1節 2次関数とそのグラフ

❶ 関数

自転車に乗って，毎時15kmの速さでx時間進む。そのとき，進む距離を$y$kmとすると

$$y=15x$$

と表される。ただし，$x \geqq 0$である。

このとき，$x=1$とすると$y=15$

$x=3$とすると$y=45$

となる。

このように，2つの変数x，yがあって，xの値を定めると，それに応じてyの値がただ1つだけ定まるとき，yはxの**関数**であるという。

問1 1辺の長さが$x$cmの正方形の面積を$y\mathrm{cm}^2$とするとき，yはxの関数である。yをxの式で表せ。

一般に，yがxの関数であることを

$$y=f(x)$$

のような記号で表す。これを単に，関数$f(x)$ということもある。

また，関数$y=f(x)$において，$x=a$に対応するyの値を$x=a$における**関数の値**といい，$\boldsymbol{f(a)}$で表す。

例1 関数$f(x)=12-4x$について

$$f(1)=12-4\times1=8$$

$$f(-2)=12-4\times(-2)=20$$

$$f(a)=12-4a$$

$\boxed{f(x)=12-4x}$

問2 次の関数$f(x)$について，$f(2)$，$f(-3)$，$f(a)$を求めよ。

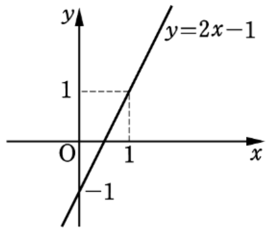
(1) $f(x)=2x-3$

(2) $f(x)=x^2$

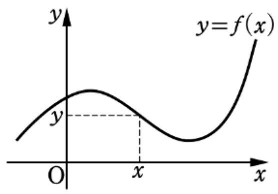
p.96 Training 1

関数のグラフ

1次関数 $y = 2x - 1$
のグラフは，y 軸上の点 $(0,\ -1)$ を通り，傾き2の直線である。このグラフは，$y = 2x - 1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなっている。



一般に，関数 $y = f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなる図形を，**関数 $y = f(x)$ のグラフ**という。



関数の定義域・値域

関数 $y = f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の**定義域**という。とくに断らなければ，定義域は $f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

また，x が定義域のすべての値をとるとき，それに応じて変数 y がとる値の範囲を，この関数の**値域**という。

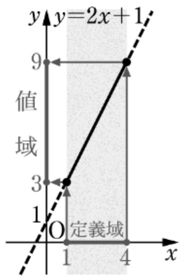
$\boxed{例2}$ 関数 $y = 2x + 1$ のグラフは点 $(0,\ 1)$ を通り，傾き2の直線である。
この関数の定義域をすべての実数としたとき，値域はすべての実数である。
また，この関数の定義域を

$$1 \leqq x \leqq 4$$

としたとき，値域は

$$3 \leqq y \leqq 9$$

である。



$\boxed{問3}$ 次の定義域における関数 $y = -3x + 2$ の値域を求めよ。

(1) すべての実数　　　(2) $-1 \leqq x \leqq 2$

❷　2 次関数

関数　　　$y = 2x^2$

$y = 2x^2 - 16x + 33$

などのように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数**であるという。

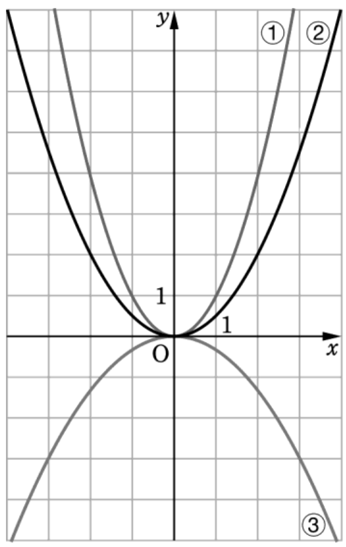
一般に，2 次関数は

$y = ax^2 + bx + c$

の形に表される。ただし，a，b，c は定数で，$a \neq 0$ である。

問 4　周の長さが 12cm の長方形で，横の長さを $x$cm，面積を $y$cm^2 とするとき，y を x の式で表せ。ただし，$0 < x < 6$ とする。

$y = ax^2$ のグラフ



右の図は，2 次関数

$y = x^2$　　　……①

$y = \frac{1}{2}x^2$　　　……②

$y = -\frac{1}{3}x^2$　　　……③

のグラフである。

2 次関数

$y = ax^2$

のグラフの形の曲線を**放物線**という。

一般に，放物線の対称軸を**軸**，軸と放物線の交点を**頂点**という。

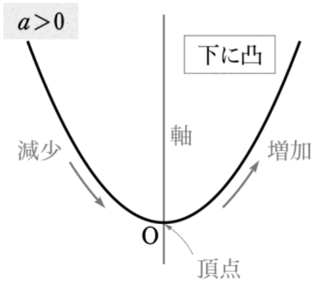
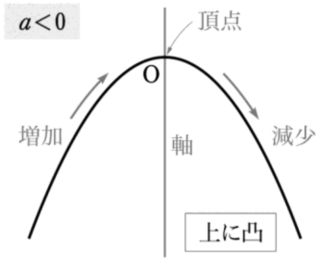
$y = ax^2$ のグラフは軸が y 軸, 頂点が原点である放物線である。

また，この放物線は

$a > 0$ のときは**下に凸**，$a < 0$ のときは**上に凸**

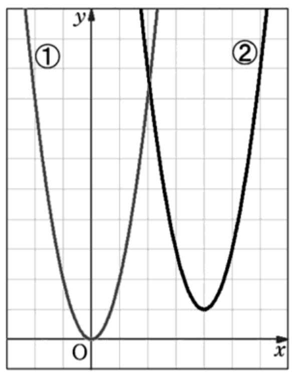
であるという。

一般に，2 次関数 $y=ax^2$ は次のような性質をもつ。

$a>0$ のとき	$a<0$ のとき
・値域は $y \geqq 0$ である。 ・y の値は $x=0$ で減少から増加に変わる。 ・グラフは下に凸の放物線 	・値域は $y \leqq 0$ である。 ・y の値は $x=0$ で増加から減少に変わる。 ・グラフは上に凸の放物線 

問 5　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2$　　　(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2$



右の図は，2 つの 2 次関数

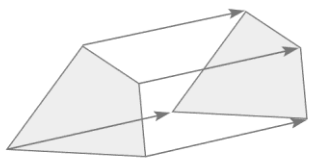
$y=2x^2$　　　……①

$y=2x^2-16x+33$　　……②

のグラフをコンピュータでかいたものである。これらのグラフは形や大きさが同じで，位置がずれているだけである。

一般に，グラフなどの図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を**平行移動**という。②のグラフは①のグラフを平行移動したものである。

ここでは，平行移動を利用して，いろいろな 2 次関数のグラフをかいてみよう。



$y=ax^2+q$ のグラフ

例 3 2 つの 2 次関数 $y=2x^2$ と $y=2x^2+4$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

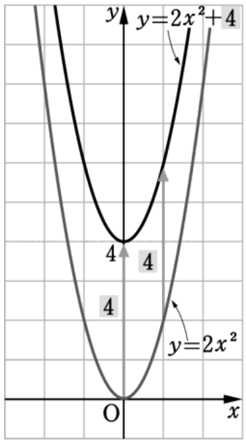
x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	18	8	2	0	2	8	18	$\cdots$
$2x^2+4$	$\cdots$	22	12	6	4	6	12	22	$\cdots$

上の表から，$y=2x^2+4$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線であることがわかる。

この放物線の

軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ 4)$

である。



一般に，$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

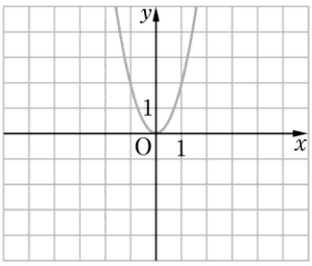
y 軸方向に q だけ平行移動

した放物線である。その**軸は y 軸**，**頂点は点 $(0,\ q)$**である。

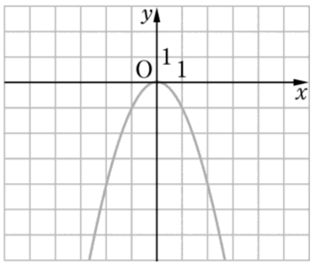
注意 たとえば，y 軸方向に -1 だけ平行移動するというのは，y 軸の負の向きに 1 だけ平行移動するということである。

問 6 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=2x^2-4$



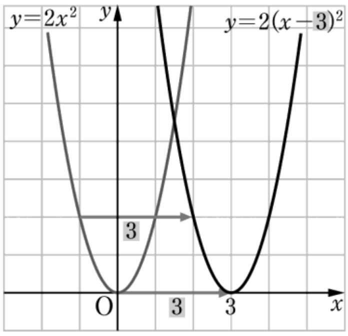
(2) $y=-x^2+2$



$y=a(x-p)^2$のグラフ

例4 2つの2次関数 $y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$ を比べてみよう。これらの関数について，次のような表をつくる。

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$



上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に3だけずれていることがわかる。

したがって，$y=2(x-3)^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に3

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3,\ 0)$ である。

注意 点 $(p,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線を直線 $x=p$ と表す。

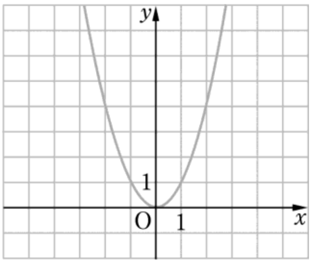
一般に，$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

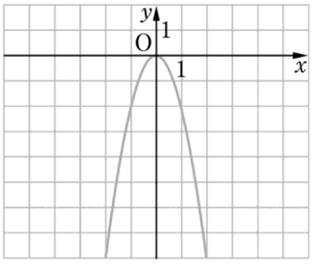
した放物線である。その**軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$** である。

問7 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=(x-2)^2$



(2) $y=-2(x+3)^2$



$y=a(x-p)^2$ のグラフ

例 5　2 次関数

$$y=2(x-3)^2+4 \qquad \cdots\cdots①$$

のグラフは

$$y=2(x-3)^2$$

のグラフを y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線である。

よって，①のグラフは

$$y=2x^2$$

のグラフを

x 軸方向に 3

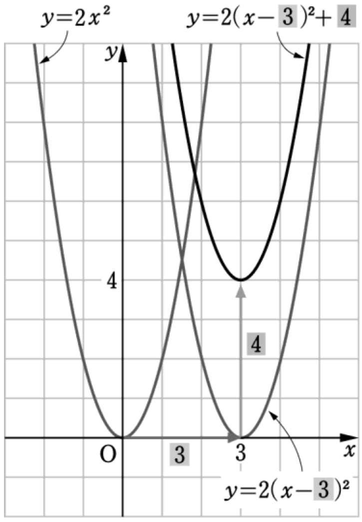
y 軸方向に 4

だけ平行移動した放物線で

軸は直線 $x=3$,

頂点は点 (3，4)

である。



一般に，次のことが成り立つ。

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p

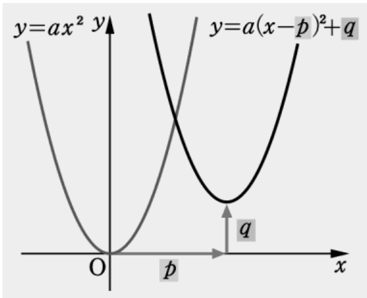
y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線である。

その

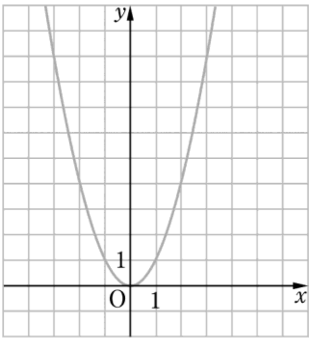
軸は直線 $x=p$，　頂点は点 $(p，q)$

である。

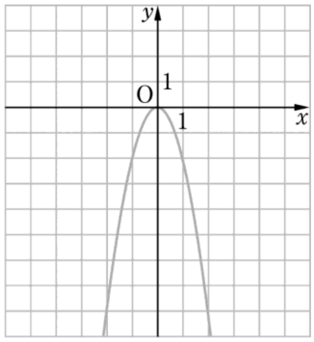


問 8 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=(x-4)^2+2$



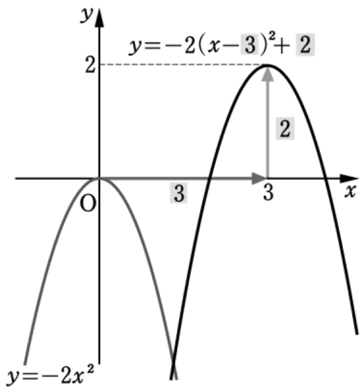
(2) $y=-2(x+2)^2+3$



例 6 2 次関数

$$y=-2x^2$$

のグラフを，頂点が点 $(3,\ 2)$ になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。



求める 2 次関数のグラフは

$$y=-2x^2$$

のグラフを

x 軸方向に 3

y 軸方向に 2

だけ平行移動した放物線である。

よって

$$y=-2(x-3)^2+2$$

問 9 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを，頂点が次の点になるように平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(1) $(4,\ 2)$　(2) $(7,\ -3)$

(3) $(-3,\ 5)$　(4) $(-2,\ -5)$

$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q\text{ の変形}}$

78ページの例5でグラフをかいた2次関数

$$y=2(x-3)^2+4 \qquad \cdots\cdots①$$

の右辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned}&2(x-3)^2+4\\&=2(x^2-6x+9)+4\\&=2x^2-12x+22\end{aligned}$$

となる。

したがって，2次関数

$$y=2x^2-12x+22 \qquad \cdots\cdots②$$

のグラフは，①のグラフと同じものである。

②の形で表された2次関数は，①の形に変形すれば，軸や頂点がわかり，グラフをかくことができる。

$\boxed{\text{例 7}}$ 次の2次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1) $y=x^2-6x$ ←― $x^2-\bigcirc x$

$=(x-3)^2-3^2$ ←― $\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2$

$=(x-3)^2-9$

(2) $y=x^2+8x+3$ ←― $x^2+\bigcirc x+3$

$=(x+4)^2-4^2+3$ ←― $\left(x+\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+3$

$=(x+4)^2-13$

$\boxed{\text{問 10}}$ 次の2次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2-2x$　　(2) $y=x^2+10x$

(3) $y=x^2+6x-2$　　(4) $y=x^2-4x+7$

$\boxed{\text{例 8}}$　次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

$$y=x^2-5x+7 \qquad x^2-\bigcirc x+7$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7 \qquad \left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2+7$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{問 11}}$　次の 2 次関数を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1)　$y=x^2+3x+4$　　(2)　$y=x^2+x-1$

(3)　$y=x^2-7x-5$　　(4)　$y=x^2-9x+21$

$\boxed{\text{例 9}}$　次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう。

(1)　$y=2x^2-12x+19$　　x^2 の係数でくくる

$=2(x^2-6x)+19$　　$2(x^2-\bigcirc x)+19$

$=2\{(x-3)^2-3^2\}+19$　　$2\left\{\left(x-\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\}+19$

$=2(x-3)^2-2\cdot3^2+19$

$=2(x-3)^2+1$

(2)　$y=-3x^2-6x+10$　　x^2 の係数でくくる

$=-3(x^2+2x)+10$　　$-3(x^2+\bigcirc x)+10$

$=-3\{(x+1)^2-1^2\}+10$　　$-3\left\{\left(x+\frac{\bigcirc}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\}+10$

$=-3(x+1)^2+3\cdot1^2+10$

$=-3(x+1)^2+13$

$\boxed{\text{問 12}}$　次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1)　$y=2x^2+4x+1$　　(2)　$y=3x^2-12x-2$

(3)　$y=-x^2+10x+7$　　(4)　$y=-2x^2-6x-5$

このように，x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを**平方完成**という。

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ のグラフ

例 10　2 次関数　$y = 2x^2 - 8x + 5$　……①

のグラフをかいてみよう。

①の式は　$y = 2(x^2 - 4x) + 5 = 2\{(x-2)^2 - 2^2\} + 5$

$= 2(x-2)^2 - 3$

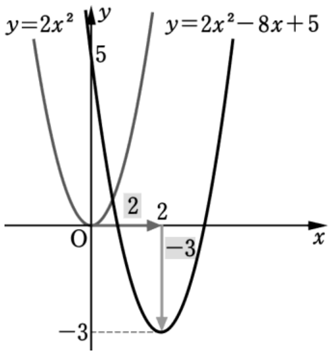
と変形されるから，①のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線である。したがって，①のグラフは

軸が　直線 $x = 2$

頂点が　点 $(2,\ -3)$

の下に凸の放物線である。

また，$x = 0$ のとき $y = 5$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ 5)$ で交わる。よって，グラフは右の図のようになる。



例題 1　2 次関数のグラフ

2 次関数 $y = -2x^2 - 4x + 3$ のグラフをかけ。

解　与えられた 2 次関数は

$y = -2(x^2 + 2x) + 3 = -2\{(x+1)^2 - 1^2\} + 3$

$= -2(x+1)^2 + 5$

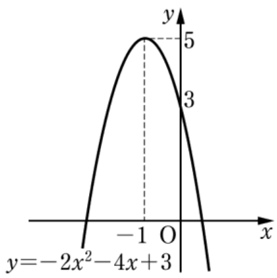
と変形される。よって，そのグラフは

軸が　直線 $x = -1$

頂点が　点 $(-1,\ 5)$

の上に凸の放物線である。また，グラフは y 軸と点 $(0,\ 3)$ で交わる。

よって，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{\text{問 13}}$ 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$ (2) $y = 2x^2 + 4x + 3$

(3) $y = -2x^2 - 6x - 3$ (4) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

p.96 Training 2

一般に，2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

は次のように

$$y = a(x-p)^2 + q$$

の形に変形することができる。

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x^2 \text{ の係数でくくる}$$

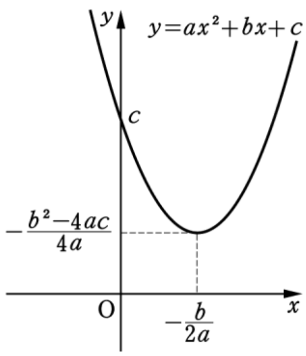
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad a(x^2 + \bigcirc x) + c$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \qquad a\left\{\left(x + \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

よって，そのグラフは $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，右の図のようになる。



この放物線の

軸は　直線 $x = -\frac{b}{2a}$

頂点は　点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

となる。

$\boxed{\text{注意}}$ 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである放物線を，単に，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ともいう。

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は，放物線 $y = ax^2$ を平行移動したものである。したがって，x^2 の係数が等しい 2 つの放物線は，一方を平行移動して他方に重ねることができる。

例題 2　グラフの平行移動

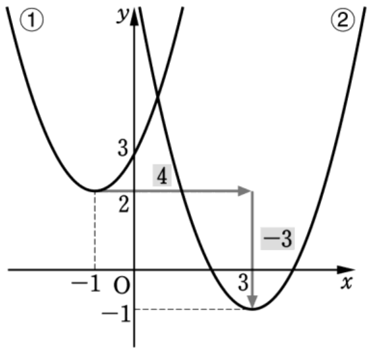
2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ のグラフになるか。

考え方　x^2 の係数がともに 1 であるから，2 つの放物線は平行移動して重ねることができる。よって，頂点の移動について調べるとよい。

解　2 つの 2 次関数を

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \cdots\cdots①$$
$$y = x^2 - 6x + 8 \quad \cdots\cdots②$$

とおく。



①の 2 次関数は

$$y = (x + 1)^2 + 2$$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(-1,\ 2)$ である。

②の 2 次関数は

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(3,\ -1)$ である。

①と②の x^2 の係数は等しいから，①のグラフを

x 軸方向に 4，　y 軸方向に -3　←── x 軸方向　$3-(-1)=4$
y 軸方向　$-1-2=-3$

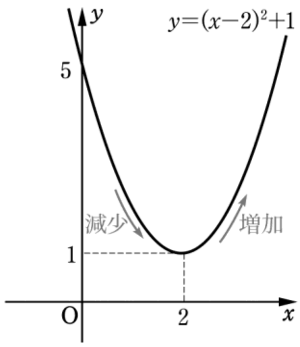
だけ平行移動すれば②のグラフになる。

問 14　2 次関数 $y = x^2 - 8x + 13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = x^2 - 4x + 2$ のグラフになるか。

p.96 Training 3　p.118 Level Up 1

❸ 2次関数の最大・最小

グラフを利用して，2 次関数の最大値・最小値を求めてみよう。

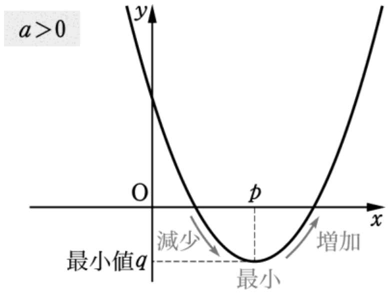


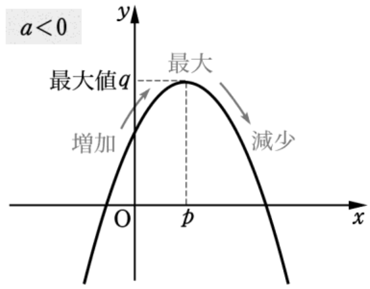
例 11　2 次関数　$y=(x-2)^2+1$
のグラフは直線 $x=2$ を軸とし，点 $(2,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。
したがって, y の値は $x=2$ で減少から増加に変わるから $x=2$ のとき最小となり，この関数の最小値は 1 である。
また， y の値はいくらでも大きくなるから，この関数の最大値はない。

一般に，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大値または最小値は

$$y=a(x-p)^2+q$$

と変形して，この関数のグラフを考えることにより求めることができる。





$\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$ **の最大・最小**
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は $\boldsymbol{a}>0$ ならば，$\boldsymbol{x=p}$ で**最小値** $\boldsymbol{q}$ をとり，最大値はない。 $\boldsymbol{a}<0$ ならば，$\boldsymbol{x=p}$ で**最大値** $\boldsymbol{q}$ をとり，最小値はない。

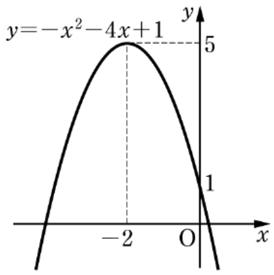
例題 3　2 次関数の最大・最小[1]

2 次関数 $y=-x^2-4x+1$ の最大値または最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

解 与えられた 2 次関数は

$$y=-(x^2+4x)+1$$
$$=-\{(x+2)^2-2^2\}+1$$
$$=-(x+2)^2+5$$

と変形される。よって，この関数は $x=-2$ のとき，最大値 5 をとる。
最小値はない。



問 15　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^2-6x+7$　　(2) $y=-x^2-2x+2$

p.96 Training 4

例題 4　2 次関数の最大・最小[2]

2 次関数 $y=2x^2+4x+k$ は最小値 3 をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

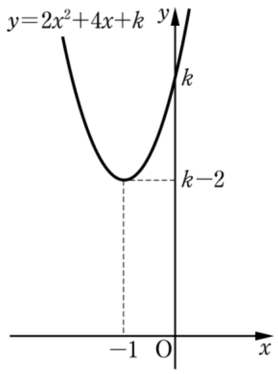
解 与えられた 2 次関数は

$$y=2(x^2+2x)+k$$
$$=2\{(x+1)^2-1^2\}+k$$
$$=2(x+1)^2+k-2$$

と変形される。$x=-1$ のとき，この関数は最小値 $k-2$ をとるから

$$k-2=3$$

よって　　$k=5$



問 16　2 次関数 $y=-2x^2+16x-3k$ は最大値 5 をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。

p.96 Training 5

定義域が限られたときの最大値・最小値

定義域がある範囲に制限されている関数では，関数を表す式の後に(　)を用いて関数の定義域を示すことがある。

例題 5　定義域が限られたときの最大・最小

次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y = x^2 - 2x - 2 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y = -x^2 + 6x - 6 \quad (4 \leqq x \leqq 6)$

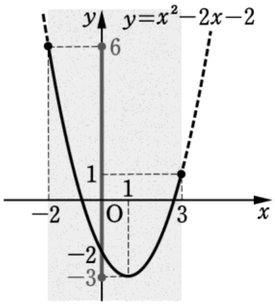
解　(1)　与えられた 2 次関数は

$$y = (x-1)^2 - 3$$

と変形される。$-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。よって

$x = -2$ のとき　最大値 6

$x = 1$ のとき　最小値 -3



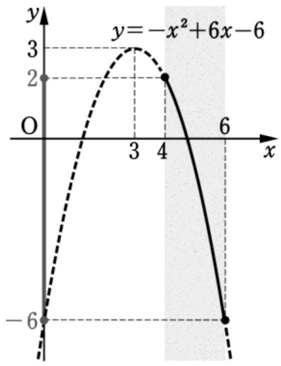
(2)　与えられた 2 次関数は

$$y = -(x-3)^2 + 3$$

と変形される。$4 \leqq x \leqq 6$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。よって

$x = 4$ のとき　最大値 2

$x = 6$ のとき　最小値 -6



問 17　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y = x^2 + 4x + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y = -2x^2 + 4x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

p.96 Training 6

Challenge 例題 定義域が変化するときの最大・最小

定義域が変化するときの2次関数の最小値について調べてみよう。

例題

$a>0$ のとき，2次関数 $y=x^2-4x+5\ (0 \leqq x \leqq a)$ の最小値を求めよ。

考え方 グラフの軸は直線 $x=2$ より，定義域に2を含まない $0<a<2$ の場合と，定義域に2を含む $2 \leqq a$ の場合とに分けて考える。

解 2次関数 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

のグラフは，軸が直線 $x=2$，頂点が点 $(2,\ 1)$ の下に凸の放物線である。

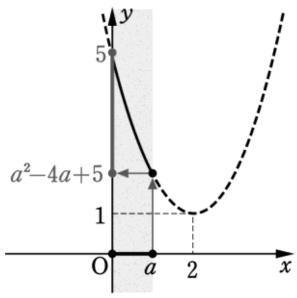
(i) $0<a<2$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

よって

$x=a$ のとき

最小値 a^2-4a+5

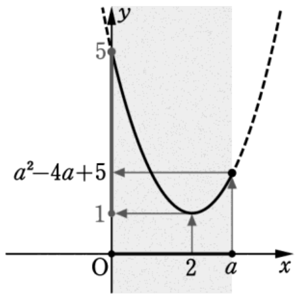


(ii) $2 \leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

よって

$x=2$ のとき 最小値1



(i), (ii)より $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+5 \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & x=2 \text{ で最小値 } 1 \end{cases}$

問1 $a>0$ のとき，2次関数 $y=-x^2+6x+1\ (0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を求めよ。

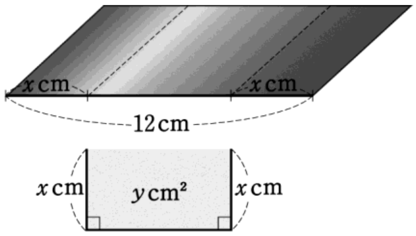
p.118 Level Up 2,3

最大・最小の応用

2 次関数の最大・最小の考えを問題に応用してみよう。

例題 6　最大・最小の応用

幅 12cm の銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cm の溝をつくる。右の図で示した部分の面積を $y\text{cm}^2$ とするとき，y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



解　底の幅は $(12-2x)$cm である。

深さや底の幅は正であるから

$$x>0,\ 12-2x>0$$

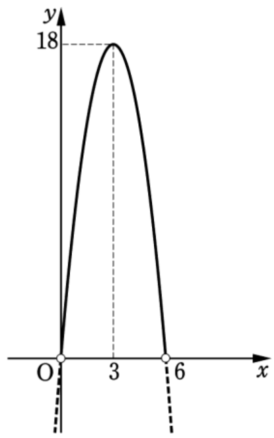
すなわち

$$0<x<6 \qquad \cdots\cdots①$$

面積 $y\text{cm}^2$ は

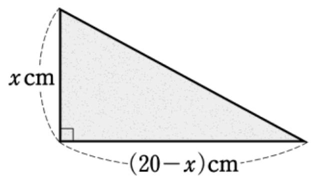
$$\begin{aligned} y &= x(12-2x) \\ &= -2x^2+12x \\ &= -2(x-3)^2+18 \end{aligned}$$

①におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。



よって，$x=3$ のとき，y は最大値 18 をとる。

問 18　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



❹ 2 次関数の決定

2 次関数のグラフについて，いくつかの条件が与えられているとき，その条件を満たす 2 次関数を求めてみよう。

頂点に関する条件が与えられたとき

例題 7　2 次関数の決定－グラフの頂点

グラフが点 $(1,\ -3)$ を頂点とし，点 $(-1,\ 5)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

解　頂点が点 $(1,\ -3)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 - 3 \quad \cdots\cdots ①$$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は点 $(p,\ q)$

と表される。

また，グラフが点 $(-1,\ 5)$ を通るから，①の式において

$x=-1$ のとき $y=5$

である。

よって

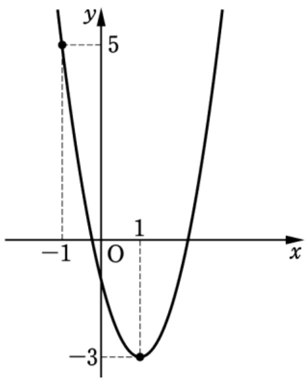
$$5 = a(-1-1)^2 - 3$$

すなわち　$5 = 4a - 3$

ゆえに　$a = 2$

したがって，求める 2 次関数は

$$y = 2(x-1)^2 - 3$$



問 19　グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-1,\ -5)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る。

(2)　頂点が点 $(2,\ -1)$ で，点 $(-1,\ -19)$ を通る。

p.96 Training 7(1)

軸に関する条件が与えられたとき

例題 8 2 次関数の決定ーグラフの軸

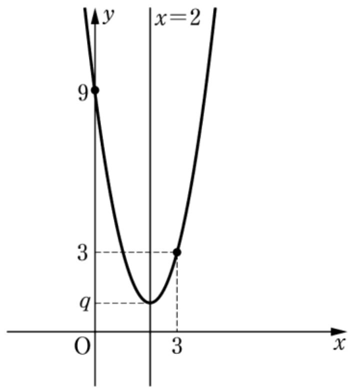
グラフが直線 $x=2$ を軸とし，2 点 $(3,\ 3)$，$(0,\ 9)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めよ。

解 軸が直線 $x=2$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-2)^2+q$$

← $y=a(x-p)^2+q$ の
グラフの軸は直線 $x=p$

と表される。



グラフが点 $(3,\ 3)$ を通るから

$$3=a(3-2)^2+q$$

すなわち $a+q=3$

また，グラフが点 $(0,\ 9)$ を通るから

$$9=a(0-2)^2+q$$

すなわち $4a+q=9$

よって

$$\begin{cases} a+q=3 & \cdots\cdots① \\ 4a+q=9 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②−①より $3a=6$

すなわち $a=2$

①より $q=3-a$

$=3-2=1$

したがって，求める 2 次関数は

$$y=2(x-2)^2+1$$

問 20 グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1) 軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 2)$ を通る。

(2) 頂点の x 座標が 3 で，2 点 $(-2,\ 13)$，$(6,\ -3)$ を通る。

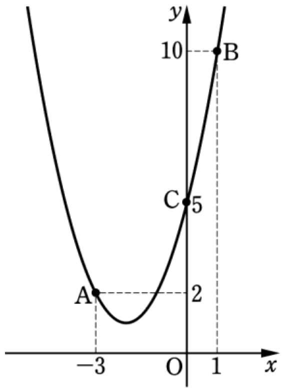
p.96 Training 7(2)

グラフ上の3点が与えられたとき

例題 9　2 次関数の決定－グラフ上の 3 点

グラフが 3 点 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 10)$，$\mathrm{C}(0,\ 5)$ を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

解　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。



グラフが点 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ を通るから

$$2=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$$

さらに，グラフが点 $\mathrm{B}(1,\ 10)$，点 $\mathrm{C}(0,\ 5)$ を通ることから，
同様な式をつくって整理すると

$$\begin{cases} 9a-3b+c=2 & \cdots\cdots① \\ a+b+c=10 & \cdots\cdots② \\ c=5 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

である。まず，①，②の c を消去する。　1 文字を消去する

①，③より　$9a-3b=-3$

すなわち　$3a-b=-1$　……④　　2 文字の連立方程式を導く

②，③より　$a+b=5$　……⑤

④+⑤より　$4a=4$　すなわち　$a=1$

⑤より　$b=5-a=5-1=4$

よって，求める 2 次関数は　$y=x^2+4x+5$

例題 9の解における①，②，③のように，3 文字についての 1 次方程式を連立したものを**連立 3 元 1 次方程式**という。連立 3 元 1 次方程式を解くには，1 つずつ文字を消去していけばよい。

問 21　グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　3 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 7)$ を通る。

(2)　3 点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ -3)$ を通る。

p.96 Training 7(3)　p.118 Level Up 4,5

参考　連立3元1次方程式の解法

連立3元1次方程式を解くには，まず，1つの文字を消去し，他の2つの文字についての連立方程式を解く。さらに，得られた値を代入して，残りの文字の値を求めればよい。

例1　次の連立3元1次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x-2y+z=9 & \cdots\cdots ① \\ 2x-3y+3z=16 & \cdots\cdots ② \\ 3x+2y-2z=-2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

まず，文字zを消去する。

①×3−②より　　$4x-3y=11$　　……④

①×2+③より　　$7x-2y=16$　　……⑤

次に，④，⑤を連立させて文字yを消去する。

④×2−⑤×3より　　$-13x=-26$

よって　　$x=2$　　……⑥

⑥を④に代入してyの値を求めると

$y=-1$　　……⑦

⑥，⑦を①に代入してzの値を求めると

$z=3$

したがって　　$x=2$，$y=-1$，$z=3$

1 連立3元1次方程式
↓ 1文字を消去
2 2文字の連立方程式
↓ 解く
3 2文字の値がわかる
↓ 1の式に代入
4 残りの文字の値がわかる

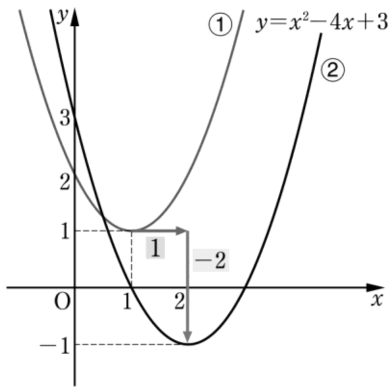
問1　次の連立3元1次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 4x-2y+z=-1 \\ 16x-4y+3z=17 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

問2　グラフが3点$(1,\ 6)$，$(-2,\ -9)$，$(4,\ 3)$を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

参考 グラフの平行移動

例 1 2 次関数 $y=x^2-2x+2$ ……①
のグラフを
x 軸方向に 1
y 軸方向に -2
だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。



①のグラフは
$y=(x-1)^2+1$
より，点 $(1, 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。
この放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，その頂点は点 $(2, -1)$ となる。また，x^2 の係数が 1 であるから，求める 2 次関数は
$y=(x-2)^2-1$ すなわち $y=x^2-4x+3$ ……②

一般に, 関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの関数は，x を $x-p$ に，y を $y-q$ に置き換えた
$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=f(x-p)+q}$$
である。
例 1 において，①で x を $x-1$ に，y を $y+2$ に置き換えると
$$y+2=(x-1)^2-2(x-1)+2 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-4x+3$$
となり，②が得られる。

問 1 2 次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

参考　グラフの対称移動

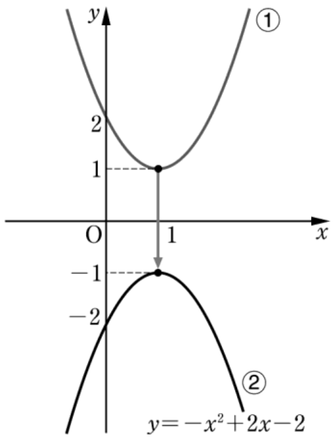
例 1　2 次関数　　$y = x^2 - 2x + 2$　　……①

のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

①のグラフは，点 $(1,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を x 軸に関して対称移動するとその頂点は点 $(1,\ -1)$ となり，上に凸の放物線となる。よって，求める2次関数は

$y = -(x-1)^2 - 1$　すなわち　$y = -x^2 + 2x - 2$　　……②



一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの関数は，y を $-y$ に置き換えた

$$-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{f(x)}$$

である。例 1 において，①で y を $-y$ に置き換えると

$-y = x^2 - 2x + 2$　すなわち　$y = -x^2 + 2x - 2$

となり，②が得られる。

同様に，関数 $y = f(x)$ のグラフを

y 軸に関して対称移動したグラフの関数は　　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(-x)}$

原点に関して対称移動したグラフの関数は　　$-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(-x)}$

すなわち　$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{f(-x)}$

である。

問 1　2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

Training

1　$f(x)=x^2-3x+4$ において，次の値を求めよ。

(1)　$f(2)$　　(2)　$f(a)$　　(3)　$f(a-1)$　　(4)　$f(2-a)$　　p.72

2　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-12x+16$　　(2)　$y=-x^2+8x-15$

(3)　$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$　　(4)　$y=(x+2)(x-4)$　　p.83

3　2 次関数 $y=-2x^2-8x-5$ のグラフをどのように平行移動すれば，2 次関数 $y=-2x^2+4x-3$ のグラフになるか。　p.84

4　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=3x^2+6x+5$　　(2)　$y=-x^2+2x+1$　　p.86

5　2 次関数 $y=-x^2+2kx+7$ は $x=3$ のとき最大値をとる。このとき，定数 k の値を求めよ。また，この関数の最大値を求めよ。　p.86

6　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=-2x^2-4x+1 \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2-4x+5 \quad (6 \leqq x \leqq 8)$　　p.87

7　グラフが次の条件を満たす放物線になるような 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が $(-2,\ 7)$ で，点 $(1,\ -2)$ を通る。

(2)　$x=-1$ を軸とし，2 点 $(-2,\ -3)$，$(1,\ 3)$ を通る。

(3)　3 点 $(-1,\ -8)$，$(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通る。

(4)　x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -3)$ で交わる。　p.90−92