より } a &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$



問 2 △ABCにおいて、 $a = 1$ 、 $b = \sqrt{2}$ 、 $C = 135^\circ$ のとき、 c を求めよ。

p.157 Training 12,16(1)、p.158 LevelUp 3

余弦定理は、次のように変形して用いられることもある。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

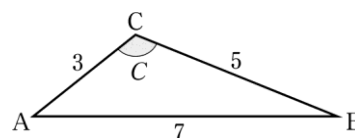
例題 3 余弦定理の利用[2]

△ABCにおいて、 $a = 5$ 、 $b = 3$ 、 $c = 7$ のとき、 C を求めよ。

解 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $C = 120^\circ$



問 3 △ABCにおいて、 $a = 8$ 、 $b = 7$ 、 $c = 3$ のとき、 B を求めよ。

p.157 Training 13,16(2)

三角形の辺と角

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさが与えられているとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めてみよう。

例題 4 三角形の辺と角の決定

$\triangle ABC$ において、 $b = 2$ 、 $c = 1 + \sqrt{3}$ 、 $A = 60^\circ$ のとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

解 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cos 60^\circ \\ &= 4 + (4 + 2\sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = \sqrt{6}$

また、正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

であるから

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$= \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$$

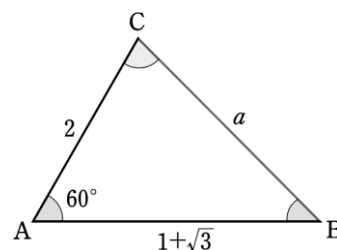
$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A = 60^\circ$ より $B < 120^\circ$ であるから $\text{---} A + B + C = 180^\circ$

$$B = 45^\circ$$

よって $C = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

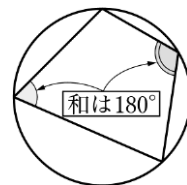
したがって $a = \sqrt{6}$ 、 $B = 45^\circ$ 、 $C = 75^\circ$ ……**答**



問 4 $\triangle ABC$ において、 $a = 2$ 、 $b = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ 、 $C = 45^\circ$ のとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

Challenge 例題 円に内接する四角形

円に内接する四角形の対角の和は 180° であることが知られている。このことを利用して、円に内接する四角形について考えてみよう。



例題

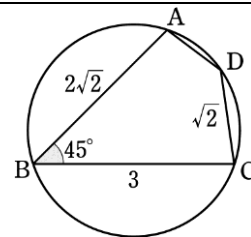
円に内接する四角形 ABCD において

$$AB = 2\sqrt{2}, BC = 3, CD = \sqrt{2}$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

とするとき、次の長さを求めよ。

- (1) 対角線 AC (2) 辺 AD



解

- (1) $\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ \\ &= 8 + 9 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ より } AC = \sqrt{5}$$

- (2) 四角形 ABCD は円に内接しているから

$$D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad \text{—— } B + D = 180^\circ$$

AD = x とする。 $\triangle ACD$ において、余弦定理により

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$\text{整理すると } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = 1$$

$$\text{すなわち } AD = 1$$

問 1

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 5, BC = 4, CD = 4, \angle ABC = 60^\circ$ とするとき、辺 AD の長さを求めよ。

③ 三角形の面積

三角形の面積 S を、2 辺とその間の角によって表してみよう。

$\triangle ABC$ の辺 AB から頂点 C までの高さを h とす

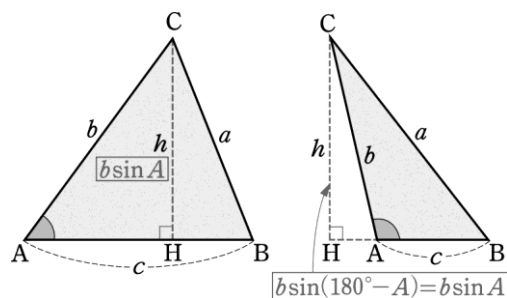
れば、右の図において

$$h = b \sin A$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ch \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A \end{aligned}$$

他の 2 辺とその間の角からも、同様の公式が得られる。



三角形の面積
$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

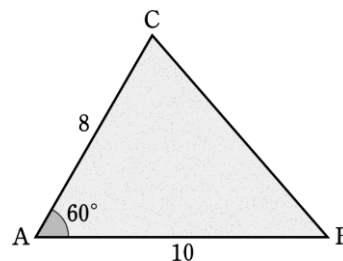
三角形の面積 = $\frac{1}{2} \times (2 \text{ 辺の積}) \times (2 \text{ 辺の間の角のサイン})$

例 1 右の図の $\triangle ABC$ の面積を求めてみよう。

$$b = 8, c = 10, A = 60^\circ$$

であるから、この三角形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \sin 60^\circ \\ &= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \end{aligned}$$



問 5 次の $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1) $b = 2, c = 5, A = 30^\circ$

(2) $a = 7, b = 4, C = 135^\circ$

例題 5 三角形の面積

△ABCにおいて、 $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ であるとき、次の値を求めよ。

- (1) $\cos A$
- (2) $\sin A$
- (3) △ABC の面積 S

解 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{14^2+15^2-13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

(2) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

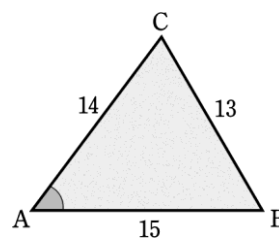
$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\end{aligned}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

(3) 三角形の面積の公式により

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84\end{aligned}$$



問 6 △ABCにおいて、 $a = 11$, $b = 7$, $c = 6$ であるとき、次の値を求めよ。

- (1) $\cos A$
- (2) $\sin A$
- (3) △ABC の面積 S

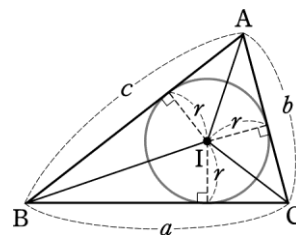
参考 内接円の半径と三角形の面積

△ABC の 3 辺 AB, BC, CA のすべてに接する円はただ 1 つ存在する。これを△ABC の内接円という。

△ABC の内接円の半径を r , 中心を I とすると, △ABC の面積 S は

$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

すなわち
$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$



例 1 △ABCにおいて, $b = 8$, $c = 3$, $A = 60^\circ$ のとき, この三角形の内接円の半径 r を求めてみよう。

余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ \\ &= 64 + 9 - 48 \times \frac{1}{2} = 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = 7$

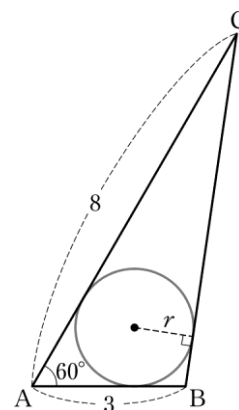
また, △ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \sin 60^\circ \\ &= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ であるから

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(7 + 8 + 3)$$

よって $r = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



問 1 △ABCにおいて, $b = 7$, $c = 8$, $A = 120^\circ$ のとき, この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

4 空間図形の計量

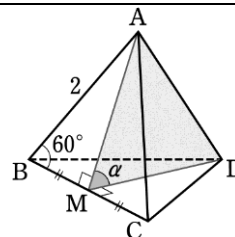
空間図形を扱うとき、その図形に含まれる三角形に着目すると、これまで三角形について学んだことが役立つことがある。

例題 6 空間図形の計量[1]

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において、辺 BC の中点を M とする。

$$\angle AMD = \alpha$$

とするとき、 $\cos \alpha$ の値を求めよ。



解 M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$$\angle ABM = 60^\circ, \angle AMB = 90^\circ$$

である。

よって $AM = AB \sin 60^\circ$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

同様にして $DM = \sqrt{3}$ $\longleftarrow DM = BD \sin 60^\circ$

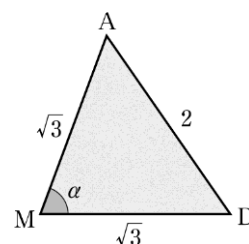
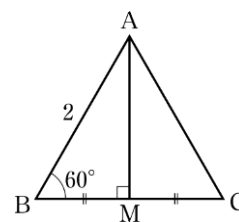
また $AD = 2$

したがって、 $\triangle ADM$ において、余弦定理により

$$\cos \alpha = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot DM}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}$$



問 7 上の例題 6 において、 $\angle ADM = \beta$ とするとき、 $\cos \beta$ の値を求めよ。

例題 7 空間図形の計量[2]

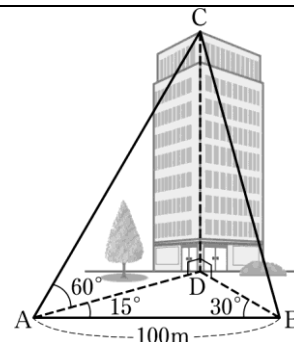
右の図で

$$\angle CAD = 60^\circ, \angle DAB = 15^\circ,$$

$$\angle DBA = 30^\circ, AB = 100\text{m}$$

であるとき、ビルの高さ CD は何 m か。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。

ただし、 $\sqrt{6} = 2.45$ とする。



解 $\triangle ABD$ において

$$\angle ADB = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ$$

であるから、正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{100}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{よって } AD = \frac{100 \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$$

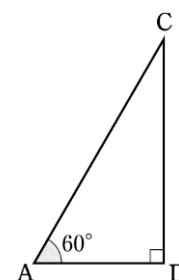
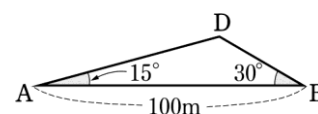
また、 $\triangle CAD$ において

$$\angle CAD = 60^\circ, \angle CDA = 90^\circ$$

であるから

$$CD = AD \tan 60^\circ = 50\sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

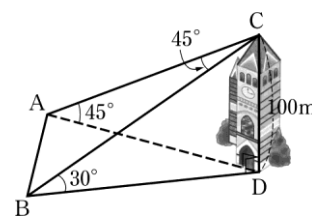
$$= 50\sqrt{6} = 50 \times 2.45 = 122.5 \approx 123 \text{ (m)}$$



問 8 右の図で、塔の高さ CD は 100m である。

$\angle CAD = 45^\circ, \angle CBD = 30^\circ, \angle ACB = 45^\circ$ であるとき、 A, B 間の距離 AB は何 m か。

ただし、 $\sqrt{2} = 1.41$ とする。



Challenge 例題 立方体の断面の面積

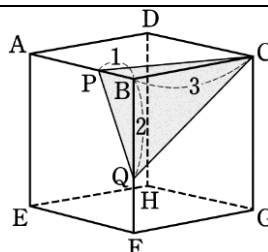
立方体の一部を切りとったときにできる三角形の面積を求めてみよう。

例題

1 辺の長さが 3 の立方体 $ABCD - EFGH$ の辺 AB 上に点 P , 辺 BF 上に点 Q を

$$BP = 1, BQ = 2$$

となるようにとる。このとき, $\triangle CPQ$ の面積 S を求めよ。



解

$\triangle CPQ$ の 3 辺の長さは

$$PQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$CP = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$CQ = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

である。 $\angle CPQ = \theta$ とおくと, 余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{CP^2 + PQ^2 - CQ^2}{2 \cdot CP \cdot PQ}$$

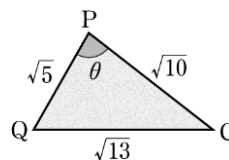
$$= \frac{10 + 5 - 13}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

よって, $\sin \theta > 0$ より

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

したがって, 求める面積 S は

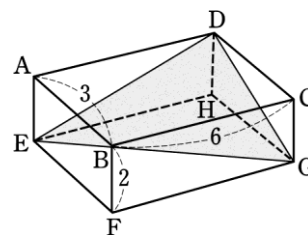
$$S = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PQ \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$



問 1 右の図の直方体 $ABCD - EFGH$ において

$$AB = 3, BC = 6, BF = 2$$

である。このとき, $\triangle DEG$ の面積 S を求めよ。



発展 ヘロンの公式

△ABC の面積 S について、次のヘロンの公式が成り立つ。

ヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

証明 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\sin^2A = b^2c^2(1 - \cos^2A) \\ &= b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A) \quad \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc} \end{aligned}$$

同様にして $1 - \cos A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

$a + b + c = 2s$ とおくと, $-a + b + c = 2(s - a)$,
 $a - b + c = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$ であるから

$$1 + \cos A = \frac{2s(s-a)}{bc}, \quad 1 - \cos A = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$$

これらを①に代入して $4S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$

よって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

例 1 3 辺の長さが 4, 5, 7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

$s = \frac{4+5+7}{2} = 8$ であるから, ヘロンの公式により

$$S = \sqrt{8 \cdot (8-4) \cdot (8-5) \cdot (8-7)} = 4\sqrt{6}$$

問 1 3 辺の長さが 5, 6, 9 である三角形の面積 S を求めよ。

Training

11 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) $a = 5, A = 30^\circ, B = 135^\circ$ のとき、 b と R を求めよ。

(2) $a = \sqrt{2}, R = 1, B = 60^\circ$ のとき、 b と A を求めよ。

p.145

12 $\triangle ABC$ において、次の間に答えよ。

(1) $a = 4, c = \sqrt{3}, B = 30^\circ$ のとき、 b を求めよ。

(2) $b = 7, c = 8, A = 120^\circ$ のとき、 a を求めよ。

p.147

13 $\triangle ABC$ において、次の間に答えよ。

(1) $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ のとき、 C を求めよ。

(2) $a = 3\sqrt{2}, b = 5, c = 1$ のとき、 B を求めよ。

p.147

14 $\triangle ABC$ において、 $a = 2, b = \sqrt{3} - 1, C = 120^\circ$ のとき、残りの辺の長さ
と角の大きさを求めよ。

p.148

15 次の $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1) $a = 3, c = 8, B = 120^\circ$ (2) $a = 9, b = 8, c = 7$

p.150-151

16 右の図の四角形 $ABCD$ において

$$AB = 1, BC = 2, CD = 2,$$

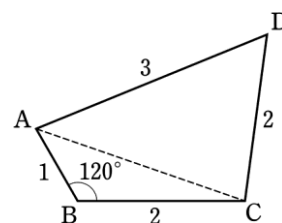
$$DA = 3, B = 120^\circ$$

とすると、次の値を求めよ。

(1) AC

(2) 角 D

(3) 四角形 $ABCD$ の面積



p.147,150

17 右の図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 $ABCD - EFGH$ において、
対角線 AG, BH の交点を O とする。

$$\angle AOB = \alpha$$

とすると、 $\cos \alpha$ の値を求めよ。

p.153

