

# 1 節 2 次関数とそのグラフ

## 1 関数

自転車に乗って、毎時 15km の速さで  $x$  時間進む。そのとき、進む距離を  $y$  km とすると

$$y = 15x$$

と表される。ただし、 $x \geq 0$  である。

$$\text{このとき、 } x = 1 \text{ とすると } y = 15$$

$$x = 3 \text{ とすると } y = 45$$

となる。

このように、2 つの変数  $x$ ,  $y$  があって、 $x$  の値を定めると、それに応じて  $y$  の値がただ 1 つだけ定まるとき、 $y$  は  $x$  の **関数** であるという。

**問 1** 1 辺の長さが  $x$  cm の正方形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とするとき、 $y$  は  $x$  の関数である。 $y$  を  $x$  の式で表せ。

一般に、 $y$  が  $x$  の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。これを単に、関数  $f(x)$  ということもある。

また、関数  $y = f(x)$  において、 $x = a$  に対応する  $y$  の値を  $x = a$  における **関数の値** といい、 $f(a)$  で表す。

**例 1** 関数  $f(x) = 12 - 4x$  について

$$f(1) = 12 - 4 \times 1 = 8$$

$$f(-2) = 12 - 4 \times (-2) = 20$$

$$f(a) = 12 - 4a$$

$$f(x) = 12 - 4x$$

**問 2** 次の関数  $f(x)$  について、 $f(2)$ ,  $f(-3)$ ,  $f(a)$  を求めよ。

(1)  $f(x) = 2x - 3$

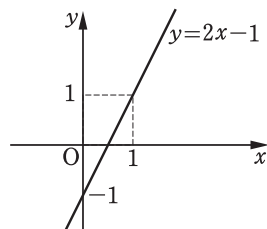
(2)  $f(x) = x^2$

p.96 Training 1

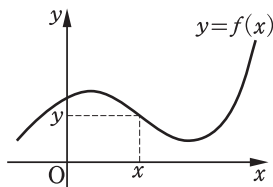
## 関数のグラフ

1次関数  $y = 2x - 1$

5 のグラフは、 $y$  軸上の点  $(0, -1)$  を通り、傾き 2 の直線である。このグラフは、 $y = 2x - 1$  を満たす  $(x, y)$  を座標とする点全体からなっている。



10 一般に、関数  $y = f(x)$  において、 $x$  の値とそれに対応する  $y$  の値の組  $(x, y)$  を座標とする点全体からなる図形を、関数  $y = f(x)$  のグラフ という。



## 関数の定義域・値域

関数  $y = f(x)$  において、変数  $x$  のとり得る値の範囲を、この関数の **定義域** という。とくに断らなければ、定義域は  $f(x)$  を表す式が意味をもつような  $x$  の値全体と考える。

15 また、 $x$  が定義域のすべての値をとるとき、それに応じて変数  $y$  がとる値の範囲を、この関数の **値域** という。

### 例 2

関数  $y = 2x + 1$  のグラフは点  $(0, 1)$  を通り、傾き 2 の直線である。この関数の定義域をすべての実数としたとき、値域はすべての実数である。

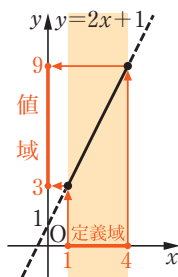
20 また、この関数の定義域を

$$1 \leq x \leq 4$$

としたとき、値域は

$$3 \leq y \leq 9$$

である。



### 問 3

25 次の定義域における関数  $y = -3x + 2$  の値域を求めよ。

(1) すべての実数

(2)  $-1 \leq x \leq 2$

## ② 2次関数

関数  $y = 2x^2$

$$y = 2x^2 - 16x + 33$$

などのように、 $y$ が $x$ の2次式で表されるとき、 $y$ は $x$ の**2次関数**であるという。

5

一般に、2次関数は

$$y = ax^2 + bx + c$$

の形に表される。ただし、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ は定数で、 $a \neq 0$ である。

**問4** 周の長さが12cmの長方形で、横の長さを $x$ cm、面積を $y$ cm<sup>2</sup>とすると、 $y$ を $x$ の式で表せ。ただし、 $0 < x < 6$ とする。

10

### $y = ax^2$ のグラフ

右の図は、2次関数

$$y = x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

のグラフである。

2次関数

$$y = ax^2$$

のグラフの形の曲線を**放物線**という。

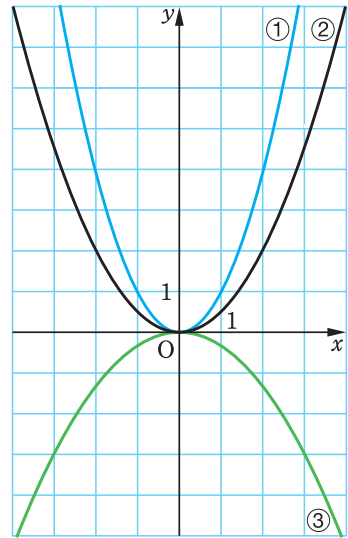
一般に、放物線の対称軸を**軸**、軸と放物線の交点を**頂点**という。

$y = ax^2$  のグラフは軸が $y$ 軸、頂点 that 原点である放物線である。

また、この放物線は

$$a > 0 \text{ のときは下に凸, } a < 0 \text{ のときは上に凸}$$

であるという。



15

20

25

一般に、2次関数  $y = ax^2$  は次のような性質をもつ。

$a > 0$ のとき	$a < 0$ のとき
<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 値域は <math>y \geq 0</math> である。</li> <li>・ <math>y</math> の値は <math>x = 0</math> で減少から増加に変わる。</li> <li>・ グラフは下に凸の放物線</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ 値域は <math>y \leq 0</math> である。</li> <li>・ <math>y</math> の値は <math>x = 0</math> で増加から減少に変わる。</li> <li>・ グラフは上に凸の放物線</li> </ul>

**問5** 次の2次関数のグラフをかけ。

(1)  $y = 2x^2$

(2)  $y = -\frac{1}{2}x^2$

右の図は、2つの2次関数

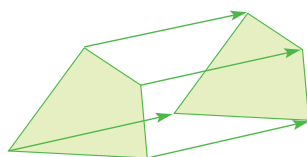
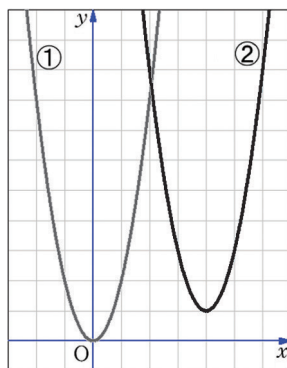
5  $y = 2x^2$  …… ①

$y = 2x^2 - 16x + 33$  …… ②

のグラフをコンピュータでかいたものである。これらのグラフは形や大きさが同じで、位置がずれているだけである。

10 一般に、グラフなどの図形を、一定の方向に、一定の距離だけ動かす移動を **平行移動** という。②のグラフは①のグラフを平行移動したものである。

ここでは、平行移動を利用して、いろいろ  
15 な2次関数のグラフをかいてみよう。



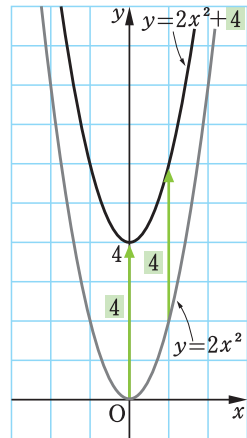
## $y = ax^2 + q$ のグラフ

**例 3** 2つの2次関数  $y = 2x^2$  と  $y = 2x^2 + 4$  を比べてみよう。これらの関数について、次のような表をつくる。

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$2x^2$	...	18	8	2	0	2	8	18	...
$2x^2 + 4$	...	22	12	6	4	6	12	22	...

上の表から、 $y = 2x^2 + 4$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを  $y$  軸方向に 4 だけ平行移動した放物線であることがわかる。この放物線の

軸は  $y$  軸、頂点は点  $(0, 4)$  である。



5

10

一般に、 $y = ax^2 + q$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを

**$y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動**

した放物線である。その軸は  $y$  軸、頂点は点  $(0, q)$  である。

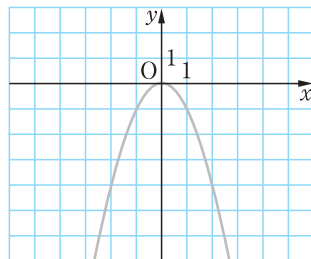
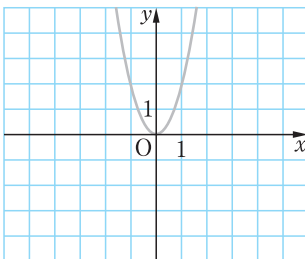
**注意** たとえば、 $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動するというのは、 $y$  軸の負の向きに  $1$  だけ平行移動するということである。

15

**問 6** 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め、そのグラフをかけ。

(1)  $y = 2x^2 - 4$

(2)  $y = -x^2 + 2$



## y = a(x-p)<sup>2</sup> のグラフ

**例 4** 2つの2次関数  $y = 2x^2$  と  $y = 2(x-3)^2$  を比べてみよう。これらの関数について、次のような表をつくる。

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$2x^2$	...	8	2	0	2	8	18	32	50	...
$2(x-3)^2$	...	50	32	18	8	2	0	2	8	...

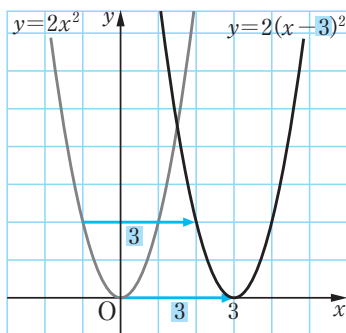
上の表から、同じ  $y$  の値をとる  $x$  の値が右に **3** だけずれていることがわかる。

したがって、 $y = 2(x-3)^2$  のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを

$x$  軸方向に **3**

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の軸は直線  $x = 3$ 、頂点は点  $(3, 0)$  である。



**注意** 点  $(p, 0)$  を通り、 $y$  軸に平行な直線を直線  $x = p$  と表す。

一般に、 $y = a(x-p)^2$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを

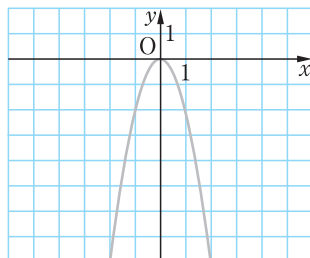
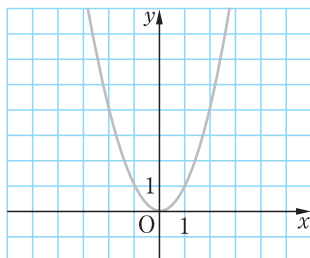
$x$  軸方向に  **$p$**  だけ平行移動

した放物線である。その軸は直線  $x = p$ 、頂点は点  $(p, 0)$  である。

**問 7** 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め、そのグラフをかけ。

(1)  $y = (x-2)^2$

(2)  $y = -2(x+3)^2$



## $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

### 例 5 2 次関数

$$y = 2(x-3)^2 + 4$$

のグラフは

$$y = 2(x-3)^2$$

のグラフを  $y$  軸方向に 4 だけ  
平行移動した放物線である。

よって、① のグラフは

$$y = 2x^2$$

のグラフを

$x$  軸方向に 3

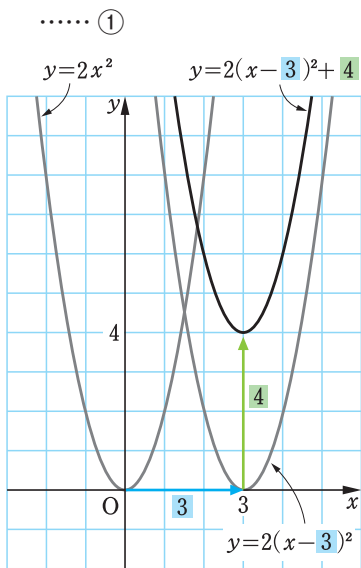
$y$  軸方向に 4

だけ平行移動した放物線で

軸は直線  $x = 3$ ,

頂点は点  $(3, 4)$

である。



一般に、次のことが成り立つ。

## $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

$y = a(x-p)^2 + q$  のグラフは、  
 $y = ax^2$  のグラフを

$x$  軸方向に  $p$

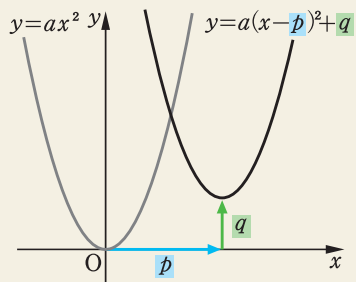
$y$  軸方向に  $q$

だけ平行移動した放物線である。

その

軸は直線  $x = p$ , 頂点は点  $(p, q)$

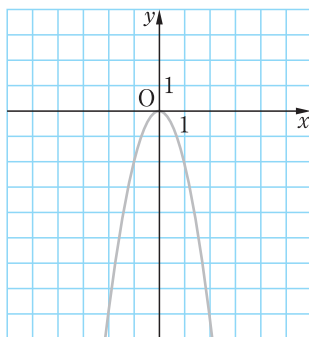
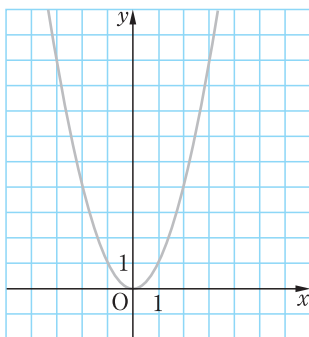
である。



問 8 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め、そのグラフをかけ。

(1)  $y = (x-4)^2 + 2$

(2)  $y = -2(x+2)^2 + 3$



例 6 2次関数

$$y = -2x^2$$

のグラフを、頂点が点(3, 2)になるように平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めてみよう。

求める2次関数のグラフは

$$y = -2x^2$$

のグラフを

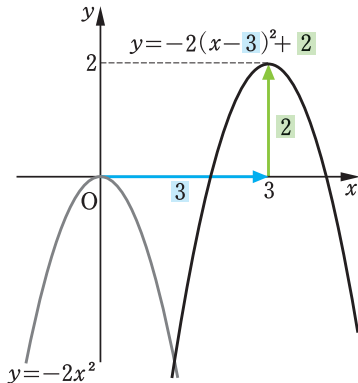
$x$  軸方向に 3

$y$  軸方向に 2

だけ平行移動した放物線である。

よって

$$y = -2(x-3)^2 + 2$$



問 9 2次関数  $y = 2x^2$  のグラフを、頂点が次の点になるように平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

(1) (4, 2)

(2) (7, -3)

(3) (-3, 5)

(4) (-2, -5)



## $ax^2+bx+c = a(x-p)^2+q$ の変形

78 ページの例 5 でグラフをかいた 2 次関数

$$y = 2(x-3)^2 + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の右辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned} & 2(x-3)^2 + 4 && 5 \\ & = 2(x^2 - 6x + 9) + 4 \\ & = 2x^2 - 12x + 22 \end{aligned}$$

となる。

したがって、2 次関数

$$y = 2x^2 - 12x + 22 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad 10$$

のグラフは、 $\textcircled{1}$  のグラフと同じものである。

$\textcircled{2}$  の形で表された 2 次関数は、 $\textcircled{1}$  の形に変形すれば、軸や頂点がわかり、グラフをかくことができる。

**例 7** 次の 2 次関数を  $y = (x-p)^2 + q$  の形に変形してみよう。

$\begin{aligned} (1) \quad y &= x^2 - 6x \\ &= (x - \underset{\substack{\swarrow \\ \text{(6の半分)}}}{3})^2 - 3^2 \\ &= (x - 3)^2 - 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \text{---} x^2 - \bigcirc x \\ & \text{---} \left(x - \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2 \end{aligned}$	15
$\begin{aligned} (2) \quad y &= x^2 + 8x + 3 \\ &= (x + \underset{\substack{\swarrow \\ \text{(8の半分)}}}{4})^2 - 4^2 + 3 \\ &= (x + 4)^2 - 13 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \text{---} x^2 + \bigcirc x + 3 \\ & \text{---} \left(x + \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$	20

**問 10** 次の 2 次関数を  $y = (x-p)^2 + q$  の形に変形せよ。

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| (1) $y = x^2 - 2x$     | (2) $y = x^2 + 10x$    |
| (3) $y = x^2 + 6x - 2$ | (4) $y = x^2 - 4x + 7$ |

**例 8** 次の2次関数を  $y = (x-p)^2 + q$  の形に変形してみよう。

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 5x + 7 && \text{—— } x^2 - \bigcirc x + 7 \\
 &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7 && \text{—— } \left(x - \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2 + 7 \\
 &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(5の半分)

5 **問 11** 次の2次関数を  $y = (x-p)^2 + q$  の形に変形せよ。

- (1)  $y = x^2 + 3x + 4$                       (2)  $y = x^2 + x - 1$   
 (3)  $y = x^2 - 7x - 5$                       (4)  $y = x^2 - 9x + 21$

**例 9** 次の2次関数を  $y = a(x-p)^2 + q$  の形に変形してみよう。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= 2x^2 - 12x + 19 && \text{—— } x^2 \text{の係数で<small>く</small>くる} \\
 &= 2(x^2 - 6x) + 19 && \text{—— } 2(x^2 - \bigcirc x) + 19 \\
 &= 2\{(x-3)^2 - 3^2\} + 19 && \text{—— } 2\left\{\left(x - \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\} + 19 \\
 &= 2(x-3)^2 - 2 \cdot 3^2 + 19 \\
 &= 2(x-3)^2 + 1 \\
 (2) \quad y &= -3x^2 - 6x + 10 && \text{—— } x^2 \text{の係数で<small>く</small>くる} \\
 &= -3(x^2 + 2x) + 10 && \text{—— } -3(x^2 + \bigcirc x) + 10 \\
 &= -3\{(x+1)^2 - 1^2\} + 10 && \text{—— } -3\left\{\left(x + \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\} + 10 \\
 &= -3(x+1)^2 + 3 \cdot 1^2 + 10 \\
 &= -3(x+1)^2 + 13
 \end{aligned}$$

20 **問 12** 次の2次関数を  $y = a(x-p)^2 + q$  の形に変形せよ。

- (1)  $y = 2x^2 + 4x + 1$                       (2)  $y = 3x^2 - 12x - 2$   
 (3)  $y = -x^2 + 10x + 7$                       (4)  $y = -2x^2 - 6x - 5$

このように、 $x$ の2次式  $ax^2 + bx + c$  を  $a(x-p)^2 + q$  の形に変形することを **平方完成** という。

## $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

例 10

2次関数  $y = 2x^2 - 8x + 5$  …… ①

のグラフをかいてみよう。

$$\begin{aligned} \text{①の式は } y &= 2(x^2 - 4x) + 5 = 2\{(x-2)^2 - 2^2\} + 5 \\ &= 2(x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

と変形されるから、①のグラフは、 $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に 2、 $y$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動した放物線である。

したがって、①のグラフは

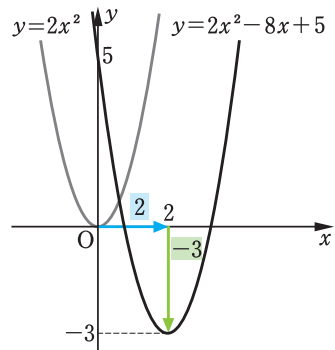
軸が 直線  $x = 2$

頂点が 点  $(2, -3)$

の下に凸の放物線である。

また、 $x = 0$  のとき  $y = 5$  であるから、グラフは  $y$  軸と点  $(0, 5)$

で交わる。よって、グラフは右の図のようになる。



例題

2次関数のグラフ

1

2次関数  $y = -2x^2 - 4x + 3$  のグラフをかけ。

解

与えられた 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2 + 2x) + 3 = -2\{(x+1)^2 - 1^2\} + 3 \\ &= -2(x+1)^2 + 5 \end{aligned}$$

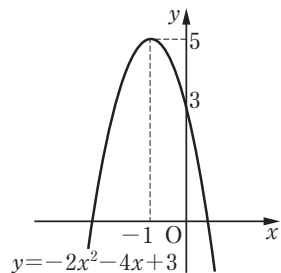
と変形される。よって、そのグラフは

軸が 直線  $x = -1$

頂点が 点  $(-1, 5)$

の上に凸の放物線である。また、グラフは  $y$  軸と点  $(0, 3)$  で交わる。

よって、グラフは右の図のようになる。



**問 13** 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め、そのグラフをかけ。

(1)  $y = x^2 - 4x + 3$

(2)  $y = 2x^2 + 4x + 3$

(3)  $y = -2x^2 - 6x - 3$

(4)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

p.96 Training 2

5 一般に、2次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

は次のように

$$y = a(x-p)^2 + q$$

の形に変形することができる。

10

$$y = ax^2 + bx + c$$

┌  $x^2$ の係数でくくる

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

──  $a(x^2 + \bigcirc x) + c$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c$$

──  $a\left\{\left(x + \frac{\bigcirc}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bigcirc}{2}\right)^2\right\} + c$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

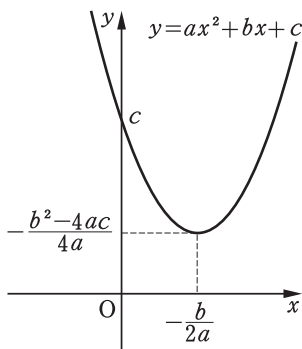
15 よって、そのグラフは  $y = ax^2$  のグラフを平行移動した放物線で、右の図のようになる。

この放物線の

軸は 直線  $x = -\frac{b}{2a}$

20

頂点は 点  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$



となる。

**注意** 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフである放物線を、単に、放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ともいう。

放物線  $y = ax^2 + bx + c$  は、放物線  $y = ax^2$  を平行移動したものである。したがって、 $x^2$  の係数が等しい2つの放物線は、一方を平行移動して他方に重ねることができる。

**例題**

グラフの平行移動

**2** 2次関数  $y = x^2 + 2x + 3$  のグラフをどのように平行移動すると、2次関数  $y = x^2 - 6x + 8$  のグラフになるか。

**考え方**  $x^2$  の係数がともに1であるから、2つの放物線は平行移動して重ねることができる。よって、頂点の移動について調べるとよい。

**解** 2つの2次関数を

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$y = x^2 - 6x + 8 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

とおく。

①の2次関数は

$$y = (x + 1)^2 + 2$$

と変形できるから、グラフの頂点は点  $(-1, 2)$  である。

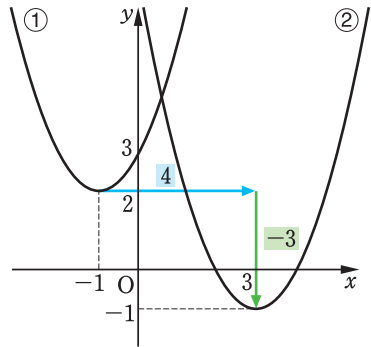
②の2次関数は

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

と変形できるから、グラフの頂点は点  $(3, -1)$  である。

①と②の  $x^2$  の係数は等しいから、①のグラフを

$x$  軸方向に4、 $y$  軸方向に-3 だけ平行移動すれば②のグラフになる。



**問14** 2次関数  $y = x^2 - 8x + 13$  のグラフをどのように平行移動すると、2次関数  $y = x^2 - 4x + 2$  のグラフになるか。

### ③ 2次関数の最大・最小

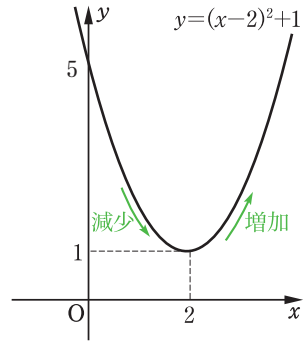
グラフを利用して、2次関数の最大値・最小値を求めてみよう。

#### 例 11

2次関数  $y = (x-2)^2 + 1$  のグラフは直線  $x = 2$  を軸とし、点  $(2, 1)$  を頂点とする下に凸の放物線である。

したがって、 $y$  の値は  $x = 2$  で減少から増加に変わるから  $x = 2$  のとき最小となり、この関数の最小値は1である。

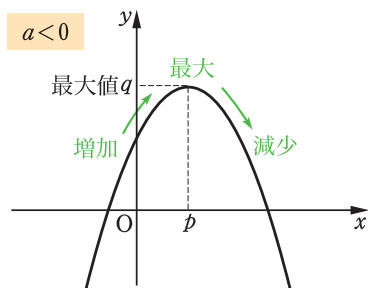
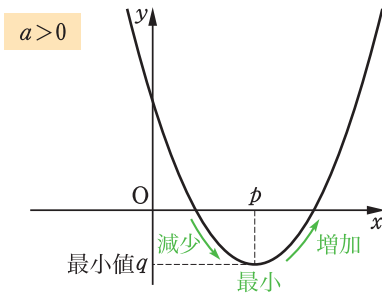
また、 $y$  の値はいくらでも大きくなるから、この関数の最大値はない。



一般に、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の最大値または最小値は

$$y = a(x-p)^2 + q$$

と変形して、この関数のグラフを考えることにより求めることができる。



#### $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小

2次関数  $y = a(x-p)^2 + q$  は

$a > 0$  ならば、 $x = p$  で最小値  $q$  をとり、最大値はない。

$a < 0$  ならば、 $x = p$  で最大値  $q$  をとり、最小値はない。

例題

2次関数の最大・最小 [1]

3 2次関数  $y = -x^2 - 4x + 1$  の最大値または最小値を求めよ。  
また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

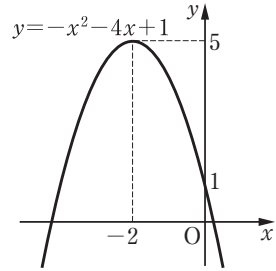
解

与えられた2次関数は

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 + 4x) + 1 \\ &= -\{(x+2)^2 - 2^2\} + 1 \\ &= -(x+2)^2 + 5 \end{aligned}$$

と変形される。よって、この関数は  
 $x = -2$  のとき、最大値5をとる。

最小値はない。



5

10

問15 次の2次関数の最大値または最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

(1)  $y = x^2 - 6x + 7$       (2)  $y = -x^2 - 2x + 2$       [p.96 Training 4](#)

例題

2次関数の最大・最小 [2]

4 2次関数  $y = 2x^2 + 4x + k$  は最小値3をとる。このとき、定数  $k$  の値を求めよ。

解

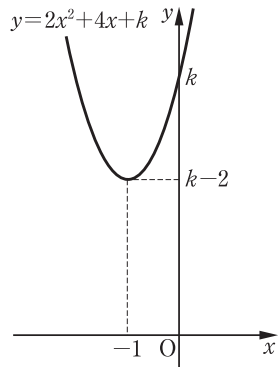
与えられた2次関数は

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 2x) + k \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1^2\} + k \\ &= 2(x+1)^2 + k - 2 \end{aligned}$$

と変形される。 $x = -1$  のとき、この関数は最小値  $k - 2$  をとるから

$$k - 2 = 3$$

よって  $k = 5$



15

20

問16 2次関数  $y = -2x^2 + 16x - 3k$  は最大値5をとる。このとき、定数  $k$  の値を求めよ。

[p.96 Training 5](#)

25

## 定義域が限られたときの最大値・最小値

定義域がある範囲に制限されている関数では、関数を表す式の後に( )を用いて関数の定義域を示すことがある。

### 例題

定義域が限られたときの最大・最小

5 **5** 次の2次関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの $x$ の値を求めよ。

(1)  $y = x^2 - 2x - 2$  ( $-2 \leq x \leq 3$ )

(2)  $y = -x^2 + 6x - 6$  ( $4 \leq x \leq 6$ )

10 **解** (1) 与えられた2次関数は

$$y = (x - 1)^2 - 3$$

と変形される。 $-2 \leq x \leq 3$ におけるこの関数のグラフは、右の図の放物線の実線部分である。よって

$x = -2$  のとき 最大値 6

$x = 1$  のとき 最小値 -3

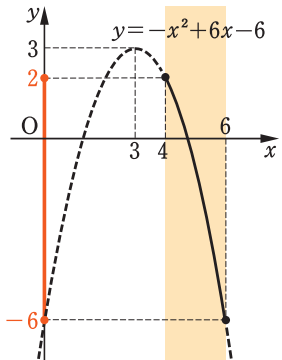
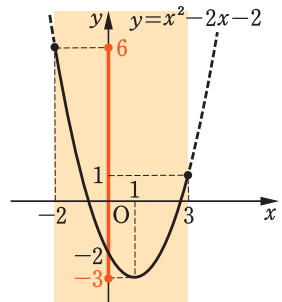
15 (2) 与えられた2次関数は

$$y = -(x - 3)^2 + 3$$

と変形される。 $4 \leq x \leq 6$ におけるこの関数のグラフは、右の図の放物線の実線部分である。よって

$x = 4$  のとき 最大値 2

$x = 6$  のとき 最小値 -6



25 **問17** 次の2次関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの $x$ の値を求めよ。

(1)  $y = x^2 + 4x + 3$  ( $-1 \leq x \leq 3$ )

(2)  $y = -2x^2 + 4x + 3$  ( $-2 \leq x \leq 2$ )

p.96 Training 6



# Challenge チャレンジ 例題 定義域が変化するときの最大・最小

定義域が変化するときの2次関数の最小値について調べてみよう。

## 例題

$a > 0$  のとき、2次関数  $y = x^2 - 4x + 5$  ( $0 \leq x \leq a$ ) の最小値を求めよ。

5

**考え方** グラフの軸は直線  $x = 2$  より、定義域に2を含まない  $0 < a < 2$  の場合と、定義域に2を含む  $2 \leq a$  の場合とに分けて考える。

**解** 2次関数  $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$

のグラフは、軸が直線  $x = 2$ 、頂点が点  $(2, 1)$  の下に凸の放物線である。

10

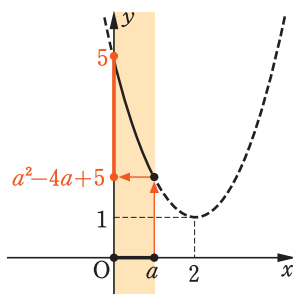
(i)  $0 < a < 2$  のとき

$0 \leq x \leq a$  におけるこの関数のグラフは、右の図の放物線の実線部分である。

よって

$x = a$  のとき

最小値  $a^2 - 4a + 5$



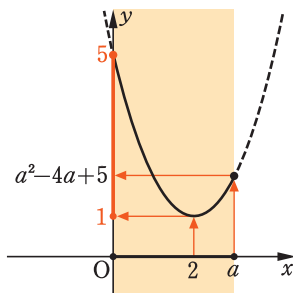
15

(ii)  $2 \leq a$  のとき

$0 \leq x \leq a$  におけるこの関数のグラフは、右の図の放物線の実線部分である。

よって

$x = 2$  のとき 最小値 1



20

(i), (ii) より  $\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & x = a \text{ で最小値 } a^2 - 4a + 5 \\ 2 \leq a \text{ のとき} & x = 2 \text{ で最小値 } 1 \end{cases}$

**問1**  $a > 0$  のとき、2次関数  $y = -x^2 + 6x + 1$  ( $0 \leq x \leq a$ ) の最大値を求めよ。

25

p.118 LevelUp 2.3

## 最大・最小の応用

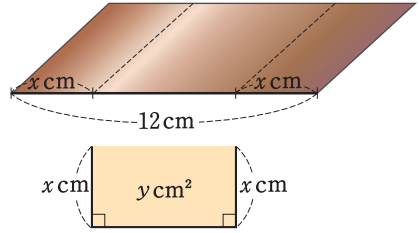
2次関数の最大・最小の考えを問題に応用してみよう。

### 例題

最大・最小の応用

6

幅 12 cm の銅板を、断面が右の図の形になるように折り曲げて、深さ  $x$  cm の溝をつくる。右の図で示した部分の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とするとき、 $y$  の最大値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。



5

10

解

底の幅は  $(12 - 2x)$  cm である。

深さや底の幅は正であるから

$$x > 0, 12 - 2x > 0$$

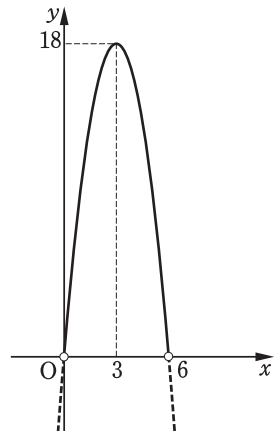
すなわち

$$0 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

面積  $y$  cm<sup>2</sup> は

$$\begin{aligned} y &= x(12 - 2x) \\ &= -2x^2 + 12x \\ &= -2(x - 3)^2 + 18 \end{aligned}$$

①におけるこの関数のグラフは、右の図の放物線の実線部分である。

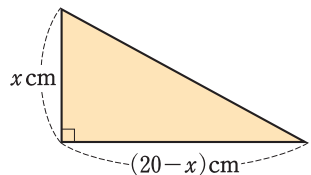


20

よって、 $x = 3$  のとき、 $y$  は最大値 18 をとる。

### 問 18

直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20 cm であるような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



## 4 2次関数の決定

2次関数のグラフについて、いくつかの条件が与えられているとき、その条件を満たす2次関数を求めてみよう。

### 頂点に関する条件が与えられたとき

#### 例題

#### 2次関数の決定—グラフの頂点

7 グラフが点(1, -3)を頂点とし、点(-1, 5)を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

解 頂点が点(1, -3)であるから、  
求める2次関数は

$$y = a(x-1)^2 - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表される。

また、グラフが点(-1, 5)を通るから、 $\textcircled{1}$ の式において

$$x = -1 \text{ のとき } y = 5$$

である。

よって

$$5 = a(-1-1)^2 - 3$$

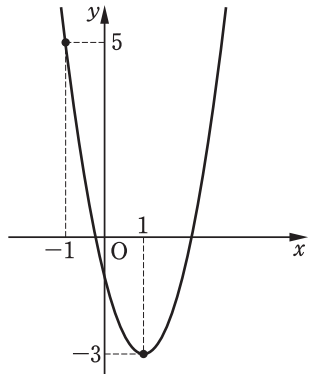
$$\text{すなわち } 5 = 4a - 3$$

$$\text{ゆえに } a = 2$$

したがって、求める2次関数は

$$y = 2(x-1)^2 - 3$$

——  $y = a(x-p)^2 + q$  の  
グラフの頂点は点(p, q)



問19 グラフが次の条件を満たす放物線になるような2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点(-1, -5)で、点(1, 11)を通る。

(2) 頂点が点(2, -1)で、点(-1, -19)を通る。

p.96 Training 7(1)

## 軸に関する条件が与えられたとき

### 例題

### 2次関数の決定—グラフの軸

8 グラフが直線  $x = 2$  を軸とし、2点  $(3, 3)$ 、 $(0, 9)$  を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

5 解 軸が直線  $x = 2$  であるから、求める2次関数は

$$y = a(x-2)^2 + q \quad \text{—— } y = a(x-p)^2 + q \text{ の}$$

グラフの軸は直線  $x = p$

と表される。

グラフが点  $(3, 3)$  を通るから

$$3 = a(3-2)^2 + q$$

すなわち  $a + q = 3$

また、グラフが点  $(0, 9)$  を通るから

$$9 = a(0-2)^2 + q$$

すなわち  $4a + q = 9$

よって

$$\begin{cases} a + q = 3 & \cdots \cdots \text{①} \\ 4a + q = 9 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

② - ① より  $3a = 6$

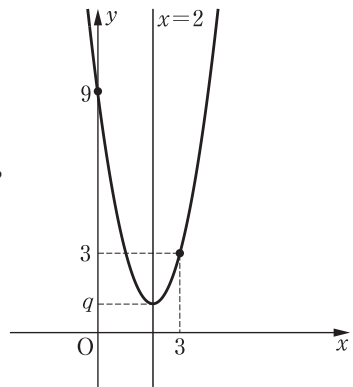
すなわち  $a = 2$

① より  $q = 3 - a$

$$= 3 - 2 = 1$$

したがって、求める2次関数は

$$y = 2(x-2)^2 + 1$$



### 問20

グラフが次の条件を満たす放物線になるような2次関数を求めよ。

(1) 軸が直線  $x = -2$  で、2点  $(1, -1)$ 、 $(-2, 2)$  を通る。

(2) 頂点の  $x$  座標が3で、2点  $(-2, 13)$ 、 $(6, -3)$  を通る。

p.96 Training 7(2)

## グラフ上の3点が与えられたとき

### 例題

### 2次関数の決定—グラフ上の3点

9 グラフが3点  $A(-3, 2)$ ,  $B(1, 10)$ ,  $C(0, 5)$  を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

解

求める2次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  とする。

グラフが点  $A(-3, 2)$  を通るから

$$2 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$$

さらに、グラフが点  $B(1, 10)$ ,

点  $C(0, 5)$  を通ることから、同様な式をつくって整理すると

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a + b + c = 10 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c = 5 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。まず、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  の  $c$  を消去する。

—— 1文字を消去する

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より } 9a - 3b = -3$$

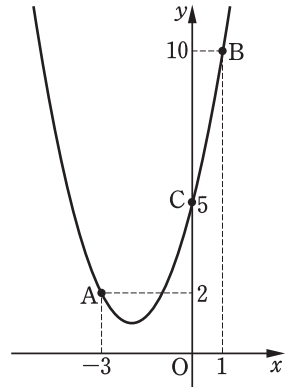
$$\text{すなわち } 3a - b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } a + b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \text{ より } 4a = 4 \quad \text{すなわち } a = 1$$

$$\textcircled{5} \text{ より } b = 5 - a = 5 - 1 = 4$$

$$\text{よって、求める2次関数は } y = x^2 + 4x + 5$$



—— 2文字の連立方程式を導く

例題9の解における $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ のように、3文字についての1次方程式を連立したものを**連立3元1次方程式**という。連立3元1次方程式を解くには、1つずつ文字を消去していけばよい。

問21 グラフが次の条件を満たす放物線になるような2次関数を求めよ。

(1) 3点  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 7)$  を通る。

(2) 3点  $(-2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, -3)$  を通る。

p.96 Training 7(3)、 p.118 LevelUp 4.5、

連立3元1次方程式を解くには、まず、1つの文字を消去し、他の2つの文字についての連立方程式を解く。さらに、得られた値を代入して、残りの文字の値を求めればよい。

5 **例1** 次の連立3元1次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 9 & \cdots \cdots \text{①} \\ 2x - 3y + 3z = 16 & \cdots \cdots \text{②} \\ 3x + 2y - 2z = -2 & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

まず、文字  $z$  を消去する。

10 ①×3−②より  $4x - 3y = 11$   $\cdots \cdots$  ④

①×2+③より  $7x - 2y = 16$   $\cdots \cdots$  ⑤

次に、④、⑤を連立させて文字  $y$  を消去する。

④×2−⑤×3より  $-13x = -26$

よって  $x = 2$   $\cdots \cdots$  ⑥

15 ⑥を④に代入して  $y$  の値を求めると

$y = -1$   $\cdots \cdots$  ⑦

⑥、⑦を①に代入して  $z$  の値を求めると

$z = 3$

20 したがって  $x = 2, y = -1, z = 3$

①連立3元1次方程式  
↓ 1文字を消去  
②2文字の連立方程式  
↓ 解く  
③2文字の値がわかる  
↓ ①の式に代入  
④残りの文字の値がわかる

**問1** 次の連立3元1次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ 4x - 2y + z = -1 \\ 16x - 4y + 3z = 17 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 2x + 7y - 3z = 13 \\ 3x + 8y + 2z = 38 \end{cases}$$

25 **問2** グラフが3点(1, 6), (−2, −9), (4, 3)を通る放物線になるような2次関数を求めよ。

## 例 1

2 次関数  $y = x^2 - 2x + 2$  …… ①

のグラフを

$x$  軸方向に 1

$y$  軸方向に  $-2$

だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよう。

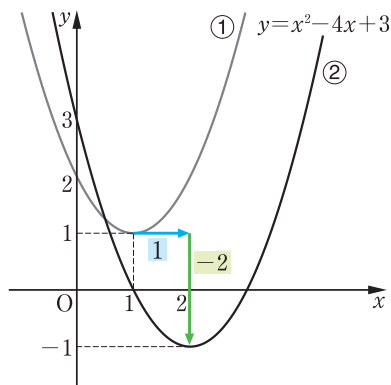
① のグラフは

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

より、点  $(1, 1)$  を頂点とする下に凸の放物線である。

この放物線を  $x$  軸方向に 1、 $y$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動すると、その頂点は点  $(2, -1)$  となる。また、 $x^2$  の係数が 1 であるから、求める 2 次関数は

$$y = (x - 2)^2 - 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{…… ②}$$



5

10

15

20

一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したグラフの関数は、 $x$  を  $x - p$  に、 $y$  を  $y - q$  に置き換えた

$$y - q = f(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = f(x - p) + q$$

である。

例 1 において、① で  $x$  を  $x - 1$  に、 $y$  を  $y + 2$  に置き換えると

$$y + 2 = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 4x + 3$$

となり、② が得られる。

## 問 1

2 次関数  $y = x^2 + 4x + 5$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-3$ 、 $y$  軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

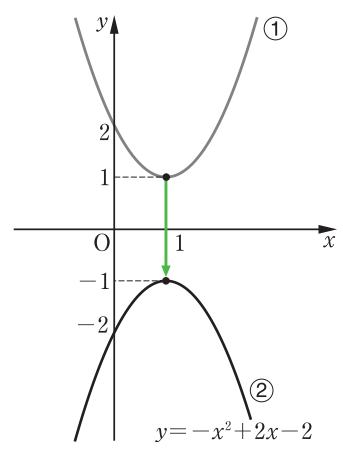
参考

グラフの対称移動

例 1

2次関数  $y = x^2 - 2x + 2$  …… ①

のグラフを  $x$  軸に関して  
 対称移動した放物線をグラフと  
 する 2次関数を求めてみよう。  
 ① のグラフは、点 (1, 1) を頂  
 点とする下に凸の放物線である。  
 この放物線を  $x$  軸に関して対  
 称移動するとその頂点は  
 点 (1, -1) となり、上に凸の  
 放物線となる。よって、求める  
 2次関数は



$$y = -(x-1)^2 - 1 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 2x - 2 \quad \dots\dots \text{②}$$

一般に、関数  $y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したグラフ  
 の関数は、 $y$  を  $-y$  に置き換えた

$$-y = f(x) \quad \text{すなわち} \quad y = -f(x)$$

である。例 1 において、① で  $y$  を  $-y$  に置き換えると

$$-y = x^2 - 2x + 2 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 2x - 2$$

となり、② が得られる。

同様に、関数  $y = f(x)$  のグラフを

$y$  軸に関して対称移動したグラフの関数は  $y = f(-x)$

原点に関して対称移動したグラフの関数は  $-y = f(-x)$

$$\text{すなわち} \quad y = -f(-x)$$

である。

問 1

2次関数  $y = -x^2 - 6x - 2$  のグラフを  $x$  軸、 $y$  軸、原点に関して  
 対称移動した放物線をグラフとする 2次関数をそれぞれ求めよ。



- 1  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  において、次の値を求めよ。  
 (1)  $f(2)$             (2)  $f(a)$             (3)  $f(a-1)$     (4)  $f(2-a)$  p.72
- 2 次の2次関数のグラフをかけ。 5  
 (1)  $y = 2x^2 - 12x + 16$             (2)  $y = -x^2 + 8x - 15$   
 (3)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$             (4)  $y = (x+2)(x-4)$  p.83
- 3 2次関数  $y = -2x^2 - 8x - 5$  のグラフをどのように平行移動すれば、2次関数  $y = -2x^2 + 4x - 3$  のグラフになるか。 p.84
- 4 次の2次関数の最大値または最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。 10  
 (1)  $y = 3x^2 + 6x + 5$             (2)  $y = -x^2 + 2x + 1$  p.86
- 5 2次関数  $y = -x^2 + 2kx + 7$  は  $x = 3$  のとき最大値をとる。このとき、定数  $k$  の値を求めよ。また、この関数の最大値を求めよ。 p.86
- 6 次の2次関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。 15  
 (1)  $y = -2x^2 - 4x + 1$  ( $-2 \leq x \leq 1$ )  
 (2)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$  ( $6 \leq x \leq 8$ ) p.87
- 7 グラフが次の条件を満たす放物線になるような2次関数を求めよ。  
 (1) 頂点が  $(-2, 7)$  で、点  $(1, -2)$  を通る。 20  
 (2)  $x = -1$  を軸とし、2点  $(-2, -3)$ ,  $(1, 3)$  を通る。  
 (3) 3点  $(-1, -8)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$  を通る。  
 (4)  $x$  軸と点  $(-2, 0)$ ,  $(3, 0)$  で交わり、 $y$  軸と点  $(0, -3)$  で交わる。 p.90-92