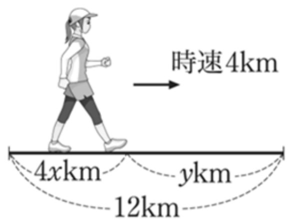
1節 関数とグラフ

1 関数

関数

（教科書 p.72）

例1 家から 12km 離れた場所から，時速 4km で家まで歩いた。出発してから x 時間経過したときの，家までの距離を $y$km とすると



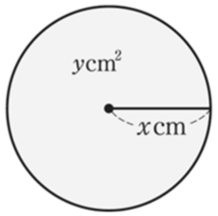
と表される。

ただし，（　　　　　　　　　　）

である。

例2 半径 $x$cm の円があり，その面積を $y\text{cm}^2$ とすると

（　　　　　　　　　）



と表される。

ただし，（　　　　　　　）

である。

このように，2 つの変数 x，y があって，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき，（[1]　　　　　　　　　　　）であるという。

y が x の関数であることを

$y=f(x)$，$y=g(x)$

などと表す。関数において，x の値 a に対応する y の値を $f(a)$ で表し，$f(a)$ を $x=a$ のときの（[2]　　　　　　　　　　　）という。

例3 $f(x)=2x^2-3x+5$ のとき

$f(1)=$

$f(-2)=$

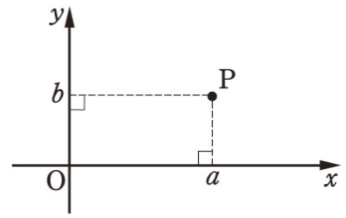
$f(a)=$

問1 $f(x)=2x^2-2$ のとき，$f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(a+1)$ を求めよ。

関数のグラフ

（教科書 p.73）

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点 P の位置は，右の図のように，実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を点 P の（[3]　　　　　）といい，（[4]　　　　　　　）と書く。



座標軸の定められた平面を（[5]　　　　　　　　　）という。

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる。これらを右の図のように，それぞれ（[6]　　　　　　　　），（[7]　　　　　　　　），（[8]　　　　　　　　），（[9]　　　　　　　　）という。ただし，座標軸上の点はどの象限にも含まれないものとする。

問2 次の点はどの象限にあるか。

(1) A$(3,\ -2)$

(2) B$(6,\ 5)$

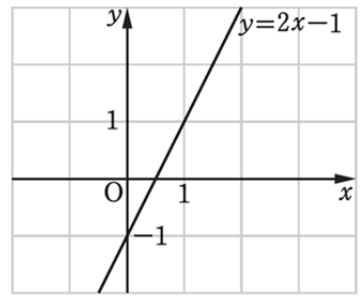
(3) C$(-5,\ -1)$

(4) D$(-3,\ 1)$

１次関数

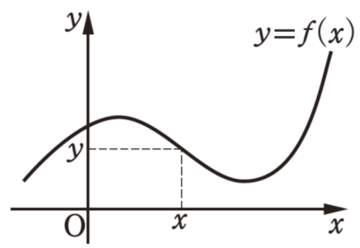
$y=2x-1$

のグラフは，y 軸上の点 $(0,\ -1)$ を通り，傾き 2 の直線である。このグラフは，$y=2x-1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなる図形である。



一般に，関数 $y=f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなる図形を，

（[10]　　　　　　　　　　　　　）という。



関数の定義域・値域

（教科書 p.74）

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の（[11]　　　　　　　　）という。
定義域をはっきり示す必要があるときには

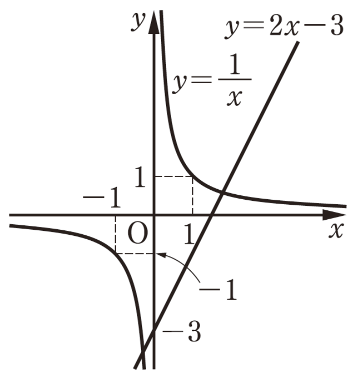
$$y=f(x)\quad (a \leqq x \leqq b)$$

と書くことが多い。

とくに断らないときは，関数 $y=f(x)$ の定義域は，$f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

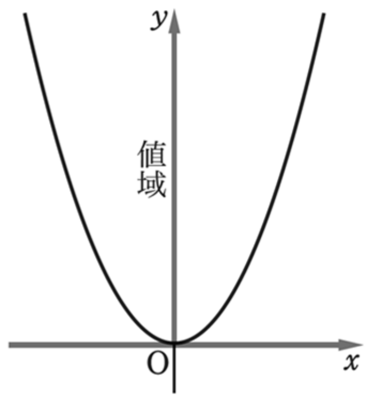
例 4 (1)　関数 $y=2x-3$ の定義域は，（　　　　　　　　　　　）である。

(2)　関数 $y=\frac{1}{x}$ の定義域は，（　　　　　　　　　　　）である。



関数 $y=f(x)$ において，x が定義域内のすべての値をとるときの y の値全体を，この関数の（[12]　　　　　　　）という。

例 5　関数 $y=x^2$ の値域は，下のグラフより，（　　　　　　　　）である。

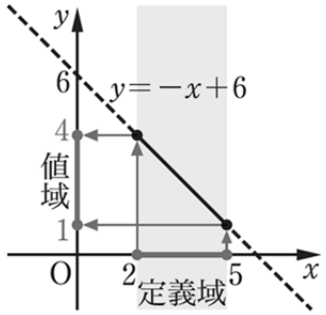


問3　関数 $y=-x^2$ のグラフをかいて，値域を求めよ。

例 6 関数 $y=-x+6\ (2 \leqq x \leqq 5)$ の値域は，右のグラフより

(　　　　　　　　　　)

である。



問4 次の関数のグラフをかいて，値域を求めよ。

(1)　$y=2x-1\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

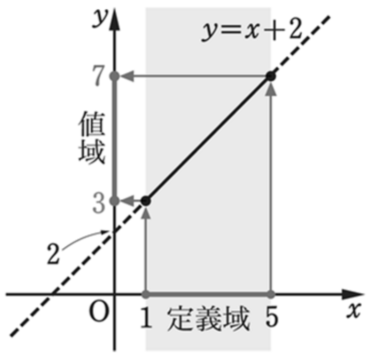
(2)　$y=-3x+11\ (1 \leqq x \leqq 3)$

関数の最大値・最小値

（教科書 p.75）

関数 $y = f(x)$ において，その値域に最大の値，最小の値があるとき，これらをそれぞれこの関数の（[13]　　　　　　，　　　　　　）という。

例7 (1) 関数 $y = x + 2$ $(1 \leqq x \leqq 5)$ の値域は，右のグラフより，



である。

よって（　　　　　　）のとき　最大値（　　　　　）

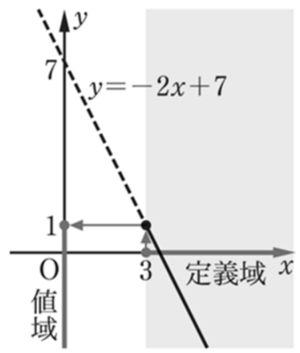
（　　　　　　）のとき　最小値（　　　　　）

である。

(2) 関数 $y = -2x + 7$ $(x \geqq 3)$ の値域は，右のグラフより，

（　　　　　　）である。

よって　$x = 3$ のとき　最大値　（　　　　　）



である。

また，y の値はいくらでも小さくすることができるから，

最小値は（　　　　　　）。

問5 次の関数のグラフをかいて，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = 2x$ $(2 \leqq x \leqq 4)$

(2) $y = -x + 4$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$

(3) $y = x + 1$ $(x \leqq 4)$

2　2次関数とそのグラフ

（教科書 p.76）

関数　$y = 2x^2$，　$y = x^2 + 3x$，　$y = -2x^2 + 4x + 1$

などのように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の（1　　　　　　　　）という。

x の 2 次関数は，a，b，c を定数として

$$y = ax^2 + bx + c$$

の形に表すことができる。ただし，$a \neq 0$ とする。

$y = ax^2$ のグラフ

（教科書p.76）

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸に関して対称である。このグラフが表す曲線を（2　　　　　　　　）という。

放物線の対称軸を（3　　　　　　），

軸と放物線の交点を（4　　　　　　）という。

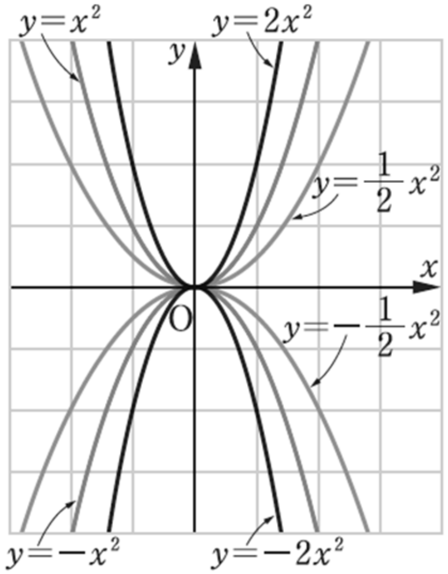
$y = ax^2$ のグラフは，軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

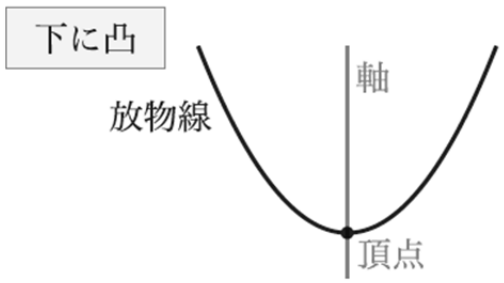
また，この放物線は

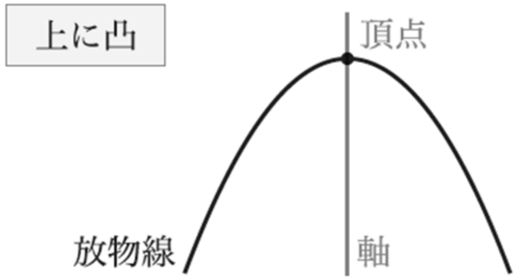
$a > 0$ のときは（5　　　　　　　），

$a < 0$ のときは（6　　　　　　　）

であるという。







問6　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y = 3x^2$

(2)　$y = -3x^2$

(3)　$y = -\frac{1}{3}x^2$

$y = ax^2 + q$ のグラフ

（教科書 p.77）

図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を（7　　　　　　　　）という。

例 8 2 つの 2 次関数

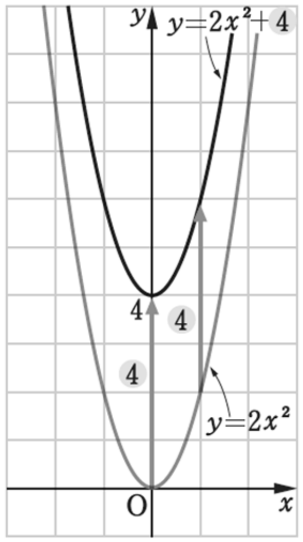
$y = 2x^2$ と $y = 2x^2 + 4$

を比べることによって，$y = 2x^2 + 4$ のグラフをかいてみよう。

これらの 2 つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…								…
$2x^2+4$	…								…

+4



上の表から，同じ x の値に対応する y の値は，$2x^2 + 4$ の方が $2x^2$ より 4 だけ大きいことがわかる。

したがって，$y = 2x^2 + 4$ のグラフは，

$y = 2x^2$ のグラフを

y 軸方向に（　　　　　）

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の

軸は（　　　　　　　），

頂点は

（　　　　　　　　　　）

である。

$y = ax^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

y 軸方向 q にだけ平行移動

した放物線である。

その軸は

（8　　　　　　　　）

頂点は

（9　　　　　　　　　　）

である。

問7　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y = x^2 - 4$

(2)　$y = -3x^2 + 3$

$y = a(x-p)^2$ のグラフ

（教科書 p.78）

例 9 2 つの 2 次関数

$y = 2x^2$ と $y = 2(x-3)^2$

を比べることによって，$y = 2(x-3)^2$ のグラフをかいてみよう。

これらの 2 つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	5	…
$2x^2$	…									…
$2(x-3)^2$	…									…

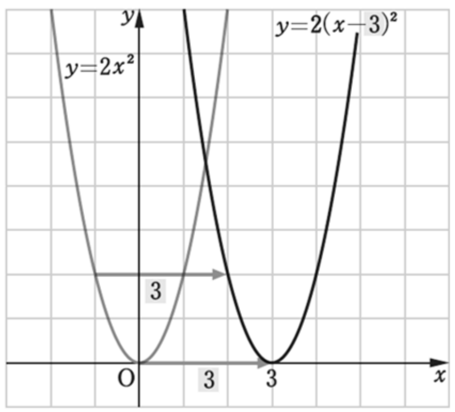
上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に 3 だけずれていることがわかる。

したがって，

$y = 2(x-3)^2$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを

（　　　　　　　　　　）

だけ平行移動した放物線である。



この放物線の

軸は

（　　　　　　　　　　）

頂点は

（　　　　　　　　）

である。

$y = a(x-p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

した放物線である。

その軸は

([10]　　　　　　　　　　），

頂点は

([11]　　　　　　　　　　）

である。

問8 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。またそのグラフをかけ。

(1) $y = -(x-4)^2$

(2) $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

（教科書 p.79）

例10 2次関数

$y=2x^2$

のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動すると

のグラフになる。さらに，y 軸方向に4だけ平行移動すると

のグラフになる。したがって，このグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に

（　　　　）

y 軸方向に

（　　　　）

平行移動した放物線である。

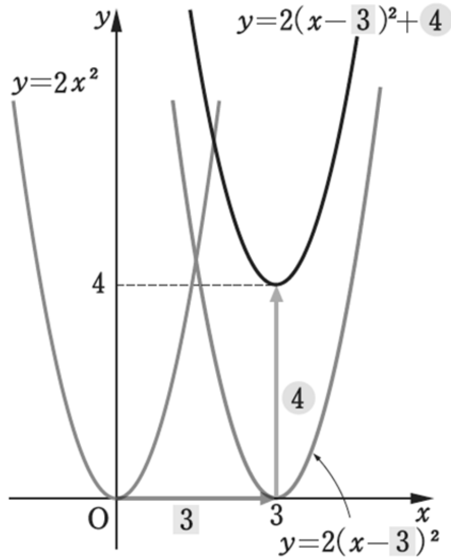
その軸は

（　　　　　　　）

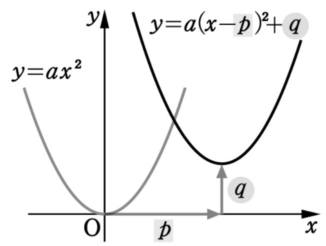
頂点は

（　　　　　　　）

である。



$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは， $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。 **軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$**



問9 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。またそのグラフをかけ。

(1) $y=(x-2)^2+1$

(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

問10 2次関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動して，頂点を次の点に移したとき，それをグラフとする2次関数を求めよ。

(1) $(-3,\ 4)$

(2) $(2,\ -5)$

(3) $(-1,\ -6)$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

（教科書 p.80）

例 11 2 次関数

$y=2x^2+4x-1$ ……①

のグラフをかいてみよう。

まず，①を変形して，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+4x-1 \\ &= 2(x^2+2x)-1 && \leftarrow x^2\text{ の係数でくくり出す} \\ &= 2\{(x+1)^2-1^2\}-1 && \leftarrow \{(x+(x\text{の係数の半分}))^2-(x\text{の係数の半分})^2\} \\ &= 2(x+1)^2-2-1 && \leftarrow \{\ \ \}\text{をはずす} \\ &= 2(x+1)^2-3 && \leftarrow \text{定数項を整理する} \end{aligned}$$

（2 の半分）

この結果から，①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に

（　　　　　）

y 軸方向に

（　　　　　）

だけ平行移動した放物線であることがわかる。

したがって，①のグラフは

軸が

（　　　　　　　　　）

頂点が

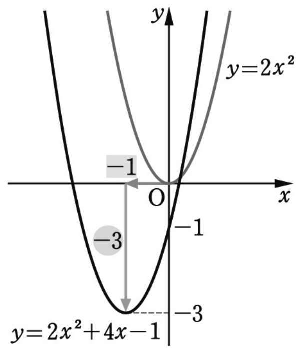
（　　　　　　　　　）

の放物線である。また，

$x=0$ のとき（　　　　　　　）であるから，グラフは y 軸と

（　　　　　　　）

で交わる。



ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，（12　　　　　　　　　　）という。

問 11 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2+4x+5$

(2) $y=3x^2-6x+4$

(3) $y=-x^2+6x+1$

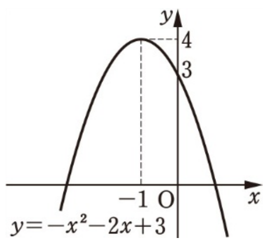
(4) $y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$

⑸ $y = x^2 + 3x + 4$

⑹ $y = -2x^2 + 2x + 3$

例題 1 2 次関数 $y=-x^2-2x+3$ のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解 与えられた 2 次関数は



と変形できる。

よって，求めるグラフは軸が直線（　　　　　　），頂点が点（　　　　　　）の上に凸の放物線である。また，グラフは y 軸と点（　　　　　）で交わるから，上の図のようになる。

問 12　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2+12x+8$

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$

(3)　$y=-\frac{1}{2}x^2+3x$

⑷　$y=-x^2-x+1$

2 次関数の式 $y=ax^2+bx+c$ は，次のように変形できる。

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

したがって，次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフで **軸は直線** $\boldsymbol{x=-\frac{b}{2a}}$**,**　　**頂点は点** $\boldsymbol{\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}$

$y = ax^2 + bx + c$ の形で表される放物線は，放物線 $y = ax^2$ を平行移動したものである。

例題 2 2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ のグラフになるか。

考え方 x^2 の係数が等しい 2 つの 2 次関数のグラフは，平行移動して重ねることができるから，放物線の頂点が重なるように，平行移動するとよい。

解 2 つの 2 次関数を

$y = x^2 + 2x + 3$ ……①

$y = x^2 - 6x + 8$ ……②

とおく。

①の 2 次関数は

(　　　　　　　　　　)

と変形できるから，グラフの頂点は

(　　　　　　　　)

である。

②の2 次関数は

(　　　　　　　　　　)

と変形できるから，グラフの頂点は

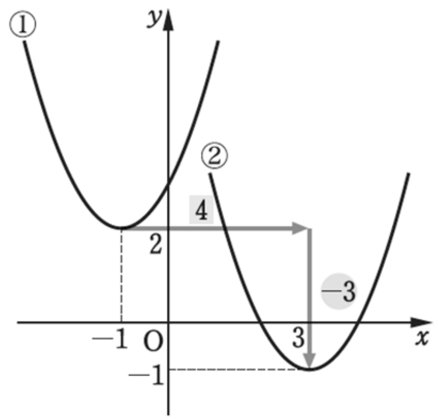
(　　　　　　　　)

である。

したがって，①のグラフを

(　　　　　　　　　　　　　　　)

だけ平行移動すれば，②のグラフになる。



問 13 2 次関数 $y = -x^2 + 8x - 13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = -x^2 - 4x + 2$ のグラフになるか。

3 2次関数の最大・最小

（教科書 p.83）

例 12 2 次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフは，$y=(x-2)^2+1$ より，

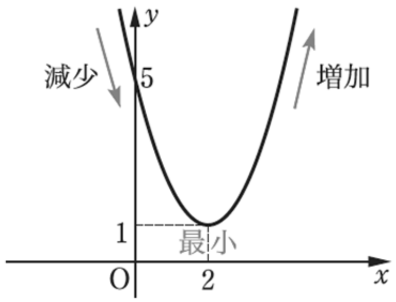
頂点が（　　　　　　　　）の下に凸の放物線である。

右の図より，この関数は（　　　　　　　）のとき

最小値（　　　　　）をとる。

また，y はいくらでも大きい値をとるから，

最大値は（　　　　　　　　）



例 13 2 次関数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ のグラフは，$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

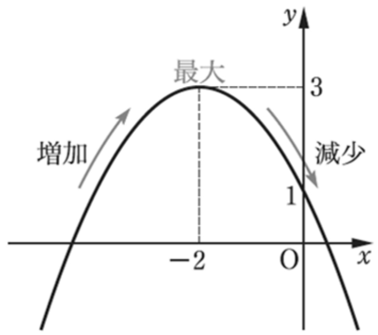
より，頂点が（　　　　　　　　　）の上に凸の放物線である。

右の図より，この関数は（　　　　　　　　）のとき

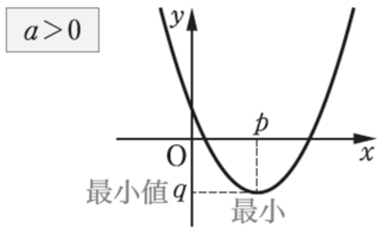
最大値（　　　　　）をとる。

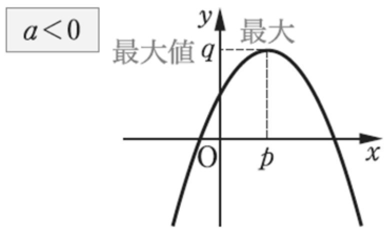
また，y はいくらでも小さい値をとるから，

最小値は（　　　　　　　　）



2 次関数は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することによって，そのグラフから最大値または最小値を求めることができる。





問 14 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$

(2)　$y=-2x^2+3x$

定義域が限られたときの最大値･最小値

（教科書 p.84）

定義域がある範囲に制限されている 2 次関数の最大値，最小値を調べるには，グラフの頂点と定義域の両端における関数の値を比較すればよい。

例題 3 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ において，定義域が次の場合の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

（1） $-2 \leqq x \leqq 3$　　（2） $2 \leqq x \leqq 4$

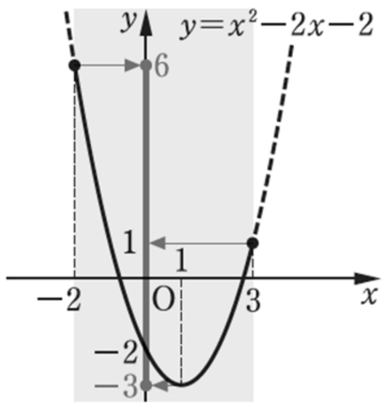
解 与えられた 2 次関数は，(　　　　　　　　　　　　) と変形できる。

（1） $-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = -2$ のとき（　　　　　　　　）

$x = 1$ のとき（　　　　　　　　）

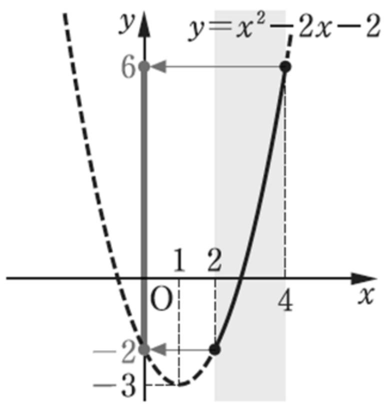


⑵ $2 \leqq x \leqq 4$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = 4$ のとき（　　　　　　　　）

$x = 2$ のとき（　　　　　　　　）



問 15 次の 2 次関数について，(　)に示した定義域における最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

（1） $y = x^2 - 9$　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

⑵ $y = x^2 + 4x + 3$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$

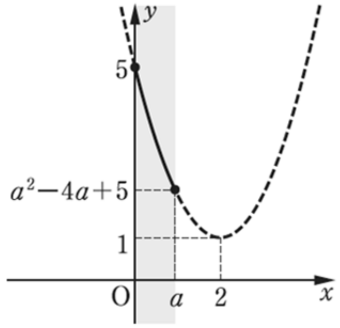
⑶　$y=-2x^2+4x+3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

応用 例題 4　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=x^2-4x+5\ (0 \leqq x \leqq a)$ の最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

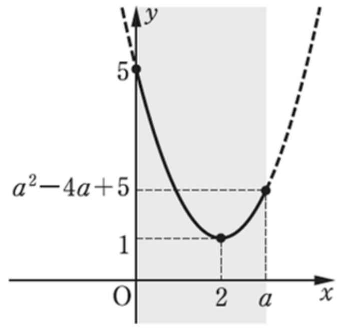
考え方　$y=x^2-4x+5$ のグラフの軸は直線（　　　　　　　）である。定義域に 2 を含まない場合と，含む場合に分けて考える。

解　与えられた 2 次関数は，（　　　　　　　　　　　）と変形できる。

（ⅰ）　$0<a<2$ のとき
$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
　$x=a$ のとき



（ⅱ）　$2 \leqq a$ のとき
$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
　$x=2$ のとき



（ⅰ），（ⅱ）より

問 16　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=-x^2+6x+1\ (0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

応用例題 5 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

考え方 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ のグラフの軸は直線 $x = a$ である。a の値と定義域の関係に着目して，場合を分けて考える。

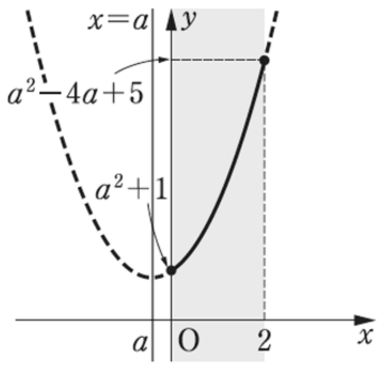
解 与えられた 2 次関数は，(　　　　　　　　　　　) と変形できる。

（ⅰ） $a < 0$ のとき

0 ≦ x ≦ 2 におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = 0$ のとき (　　　　　　　　　　)

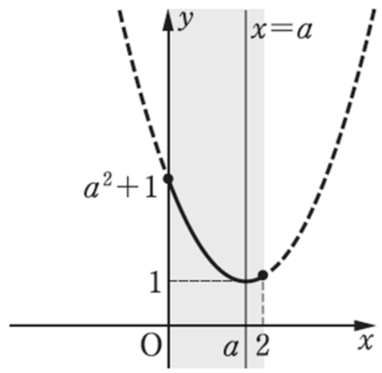


（ⅱ） $0 \leqq a \leqq 2$ のとき

0 ≦ x ≦ 2 におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = a$ のとき (　　　　　　　　　)



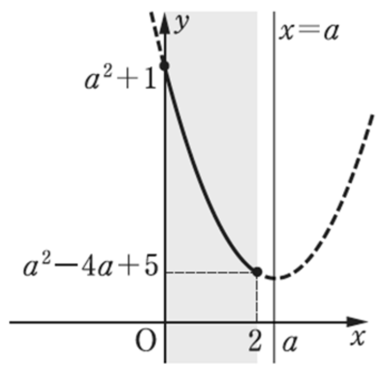
（ⅲ） $2 < a$ のとき

0 ≦ x ≦ 2 におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = 2$ のとき (　　　　　　　　　　　　　)

（ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より

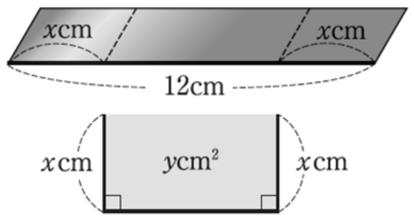


問 17 2 次関数 $y = -x^2 + 2ax - a^2 + 3\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

最大･最小の応用

（教科書 p.87）

応用 例題 6 幅 12cm の銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cm の溝をつくる。溝の断面積を $y\text{cm}^2$ とするとき，y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



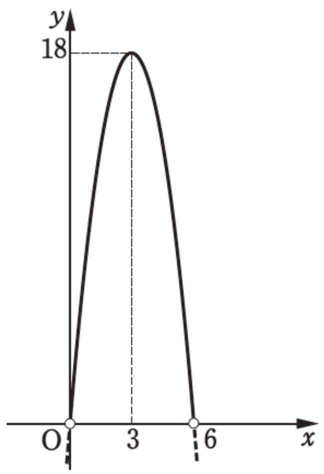
解 底の幅は（　　　　　　　　　　　）であり

$x > 0$，$12 - 2x > 0$

であるから

$0 < x < 6$　……①

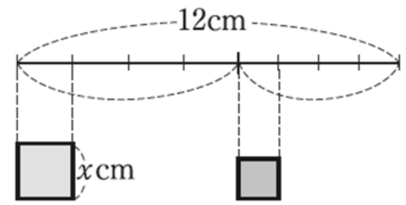
この範囲において面積は



①の範囲における y のグラフは，
右の図の放物線の実線部分である。
ゆえに

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

問 18 長さ 12cm の針金を 2 つに切り，そのおのおのを折り曲げて右の図のように 2 つの正方形をつくる。2 つの正方形の面積の和が最小となるのは，針金をどのように切ったときか。また，そのときの最小値を求めよ。



4 2次関数の決定

頂点や軸に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.88）

例題 7 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=-2$ で，2 点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通る。

解 (1) 頂点が点 $(1,\ -3)$ であるから，

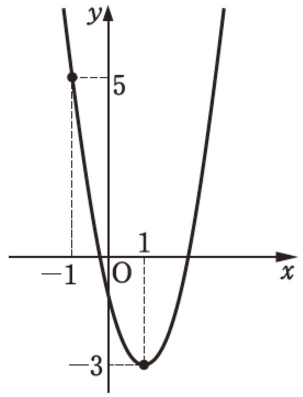
求める 2 次関数は（　　　　　　　　　　　）と表される。

グラフが点（　　　　　　　）を通るから

（　　　　　　　）

これを解いて　　　（　　　　　）

よって　　　（　　　　　　　　　）



(2) 軸が直線 $x=-2$ であるから，

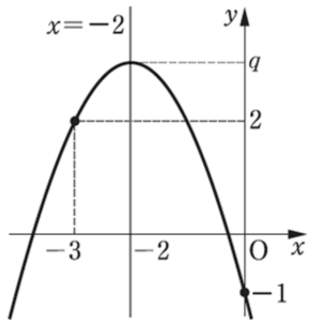
求める 2 次関数は（　　　　　　　　　　　）

と表される。

グラフが 2 点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通るから

これを解いて　（　　　　　　　　）

よって　（　　　　　　　　　）



問 19 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1,\ 2)$ で，点 $(1,\ -6)$ を通る。

(2) 頂点の x 座標が 2 で，2 点 $(0,\ 7)$，$(6,\ 13)$ を通る。

グラフ上の3点が与えられたとき

（教科書 p.89）

グラフが 3 点 A$(-1, -3)$，B$(2, 0)$，C$(3, -7)$ を通るような 2 次関数を求めてみよう。求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とすると

点 A$(-1, -3)$ を通るから　　　　　　　　……①

点 B$(2, 0)$ を通るから　　　　　　　　……②

点 C$(3, -7)$ を通るから　　　　　　　　……③

したがって，①，②，③を同時に満たす a，b，c を求めればよい。①，②，③のような 3 文字についての 1 次方程式を連立したものを，（[1]　　　　　　　　　　）という。

例 14 次の連立 3 元 1 次方程式を解いてみよう。

$a - b + c = -3$　　　　……①

$4a + 2b + c = 0$　　　　……②

$9a + 3b + c = -7$　　　　……③

まず，文字 c を消去する。

②－①より

すなわち　　　　　　　　……④

③－②より　　　　　　　……⑤

④，⑤を a，b について解くと

これらを①に代入して c を求めると

ゆえに

例 14 から，グラフが 3 点 A$(-1, -3)$，B$(2, 0)$，C$(3, -7)$ を通るような 2 次関数は，

（[1]　　　　　　　　　　）である。

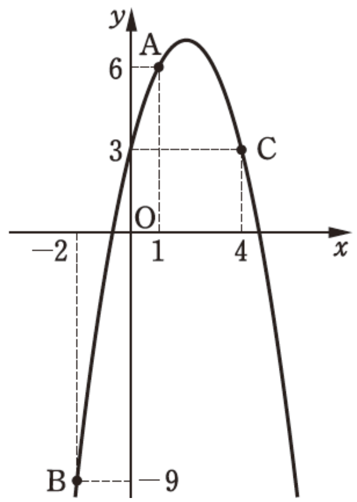
問 20 次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

（1）$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a - 4b + c = 18 \\ 4a + 16b + c = -40 \end{cases}$

⑵ $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

例題 8 グラフが 3 点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ。

解 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。この関数のグラフが 3 点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るから



……①

……②

……③

まず，② − ①より，c を消去して

すなわち

……④

③ − ②より，c を消去して

すなわち

……⑤

次に，④，⑤を a，b について解くと

これらを①に代入して c を求めると

ゆえに，求める 2 次関数は

問 21 グラフが次の 3 点 A，B，C を通るような 2 次関数を求めよ。

(1) A(−1, −7)，B(2, −1)，C(3, −7)

(2) A(−2, −3)，B(0, −1)，C(1, 3)

問 題

（教科書 p.91）

1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ において，次の値を求めよ。

(1) $f(3)$

(2) $f(a-1)$

(3) $f(2-a)$

2 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y = -x^2 + 6x - 5$

(2) $y = 2(x-1)(x-3)$

3 次の 2 次関数の値域を求めよ。

(1) $y = -2x^2 - 8x + 3 \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

4 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問に答えよ。

(1) 最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

5 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(4,\ -7)$ を通る。

(2) 3 点 $(-1,\ 5)$，$(-2,\ -3)$，$(1,\ 9)$ を通る。

(3) $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動したもので，頂点が x 軸上にあり，点 $(3,\ 8)$ を通る。

(4) x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -12)$ で交わる。

6 2 次関数 $y=x^2+2x+c\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 1 のとき，c の値を求めよ。

7 $x = 1$ のとき最大値 5 をとり，$x = -1$ のとき $y = 1$ となるような 2 次関数を求めよ。

参考　グラフの平行移動

（教科書 p.92）

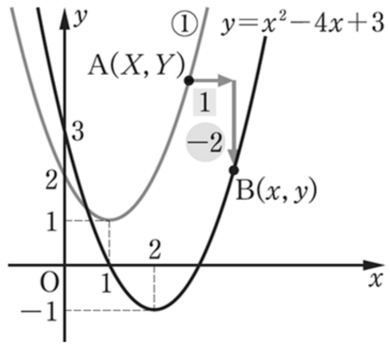
例 1　2 次関数 $y=x^2-2x+2$　……①

のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。

①のグラフは，$y=(x-1)^2+1$ より，点（　　　　　　）を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める 2 次関数のグラフは，頂点が点（　　　　　　）で下に凸の放物線である。

ゆえに，求める 2 次関数は

……②



例 1 は次のように考えることもできる。

①のグラフ上の点 A$(X,\ Y)$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ移動した点を B$(x,\ y)$ とすると

……③

A$(X,\ Y)$ は①上にあるから

……④

③の X，Y を④に代入すると，

より

すなわち

よって，点 B は②の 2 次関数のグラフ上にある。これは，①で x の代わりに $x-1$，y の代わりに $y+2$ としたものに一致する。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを

だけ平行移動した関数のグラフは，x を $x-p$，y を $y-q$ で置き換えた関数のグラフになる。よって

問1　次の 2 次関数のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

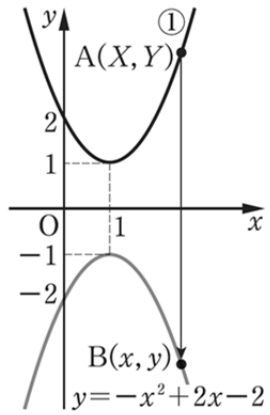
(1)　$y=2x^2+8x-1$

(2)　$y=-x^2+7x-7$

参考　グラフの対称移動

（教科書 p.93）

例 1　2 次関数 $y = x^2 - 2x + 2$　……①
のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。
①のグラフは，点（　　　　　　　）を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める 2 次関数のグラフは，頂点が点（　　　）で上に凸の放物線である。
ゆえに，求める 2 次関数は
　　　　……②



例 1 は次のように考えることもできる。
①のグラフ上の点 A$(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動した点を B$(x,\ y)$ とすると
　　　　……③
A$(X,\ Y)$ は①上にあるから　　　　……④
③の X，Y を④に代入すると，（　　　　　　　）より
（　　　　　　　）すなわち　（　　　　　　　）
よって，点 B は②の 2 次関数のグラフ上にある。
一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動すると

y 軸に関して対称移動すると

原点に関して対称移動すると

のグラフになる。

問1　2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

1節 関数とグラフ

1 関数

関数

（教科書 p.72）

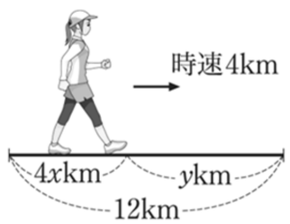
例1 家から 12km 離れた場所から，時速 4km で家まで歩いた。出発してから x 時間経過したときの，家までの距離を $y$km とすると

$y = 12 - 4x$

と表される。

ただし，（ $0 \leqq x \leqq 3$ ）

である。



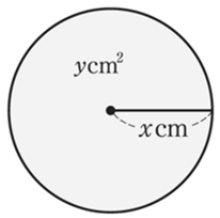
例2 半径 $x$cm の円があり，その面積を $y\text{cm}^2$ とすると

（ $y = \pi x^2$ ）

と表される。

ただし，（ $x > 0$ ）

である。



このように，2 つの変数 x，y があって，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき，（[1] y は x の関数 ）であるという。

y が x の関数であることを

$y = f(x)$，$y = g(x)$

などと表す。関数において，x の値 a に対応する y の値を $f(a)$ で表し，$f(a)$ を $x = a$ のときの（[2] 関数 $f(x)$ の値 ）という。

例3 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ のとき

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 4$

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 5 = 19$

$f(a) = 2a^2 - 3a + 5$

問1 $f(x) = 2x^2 - 2$ のとき，$f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(a+1)$ を求めよ。

$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 2 = -2$

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 2 = 0$

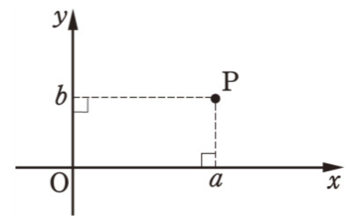
$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 2 = 6$

$f(a+1) = 2(a+1)^2 - 2 = 2a^2 + 4a$

関数のグラフ

（教科書 p.73）

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点 P の位置は，右の図のように，実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の（[3] 座標 ）といい，（[4] P(a, b) ）と書く。



座標軸の定められた平面を（[5] 座標平面 ）という。

座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる。これらを右の図のように，それぞれ（[6] 第 1 象限 ），（[7] 第 2 象限 ），（[8] 第 3 象限 ），（[9] 第 4 象限 ）という。ただし，座標軸上の点はどの象限にも含まれないものとする。

問2 次の点はどの象限にあるか。

(1) A(3, −2)

第 4 象限

(2) B(6, 5)

第 1 象限

(3) C(−5, −1)

第 3 象限

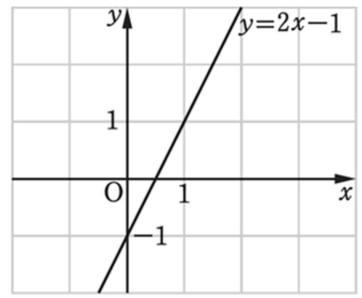
(4) D(−3, 1)

第 2 象限

1 次関数

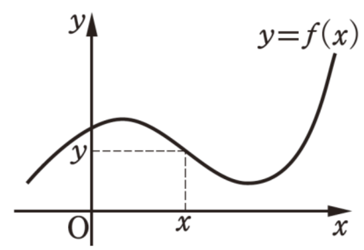
$y = 2x - 1$

のグラフは，y 軸上の点 $(0, -1)$ を通り，傾き 2 の直線である。このグラフは，$y = 2x - 1$ を満たす (x, y) を座標とする点全体からなる図形である。



一般に，関数 $y = f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 (x, y) を座標とする点全体からなる図形を，

（[10] 関数 $y = f(x)$ のグラフ ）という。



関数の定義域･値域

（教科書 p.74）

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の（[11] 定義域 ）という。
定義域をはっきり示す必要があるときには

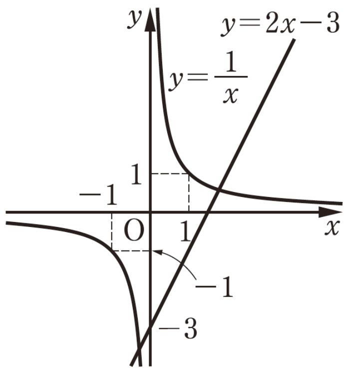
$y=f(x) \quad (a \leqq x \leqq b)$

と書くことが多い。

とくに断らないときは，関数 $y=f(x)$ の定義域は，$f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

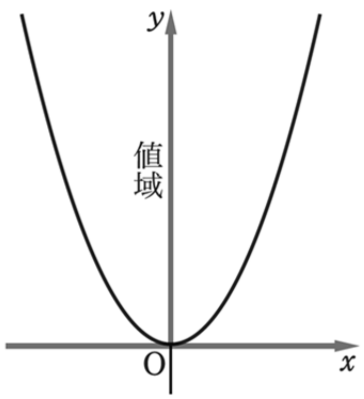
例4 (1) 関数 $y=2x-3$ の定義域は，（ すべての実数 ）である。

(2) 関数 $y=\frac{1}{x}$ の定義域は，（ 0 以外のすべての実数 ）である。

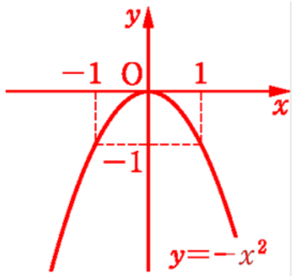


関数 $y=f(x)$ において，x が定義域内のすべての値をとるときの y の値全体を，この関数の（[12] 値域 ）という。

例5 関数 $y=x^2$ の値域は，下のグラフより，（ $y \geqq 0$ ）である。



問3 関数 $y=-x^2$ のグラフをかいて，値域を求めよ。



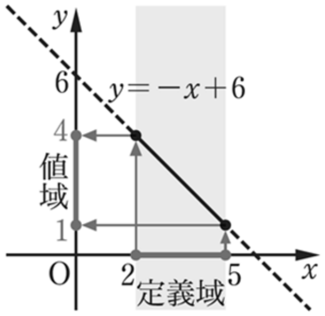
関数 $y=-x^2$ の値域は，グラフより

$y \leqq 0$

例 6 関数 $y=-x+6$ $(2 \leqq x \leqq 5)$ の値域は，右のグラフより

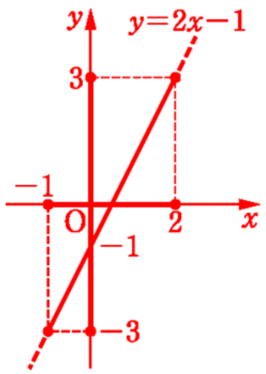
（　　$1 \leqq y \leqq 4$　　）

である。



問4 次の関数のグラフをかいて，値域を求めよ。

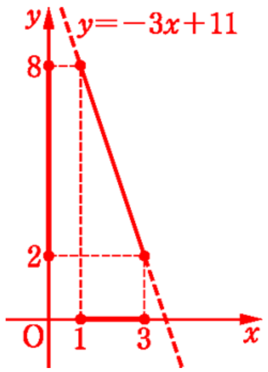
(1)　$y=2x-1$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$



関数 $y=2x-1$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の値域は，グラフより

$-3 \leqq y \leqq 3$

(2)　$y=-3x+11$ $(1 \leqq x \leqq 3)$



関数 $y=-3x+11$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ の値域は，グラフより

$2 \leqq y \leqq 8$

関数の最大値・最小値

（教科書 p.75）

関数 $y=f(x)$ において，その値域に最大の値，最小の値があるとき，これらをそれぞれこの関数の（13　最大値　，　最小値　）という。

例 7　(1)　関数 $y=x+2$ $(1 \leqq x \leqq 5)$ の値域は，右のグラフより，

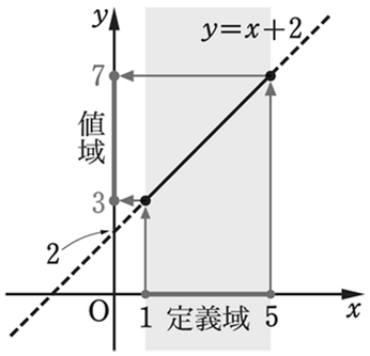
$3 \leqq y \leqq 7$

である。

よって（　$x=5$　）のとき　最大値（　7　）

（　$x=1$　）のとき　最小値（　3　）

である。



(2)　関数 $y=-2x+7$ $(x \geqq 3)$ の値域は，右のグラフより，

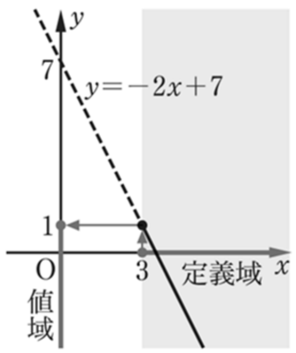
（　$y \leqq 1$　）である。

よって　$x=3$ のとき　最大値　（　1　）

である。

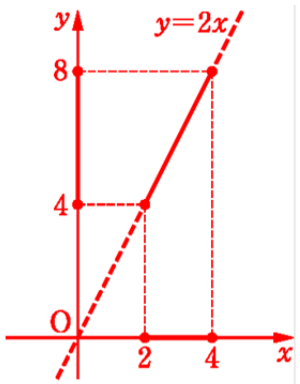
また，y の値はいくらでも小さくすることができるから，

最小値は（　ない　）。



問5　次の関数のグラフをかいて，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x$ $(2 \leqq x \leqq 4)$



関数 $y=2x$ $(2 \leqq x \leqq 4)$ の値域は，グラフより

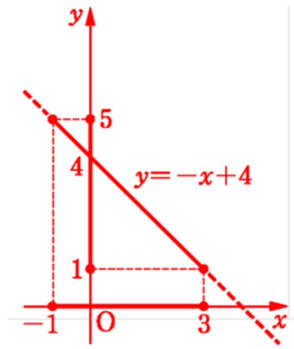
$4 \leqq y \leqq 8$

よって

$x=4$ のとき　最大値 8

$x=2$ のとき　最小値 4

(2)　$y=-x+4$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$



関数 $y=-x+4$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ の値域は，グラフより

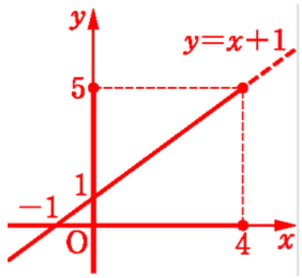
$1 \leqq y \leqq 5$

よって

$x=-1$ のとき　最大値 5

$x=3$ のとき　最小値 1

(3)　$y=x+1$ $(x \leqq 4)$



関数 $y=x+1$ $(x \leqq 4)$ の値域は，グラフより

$y \leqq 5$

よって

$x=4$ のとき　最大値5

最小値はない。

2 2次関数とそのグラフ

（教科書 p.76）

関数　$y=2x^2$,　$y=x^2+3x$,　$y=-2x^2+4x+1$

などのように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の（1　2 次関数　）という。

x の 2 次関数は，a，b，c を定数として

$$y=ax^2+bx+c$$

の形に表すことができる。ただし，$a\neq 0$ とする。

$y=ax^2$ のグラフ

（教科書p.76）

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸に関して対称である。このグラフが表す曲線を（2　放物線　）という。

放物線の対称軸を（3　軸　），

軸と放物線の交点を（4　頂点　）という。

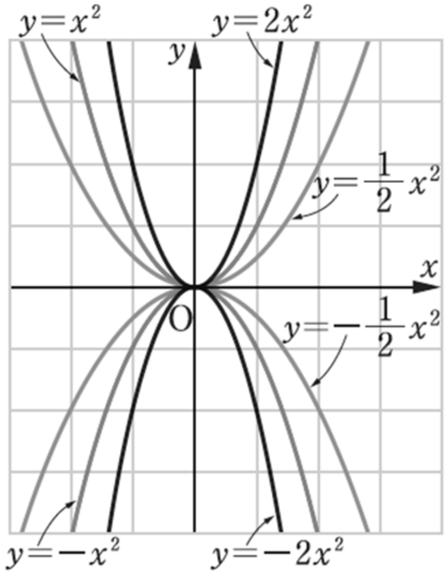
$y=ax^2$ のグラフは，軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

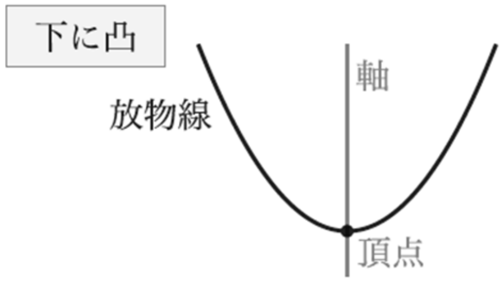
また，この放物線は

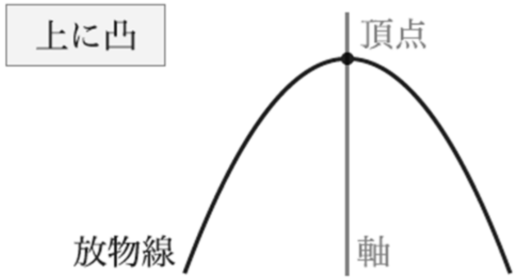
$a>0$ のときは（5　下に凸　），

$a<0$ のときは（6　上に凸　）

であるという。

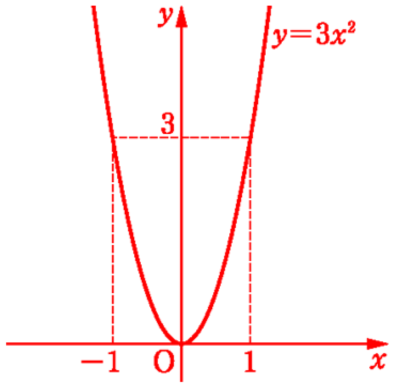




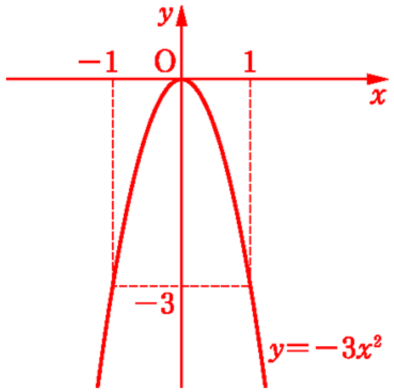


問6　次の 2 次関数のグラフをかけ。

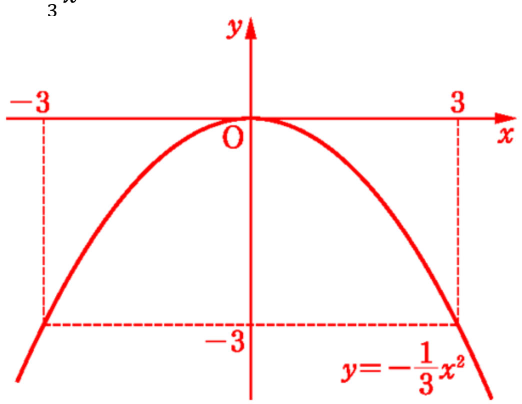
(1)　$y=3x^2$



(2)　$y=-3x^2$



(3)　$y=-\frac{1}{3}x^2$



$y=ax^2+q$ のグラフ

（教科書 p.77）

図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を（7　　平行移動　　）という。

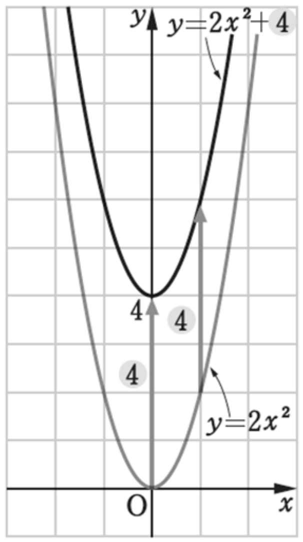
例 8　2 つの 2 次関数

$y=2x^2$ と $y=2x^2+4$

を比べることによって，$y=2x^2+4$ のグラフをかいてみよう。

これらの 2 つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$2x^2+4$	…	22	12	6	4	6	12	22	…



上の表から，同じ x の値に対応する y の値は，$2x^2+4$ の方が $2x^2$ より 4 だけ大きいことがわかる。

したがって，$y=2x^2+4$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを

y 軸方向に（　4　）

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の

軸は（　y 軸　），

頂点は

（　点 $(0,\ 4)$　）

である。

$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

y 軸方向 q にだけ平行移動

した放物線である。

その軸は

（8　y 軸　）

頂点は

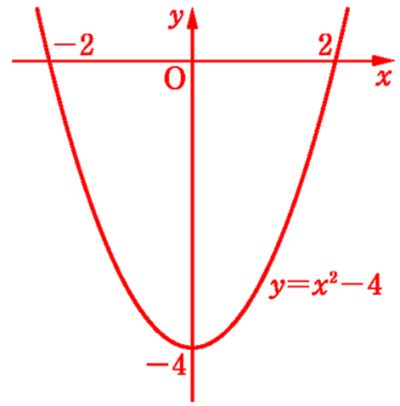
（9　点 $(0,\ q)$　）

である。

問7　次の 2 次関数のグラフをかけ。

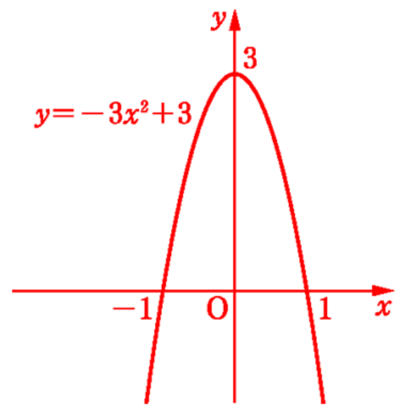
(1)　$y=x^2-4$

軸は直線 $x=0$，頂点は点 $(0,\ -4)$



(2)　$y=-3x^2+3$

軸は直線 $x=0$，頂点は点 $(0,\ 3)$



$y=a(x-p)^2$ のグラフ

（教科書 p.78）

例 9　2つの2次関数

$y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$

を比べることによって，$y=2(x-3)^2$ のグラフをかいてみよう。

これらの2つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$2x^2$	…	8	2	0	2	8	18	32	50	…
$2(x-3)^2$	…	50	32	18	8	2	0	2	8	…

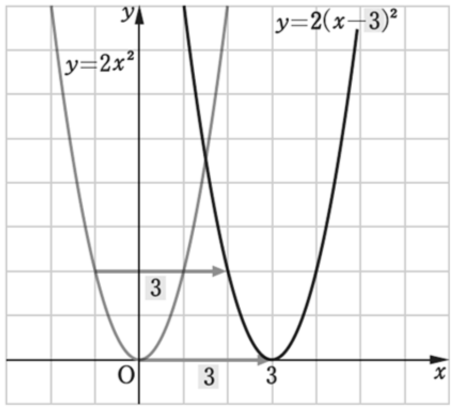
上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に3だけずれていることがわかる。

したがって，

$y=2(x-3)^2$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

（　x 軸方向に3　）

だけ平行移動した放物線である。



この放物線の

軸は

（　直線 $x=3$　）

頂点は

（　点 $(3,\ 0)$　）

である。

$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

した放物線である。

その軸は

（[10]　直線 $x=p$　），

頂点は

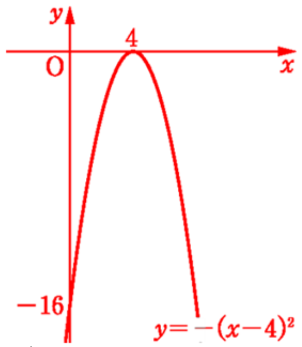
（[11]　点 $(p,\ 0)$　）

である。

問8　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。またそのグラフをかけ。

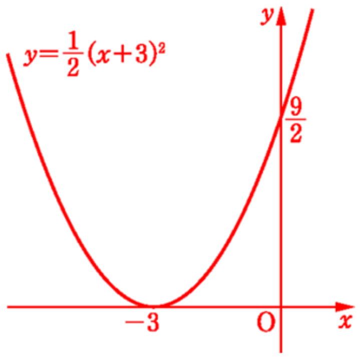
(1)　$y=-(x-4)^2$

軸は直線 $x=4$，頂点は点 $(4,\ 0)$



(2)　$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$

軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ 0)$



$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

（教科書 p.79）

例 10 2 次関数

$y=2x^2$

のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$y=2(x-3)^2$

のグラフになる。さらに，y 軸方向に 4 だけ平行移動すると

$y=2(x-3)^2+4$

のグラフになる。したがって，このグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に

（　3　）

y 軸方向に

（　4　）

平行移動した放物線である。

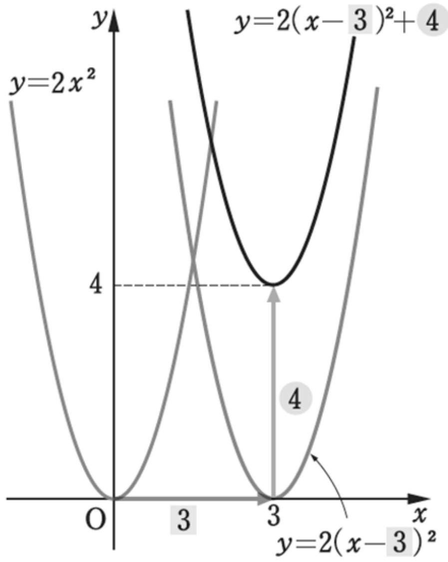
その軸は

（　直線 $x=3$　）

頂点は

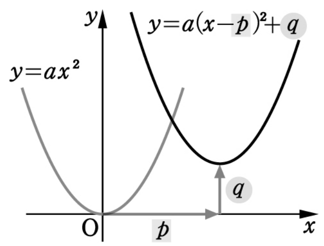
（　点 (3, 4)　）

である。



$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

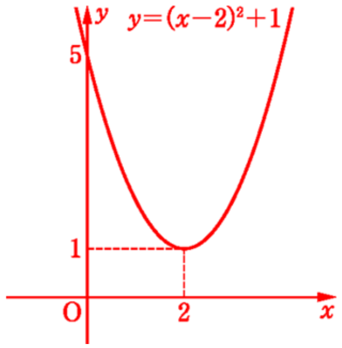
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを
x 軸方向に p，y 軸方向に q
だけ平行移動した放物線である。
軸は直線 $x=p$，頂点は点 (p, q)



問9 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。またそのグラフをかけ。

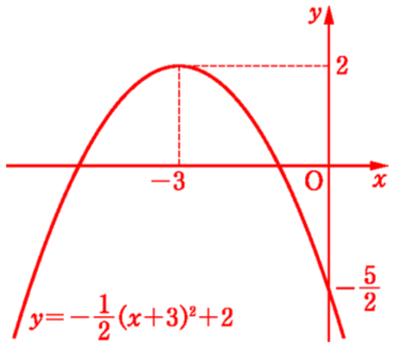
(1) $y=(x-2)^2+1$

軸は直線 $x=2$，頂点は点 (2, 1)



(2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

軸は直線 $x=-3$，頂点は点 (−3, 2)



問 10 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動して，頂点を次の点に移したとき，それをグラフとする 2 次関数を求めよ。

(1) (−3, 4)

$y=2\{x-(-3)\}^2+4$

すなわち　$y=2(x+3)^2+4$

(2) (2, −5)

$y=2(x-2)^2+(-5)$

すなわち　$y=2(x-2)^2-5$

(3) (−1, −6)

$y=2\{x-(-1)\}^2+(-6)$

すなわち　$y=2(x+1)^2-6$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

（教科書 p.80）

例 11 2 次関数

$$y=2x^2+4x-1 \quad \cdots\cdots ①$$

のグラフをかいてみよう。

まず，①を変形して，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

$y=2x^2+4x-1$

$=2(x^2+2x)-1$ ⟵ x^2 の係数でくくり出す

（2 の半分）

$=2\{(x+1)^2-1^2\}-1$ ⟵ $\{(x+(x$の係数の半分$))^2-(x$の係数の半分$)^2\}$

$=2(x+1)^2-2-1$ ⟵ { } をはずす

$=2(x+1)^2-3$ ⟵ 定数項を整理する

この結果から，①のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

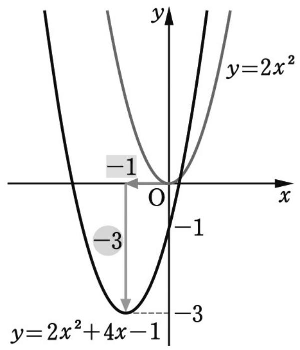
x 軸方向に

（　-1　）

y 軸方向に

（　-3　）

だけ平行移動した放物線であることがわかる。



したがって，①のグラフは

軸が

（　直線 $x=-1$　）

頂点が

（　点 $(-1,\ -3)$　）

の放物線である。また，

$x=0$ のとき（　$y=-1$　）であるから，グラフは y 軸と

（　点 $(0,\ -1)$　）

で交わる。

ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，（[12]　平方完成　）という。

問 11 次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1) $y=x^2+4x+5$

$y=x^2+4x+5$

$=(x+2)^2-2^2+5$

$=(x+2)^2+1$

すなわち　$y=(x+2)^2+1$

(2) $y=3x^2-6x+4$

$y=3x^2-6x+4$

$=3(x^2-2x)+4$

$=3\{(x-1)^2-1^2\}+4$

$=3(x-1)^2-3+4$

$=3(x-1)^2+1$

すなわち　$y=3(x-1)^2+1$

(3) $y=-x^2+6x+1$

$y=-x^2+6x+1$

$=-(x^2-6x)+1$

$=-\{(x-3)^2-3^2\}+1$

$=-(x-3)^2+9+1$

$=-(x-3)^2+10$

すなわち　$y=-(x-3)^2+10$

(4) $y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$

$y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$

$=\frac{1}{2}(x^2+8x)+6$

$=\frac{1}{2}\{(x+4)^2-4^2\}+6$

$=\frac{1}{2}(x+4)^2-8+6$

$=\frac{1}{2}(x+4)^2-2$

すなわち　$y=\frac{1}{2}(x+4)^2-2$

⑸ $y = x^2 + 3x + 4$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

すなわち $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

⑹ $y = -2x^2 + 2x + 3$

$= -2(x^2 - x) + 3$

$= -2\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + 3$

$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 3$

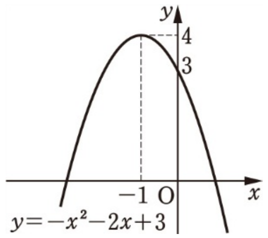
$= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

すなわち $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

例題 1 2 次関数 $y=-x^2-2x+3$ のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解 与えられた 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -(x^2+2x)+3 \\ &= -\{(x+1)^2-1^2\}+3 \\ &= -(x+1)^2+4 \end{aligned}$$



と変形できる。

よって，求めるグラフは軸が直線（ $x=-1$ ），頂点が点（ $(-1,\ 4)$ ）の上に凸の放物線である。また，グラフは y 軸と点（ $(0,\ 3)$ ）で交わるから，上の図のようになる。

問 12 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

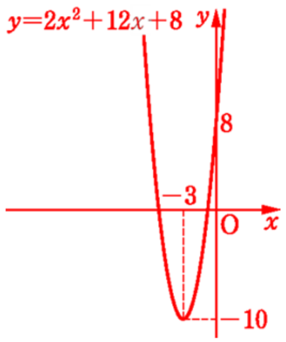
(1) $y=2x^2+12x+8$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+12x+8 \\ &= 2(x^2+6x)+8 \\ &= 2\{(x+3)^2-3^2\}+8 \\ &= 2(x+3)^2-18+8 \\ &= 2(x+3)^2-10 \end{aligned}$$

すなわち　$y=2(x+3)^2-10$

よって，求めるグラフは軸が直線 $x=-3$，頂点が点 $(-3,\ -10)$ の下に凸の放物線である。

また，グラフは y 軸と点 $(0,\ 8)$ で交わるから図のようになる。



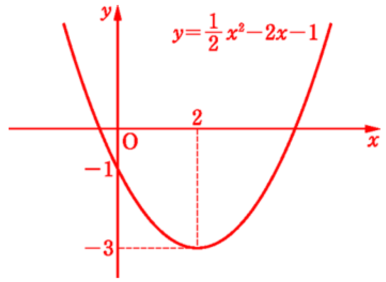
(2) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2-2x-1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2-4x)-1 \\ &= \frac{1}{2}\{(x-2)^2-2^2\}-1 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^2-2-1 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^2-3 \end{aligned}$$

すなわち　$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$

よって，求めるグラフは軸が直線 $x=2$，頂点が点 $(2,\ -3)$ の下に凸の放物線である。

また，グラフは y 軸と点 $(0,\ -1)$ で交わるから図のようになる。



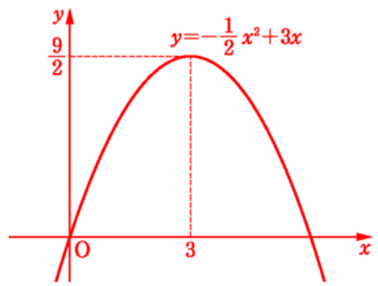
(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2+3x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-6x) \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-3)^2-3^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2} \end{aligned}$$

すなわち　$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$

よって，求めるグラフは軸が直線 $x=3$，頂点が点 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ の上に凸の放物線である。

また，グラフは y 軸と原点で交わるから図のようになる。



(4) $y=-x^2-x+1$

$y=-x^2-x+1$

$=-(x^2+x)+1$

$=-\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+1$

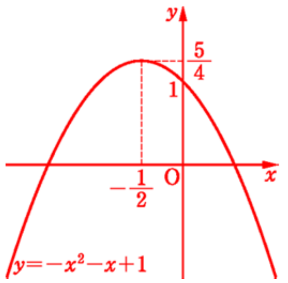
$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+1$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

すなわち　$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

よって，求めるグラフは軸が直線 $x=-\frac{1}{2}$，頂点が点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ の上に凸の放物線である。

また，グラフは y 軸と点 $(0,\ 1)$ で交わるから図のようになる。



2 次関数の式 $y=ax^2+bx+c$ は，次のように変形できる。

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

したがって，次のことが成り立つ。

$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$

$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフで **軸は直線** $x=-\frac{b}{2a}$，　**頂点は点** $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$y = ax^2 + bx + c$ の形で表される放物線は，放物線 $y = ax^2$ を平行移動したものである。

例題 2　2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ のグラフになるか。

考え方　x^2 の係数が等しい 2 つの 2 次関数のグラフは，平行移動して重ねることができるから，放物線の頂点が重なるように，平行移動するとよい。

解　2 つの 2 次関数を

$y = x^2 + 2x + 3$　……①

$y = x^2 - 6x + 8$　……②

とおく。

①の 2 次関数は

（　$y = (x+1)^2 + 2$　）

と変形できるから，グラフの頂点は

（　点 $(-1,\ 2)$　）

である。

②の2 次関数は

（　$y = (x-3)^2 - 1$　）

と変形できるから，グラフの頂点は

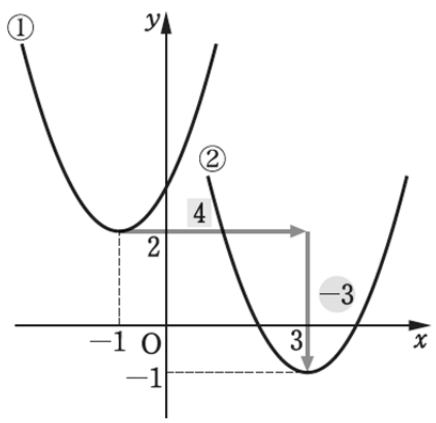
（　点 $(3,\ -1)$　）

である。

したがって，①のグラフを

（　x 軸方向に 4，y 軸方向に -3　）

だけ平行移動すれば，②のグラフになる。



問 13　2 次関数 $y = -x^2 + 8x - 13$ のグラフをどのように平行移動すると，2 次関数 $y = -x^2 - 4x + 2$ のグラフになるか。

2 つの 2 次関数を

$y = -x^2 + 8x - 13$　……①

$y = -x^2 - 4x + 2$　……②

とおく。

①の 2 次関数は

$y = -(x-4)^2 + 3$

と変形できるから，グラフの頂点は，点 $(4,\ 3)$ である。

②の 2 次関数は

$y = -(x+2)^2 + 6$

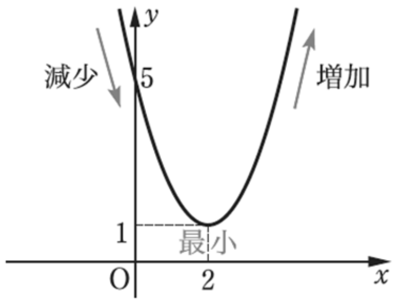
と変形できるから，グラフの頂点は，点 $(-2,\ 6)$ である。

したがって，①のグラフを x 軸方向に -6，y 軸方向に 3 だけ平行移動すれば，②のグラフになる。

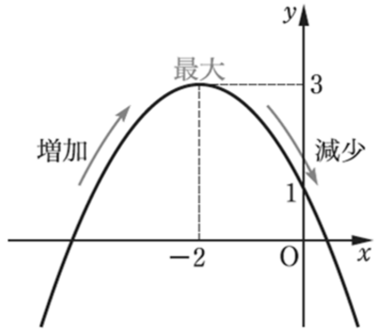
3 2次関数の最大・最小

（教科書 p.83）

例 12 2 次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフは，$y=(x-2)^2+1$ より，
頂点が（　点 (2, 1)　）の下に凸の放物線である。
右の図より，この関数は（　$x=2$　）のとき
最小値（　1　）をとる。
また，y はいくらでも大きい値をとるから，
最大値は（　ない。　）

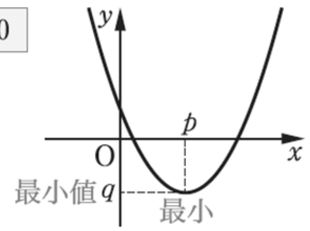


例 13 2 次関数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ のグラフは，$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$
より，頂点が（　点 (−2, 3)　）の上に凸の放物線である。
右の図より，この関数は（　$x=-2$　）のとき
最大値（　3　）をとる。
また，y はいくらでも小さい値をとるから，
最小値は（　ない。　）

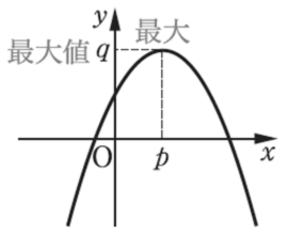


2 次関数は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することによって，そのグラフから最大値または最小値を求めることができる。

$a>0$



$a<0$

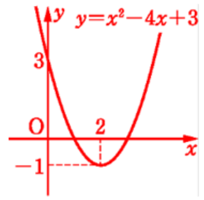


問 14 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+3$

$y=x^2-4x+3$
$=(x-2)^2-1$

よって，グラフは頂点が (2, −1) の下に凸の放物線である。



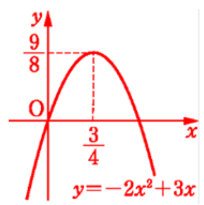
図より
$x=2$ のとき最小値 -1
最大値はない

(2) $y=-2x^2+3x$

$y=-2x^2+3x$

$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

よって，グラフは頂点が点 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{9}{8}\right)$ の上に凸の放物線である。



図より
$x=\frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{9}{8}$
最小値はない

定義域が限られたときの最大値・最小値

（教科書 p.84）

定義域がある範囲に制限されている 2 次関数の最大値，最小値を調べるには，グラフの頂点と定義域の両端における関数の値を比較すればよい。

例題 3　2 次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ において，定義域が次の場合の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$-2 \leqq x \leqq 3$　　(2)　$2 \leqq x \leqq 4$

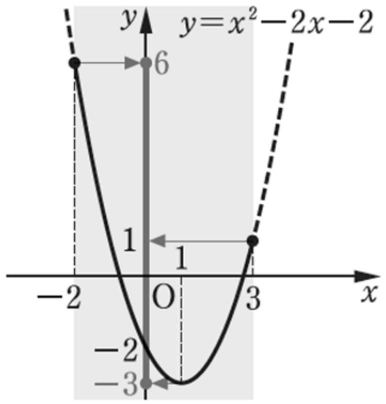
解　与えられた 2 次関数は，（　$y = (x-1)^2 - 3$　）と変形できる。

(1)　$-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = -2$ のとき（　最大値 6　）

$x = 1$ のとき（　最小値 -3　）

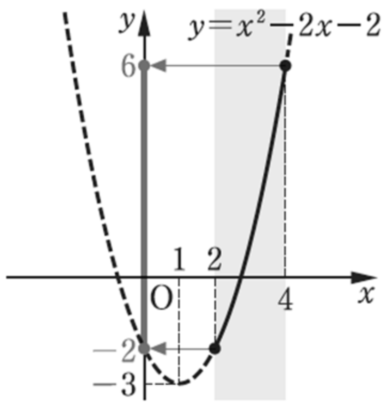


(2)　$2 \leqq x \leqq 4$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x = 4$ のとき（　最大値 6　）

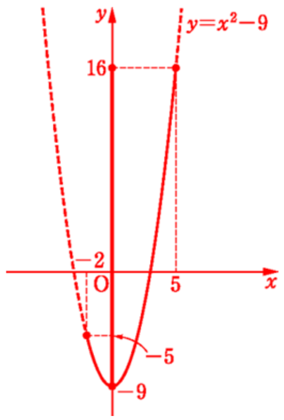
$x = 2$ のとき（　最小値 -2　）



問 15　次の 2 次関数について，（　）に示した定義域における最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y = x^2 - 9$　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

$y = x^2 - 9$



$-2 \leqq x \leqq 5$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。

したがって

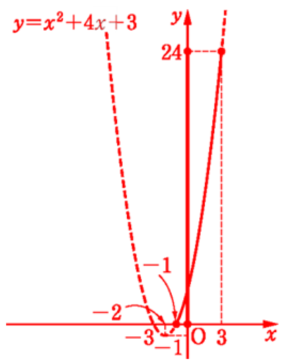
$x = 5$ のとき　最大値 16

$x = 0$ のとき　最小値 -9

(2)　$y = x^2 + 4x + 3$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$

$y = x^2 + 4x + 3$

$= (x+2)^2 - 1$



$-1 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。

したがって

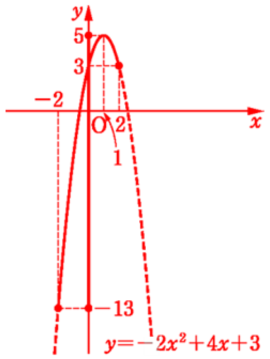
$x = 3$ のとき　最大値 24

$x = -1$ のとき　最小値 0

(3)　$y=-2x^2+4x+3\quad(-2 \leqq x \leqq 2)$

$y=-2x^2+4x+3$

$\quad=-2(x-1)^2+5$



$-2 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。

したがって

$x=1$ のとき　最大値 5

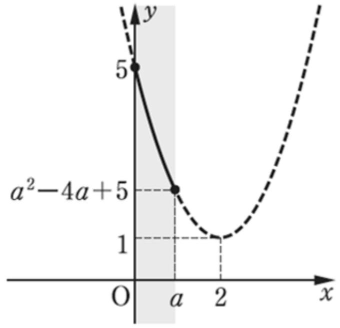
$x=-2$ のとき　最小値 -13

応用例題 4　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=x^2-4x+5\ (0\leqq x\leqq a)$ の最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

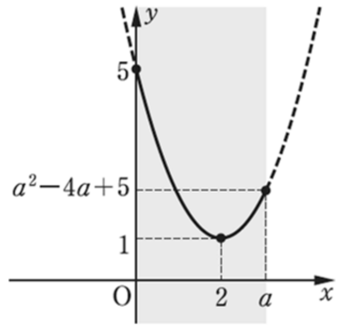
考え方　$y=x^2-4x+5$ のグラフの軸は直線（　$x=2$　）である。定義域に 2 を含まない場合と，含む場合に分けて考える。

解　与えられた 2 次関数は，（　$y=(x-2)^2+1$　）と変形できる。

（ⅰ）　$0<a<2$ のとき
$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
$x=a$ のとき　最小値 a^2-4a+5



（ⅱ）　$2\leqq a$ のとき
$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
$x=2$ のとき　最小値 1



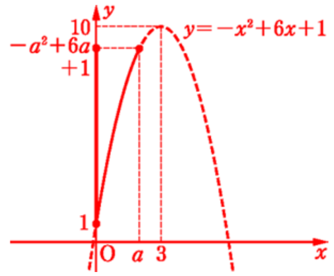
（ⅰ），（ⅱ）より

$$\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+5 \\ 2\leqq a \text{ のとき} & x=2 \text{ で最小値 } 1 \end{cases}$$

問 16　$a>0$ のとき，2 次関数 $y=-x^2+6x+1\ (0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

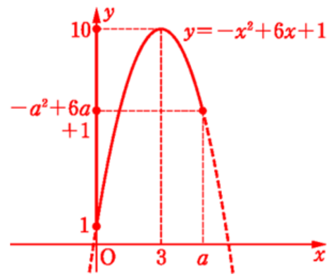
$y=-x^2+6x+1$
$=-(x-3)^2+10$

（ⅰ）$0<a<3$ のとき
$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



したがって
$x=a$ のとき　最大値 $-a^2+6a+1$

（ⅱ）$3\leqq a$ のとき
$0\leqq x\leqq a$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



したがって
$x=3$ のとき　最大値 10

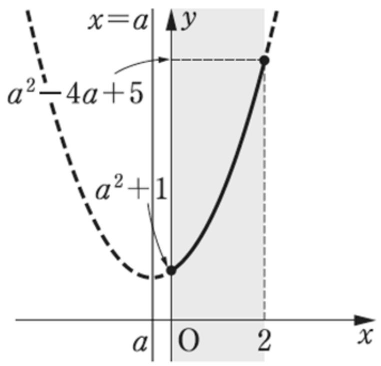
$0<a<3$ のとき
$x=a$ で最大値 $-a^2+6a+1$
$3\leqq a$ のとき
$x=3$ で最大値 10

応用例題 5　2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

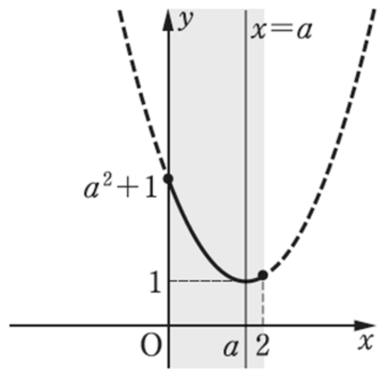
考え方　$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ のグラフの軸は直線 $x = a$ である。a の値と定義域の関係に着目して，場合を分けて考える。

解　与えられた 2 次関数は，（　$y = (x - a)^2 + 1$　）と変形できる。

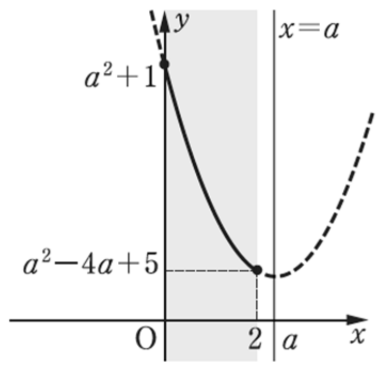
（ⅰ）$a < 0$ のとき
0 $\leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
$x = 0$ のとき（　最小値 $a^2 + 1$　）



（ⅱ）$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
$0 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
$x = a$ のとき（　最小値 1　）



（ⅲ）$2 < a$ のとき
$0 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。
したがって
$x = 2$ のとき（　最小値 $a^2 - 4a + 5$　）



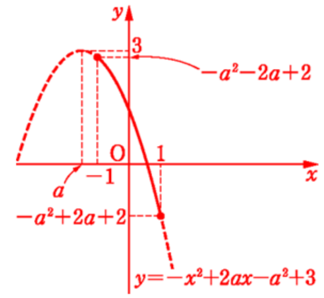
（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x = 0 \text{ で最小値 } a^2 + 1 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & x = a \text{ で最小値 } 1 \\ 2 < a \text{ のとき} & x = 2 \text{ で最小値 } a^2 - 4a + 5 \end{cases}$$

問 17　2 次関数 $y = -x^2 + 2ax - a^2 + 3$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

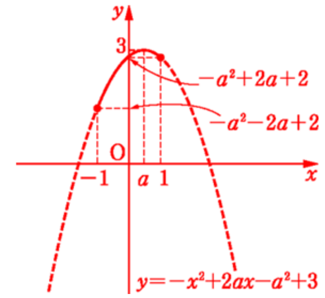
$y = -x^2 + 2ax - a^2 + 3 = -(x - a)^2 + 3$

（ⅰ）$a < -1$ のとき
$-1 \leqq x \leqq 1$ における関数のグラフは図の放物線の実線部分である。



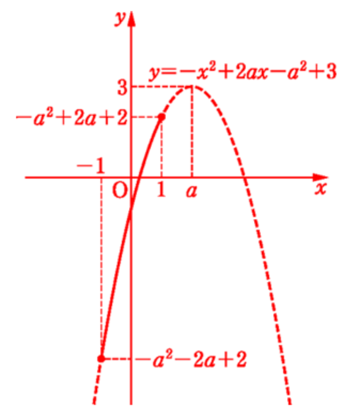
したがって，$x = -1$ のとき　最大値 $-a^2 - 2a + 2$

（ⅱ）$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき
$-1 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは図の放物線の実線部分である。



したがって，$x = a$ のとき最大値 3

（ⅲ）$1 < a$ のとき
$-1 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは図の放物線の実線部分である。



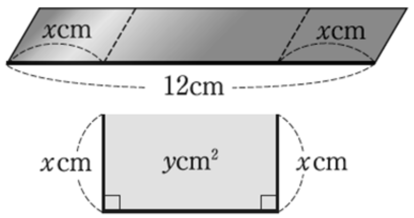
したがって，$x = 1$ のとき　最大値 $-a^2 + 2a + 2$

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より
$a < -1$ のとき
$x = -1$ で最大値 $-a^2 - 2a + 2$
$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき
$x = a$ で最大値 3
$1 < a$ のとき
$x = 1$ で最大値 $-a^2 + 2a + 2$

最大・最小の応用

（教科書 p.87）

応用例題 6 幅 12cm の銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cm の溝をつくる。溝の断面積を $y$cm^2 とするとき，y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



解 底の幅は（　$(12-2x)$cm　）であり

$x>0$，$12-2x>0$

であるから

$0<x<6$　……①

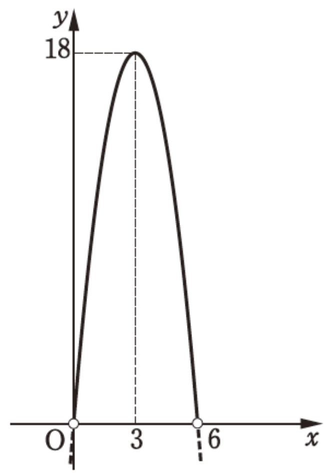
この範囲において面積は

$y=x(12-2x)$

$=12x-2x^2$

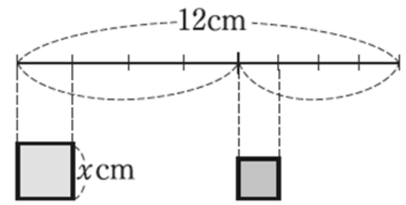
$=-2(x-3)^2+18$

①の範囲における y のグラフは，
右の図の放物線の実線部分である。
ゆえに



（　$x=3$ のとき，y は最大値 18 をとる。　）

問 18 長さ 12cm の針金を 2 つに切り，そのおのおのを折り曲げて右の図のように 2 つの正方形をつくる。2 つの正方形の面積の和が最小となるのは，針金をどのように切ったときか。また，そのときの最小値を求めよ。



1 つの正方形の 1 辺の長さが x であるから，針金を折り曲げて正方形をつくるためには，$4x$cm の針金が必要となる。このとき，残りの針金の長さを $(12-4x)$cm とすると，もう 1 つの正方形の 1 辺の長さは $(3-x)$cm となる。

このとき，$x>0$，$3-x>0$ であるから

$0<x<3$

2 つの正方形の面積の和を $y$cm^2 とすると

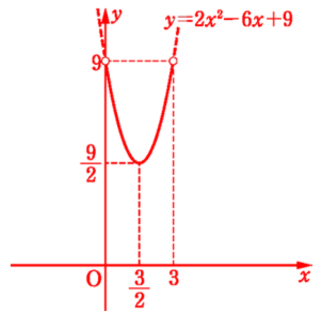
$y=x^2+(3-x)^2$

$=2x^2-6x+9$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

したがって，$0<x<3$ の範囲において，y は $x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。このとき 2 つの針金の長さは，どちらも 6cm となる。

ゆえに，2 つの正方形の面積の和が最小になるのは，針金を 2 等分したときであり，そのときの最小値は $\frac{9}{2}$cm^2 である。



4 2次関数の決定

頂点や軸に関する条件が与えられたとき

（教科書 p.88）

例題 7 グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(1,\ -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=-2$ で，2点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通る。

解 (1) 頂点が点 $(1,\ -3)$ であるから，

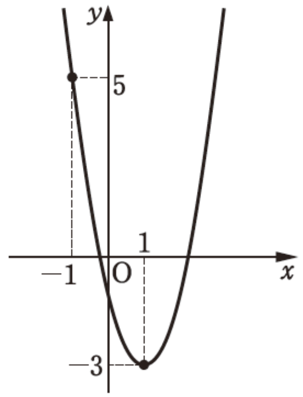
求める2次関数は（ $y=a(x-1)^2-3$ ）と表される。

グラフが点（ $(-1,\ 5)$ ）を通るから

（ $5=4a-3$ ）

これを解いて（ $a=2$ ）

よって（ $y=2(x-1)^2-3$ ）



(2) 軸が直線 $x=-2$ であるから，

求める2次関数は（ $y=a(x+2)^2+q$ ）

と表される。

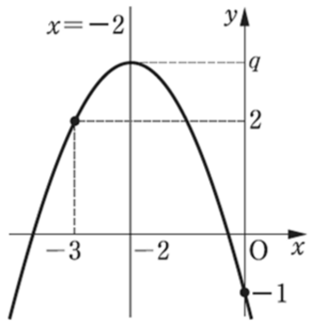
グラフが2点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通るから

$2=a+q$

$-1=4a+q$

これを解いて（ $a=-1,\ q=3$ ）

よって（ $y=-(x+2)^2+3$ ）



問 19 グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1,\ 2)$ で，点 $(1,\ -6)$ を通る。

頂点が点 $(-1,\ 2)$ であるから，求める2次関数は

$y=a(x+1)^2+2$

と表される。グラフが点 $(1,\ -6)$ を通るから

$-6=4a+2$

$a=-2$

よって　$y=-2(x+1)^2+2$

(2) 頂点の x 座標が2で，2点 $(0,\ 7)$，$(6,\ 13)$ を通る。

頂点の x 座標が2であるから，求める2次関数は

$y=a(x-2)^2+q$

と表される。グラフが2点 $(0,\ 7)$，$(6,\ 13)$ を通るから

$$\begin{cases} 7=4a+q \\ 13=16a+q \end{cases}$$

これを解いて

$a=\frac{1}{2},\ q=5$

よって　$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+5$

グラフ上の3点が与えられたとき

（教科書 p.89）

グラフが 3 点 A$(-1,\ -3)$，B$(2,\ 0)$，C$(3,\ -7)$ を通るような 2 次関数を求めてみよう。求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とすると

点 A$(-1,\ -3)$ を通るから　$a - b + c = -3$　……①

点 B$(2,\ 0)$ を通るから　$4a + 2b + c = 0$　……②

点 C$(3,\ -7)$ を通るから　$9a + 3b + c = -7$　……③

したがって，①，②，③を同時に満たす a，b，c を求めればよい。①，②，③のような 3 文字についての 1 次方程式を連立したものを，（[1]　連立 3 元 1 次方程式　）という。

例14 次の連立 3 元 1 次方程式を解いてみよう。

$a - b + c = -3$　……①

$4a + 2b + c = 0$　……②

$9a + 3b + c = -7$　……③

まず，文字 c を消去する。

② − ①より　$3a + 3b = 3$

すなわち　$a + b = 1$　……④

③ − ②より　$5a + b = -7$　……⑤

④，⑤を a，b について解くと　$a = -2,\ b = 3$

これらを①に代入して c を求めると　$c = 2$

ゆえに　$a = -2,\ b = 3,\ c = 2$

例 14 から，グラフが 3 点 A$(-1,\ -3)$，B$(2,\ 0)$，C$(3,\ -7)$ を通るような 2 次関数は，
（[1]　$y = -2x^2 + 3x + 2$　）である。

問20 次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 2a - 4b + c = 18 \\ 4a + 16b + c = -40 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b + c = 2 & \cdots\cdots① \\ 2a - 4b + c = 18 & \cdots\cdots② \\ 4a + 16b + c = -40 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

② − ①より $a - 5b = 16$　……④

③ − ②より $2a + 20b = -58$

$a + 10b = -29$　……⑤

⑤ − ④より $15b = -45$

よって $b = -3$

この値を④に代入して

$a + 15 = 16$

$a = 1$

a，b の値を①に代入して

$1 - 3 + c = 2$

$c = 4$

ゆえに $a = 1,\ b = -3,\ c = 4$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y+3z=20 & \cdots\cdots ① \\ 2x+7y-3z=13 & \cdots\cdots ② \\ 3x+8y+2z=38 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①×2－②より　$-3y+9z=27$

$-y+3z=9$ ……④

①×3－③より

$-2y+7z=22$ ……⑤

④×2－⑤より $-z=-4$

$z=4$

この値を④に代入して

$-y+12=9$

$y=3$

y，z の値を①に代入して

$x+6+12=20$

$x=2$

ゆえに $x=2$，$y=3$，$z=4$

例題 8 グラフが 3 点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るような 2 次関数を求めよ。

解 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。この関数のグラフが 3 点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るから

$a+b+c=6$ ……①

$4a-2b+c=-9$ ……②

$16a+4b+c=3$ ……③

まず，②－①より，c を消去して

$3a-3b=-15$

すなわち

$a-b=-5$ ……④

③－②より，c を消去して

$12a+6b=12$

すなわち

$2a+b=2$ ……⑤

次に，④，⑤を a，b について解くと

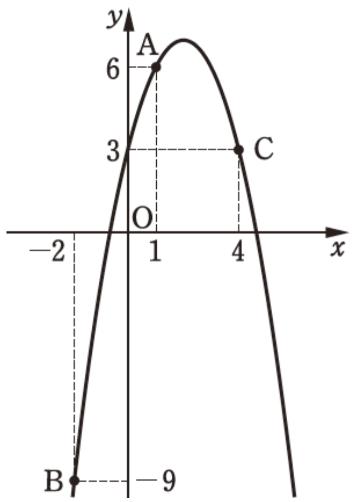
$a=-1$，$b=4$

これらを①に代入して c を求めると

$c=3$

ゆえに，求める 2 次関数は

$y=-x^2+4x+3$



問 21 グラフが次の 3 点 A，B，C を通るような 2 次関数を求めよ。

(1) A(−1, −7), B(2, −1), C(3, −7)

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

この関数のグラフが 3 点 A(−1, −7), B(2, −1), C(3, −7) を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=-7 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=-7 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②－①より $3a+3b=6$

$a+b=2$ ……④

③－②より $5a+b=-6$ ……⑤

⑤－④より $4a=-8$

$a=-2$

この値を④に代入して

$-2+b=2$

$b=4$

a，b の値を①に代入して

$-2-4+c=-7$

$c=-1$

ゆえに，求める 2 次関数は

$y=-2x^2+4x-1$

(2) A(−2, −3), B(0, −1), C(1, 3)

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

この関数のグラフが 3 点 A(−2, −3), B(0, −1), C(1, 3) を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-3 & \cdots\cdots ① \\ c=-1 & \cdots\cdots ② \\ a+b+c=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②を①，③に代入して

$4a-2b=-2$ ……④

$a+b=4$ ……⑤

次に，④，⑤を a，b について解くと

$a=1$，$b=3$

ゆえに，求める 2 次関数は

$y=x^2+3x-1$

問 題

（教科書 p.91）

1 $f(x)=x^2-2x+3$ において，次の値を求めよ。

(1) $f(3)$

$f(3)=3^2-2\cdot 3+3=6$

(2) $f(a-1)$

$f(a-1)=(a-1)^2-2(a-1)+3=a^2-4a+6$

(3) $f(2-a)$

$f(2-a)=(2-a)^2-2(2-a)+3=a^2-2a+3$

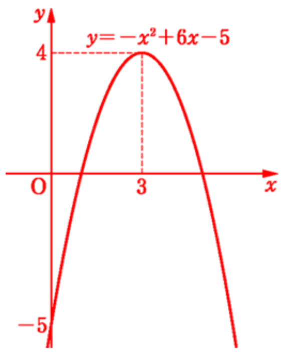
2 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=-x^2+6x-5$

$y=-x^2+6x-5$

$\quad=-(x-3)^2+4$

よって，グラフは図のようになる。



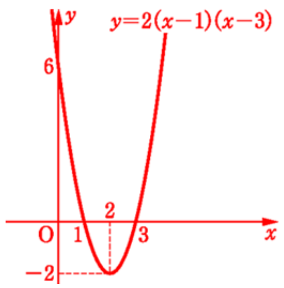
(2) $y=2(x-1)(x-3)$

$y=2(x-1)(x-3)$

$\quad=2(x^2-4x+3)$

$\quad=2(x-2)^2-2$

よって，グラフは図のようになる。



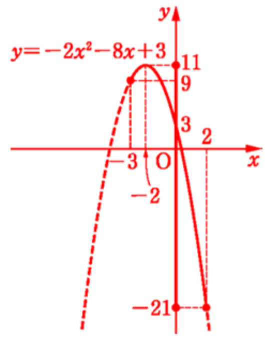
3 次の 2 次関数の値域を求めよ。

(1) $y=-2x^2-8x+3 \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$

$y=-2x^2-8x+3$

$\quad=-2(x+2)^2+11$

$-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実数部分である。



したがって，求める値域は

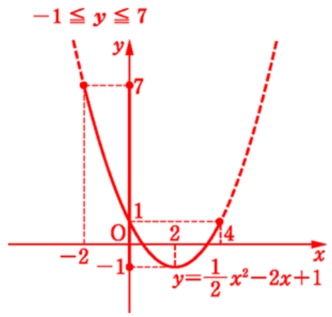
$-21 \leqq y \leqq 11$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1 \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

$\quad=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

$-2 \leqq x \leqq 4$ の範囲におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実数部分である。



したがって，求める値域は

$-1 \leqq y \leqq 7$

4　2 次関数 $y=x^2-2ax+1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問に答えよ。

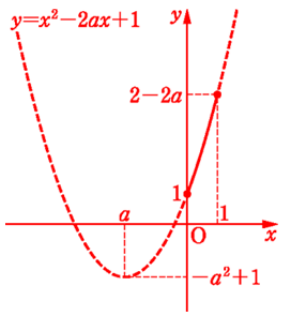
(1)　最小値を求めよ。
　また，そのときの x の値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。
　また，そのときの x の値を求めよ。

$y=x^2-2ax+1$
$\quad =(x-a)^2-a^2+1$

(1)　(ⅰ) $a<0$ のとき

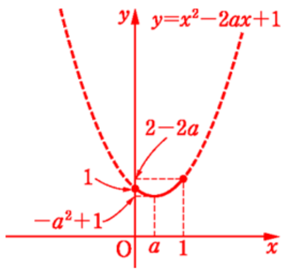
$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



したがって $x=0$ のとき最小値 1

(ⅱ) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

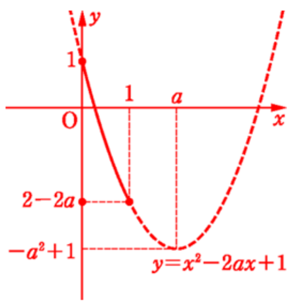
$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



したがって $x=a$ のとき最小値 $-a^2+1$

(ⅲ) $1<a$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実線部分である。



したがって $x=1$ のとき最小値 $2-2a$

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) より

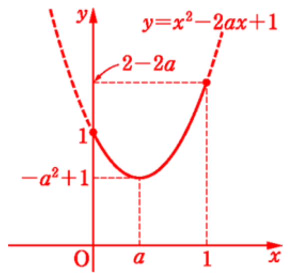
$a<0$ のとき
　$x=0$ で最小値 1

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき
　$x=a$ で最小値 $-a^2+1$

$1<a$ のとき
　$x=1$ で最小値 $2-2a$

(2)　(ⅰ)　$a<\frac{1}{2}$ のとき

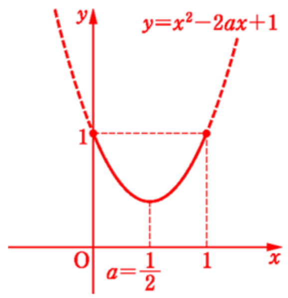
$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実数部分である。



したがって $x=1$ のとき最大値 $2-2a$

(ⅱ)　$a=\frac{1}{2}$ のとき

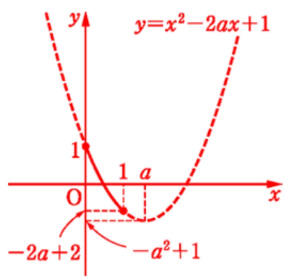
$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実数部分である。



したがって $x=0$，1 のとき最大値 1

(ⅲ) $a<\frac{1}{2}$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ におけるこの関数のグラフは，図の放物線の実数部分である。



したがって $x=0$ のとき最大値 1

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より

$a < \frac{1}{2}$ のとき　$x = 1$ で最大値 $2 - 2a$

$a < \frac{1}{2}$ のとき　$x = 0,\ 1$ で最大値 1

$\frac{1}{2} < a$ のとき　$x = 0$ で最大値 1

5 グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (1, 2) で，点 (4, −7) を通る。

頂点が点 (1, 2) であるから，求める 2 次関数は

$y = a(x-1)^2 + 2$

と表される。グラフが点 (4, −7) を通るから

$-7 = 9a + 2$

$a = -1$

よって　$y = -(x-1)^2 + 2$

(2)　3 点 (−1, 5)，(−2, −3)，(1, 9) を通る。

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

この関数のグラフが 3 点 (−1, 5)，(−2, −3)，(1, 9) を通るから

$$\begin{cases} a - b + c = 5 & \cdots\cdots① \\ 4a - 2b + c = -3 & \cdots\cdots② \\ a + b + c = 9 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②−①より　$3a - b = -8$　……④

③−②より　$-3a + 3b = 12$　……⑤

次に，④，⑤を a，b について解くと

$a = -2,\ b = 2$

これらを①に代入して c を求めると

$c = 9$

ゆえに，求める 2 次関数は

$y = -2x^2 + 2x + 9$

(3)　$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動したもので，頂点が x 軸上にあり，点 (3, 8) を通る。

$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動したものであり，頂点が x 軸上にあるから，求める 2 次関数は

$y = \frac{1}{2}(x-p)^2$

と表される。グラフが点 (3, 8) を通るから

$8 = \frac{1}{2}(3-p)^2$

よって，$(3-p)^2 = 16$ より　$3 - p = \pm 4$

ゆえに　$p = 7,\ -1$

したがって

$y = \frac{1}{2}(x-7)^2$，$y = \frac{1}{2}(x+1)^2$

(4)　x 軸と点 (−2, 0)，(3, 0) で交わり，y 軸と点 (0, −12) で交わる。

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

この関数のグラフが 3 点 (−2, 0)，(3, 0)，(0, −12) を通るから

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 & \cdots\cdots① \\ 9a + 3b + c = 0 & \cdots\cdots② \\ c = -12 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③を①，②に代入して

$4a - 2b = 12$　……④

$9a + 3b = 12$　……⑤

次に，④，⑤を a，b について解くと

$a = 2,\ b = -2$

ゆえに，求める 2 次関数は

$y = 2x^2 - 2x - 12$

6 2 次関数 $y = x^2 + 2x + c\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 1 のとき，c の値を求めよ。

$y = x^2 + 2x + c$

$= (x+1)^2 + c - 1$

$-2 \leqq x \leqq 2$ において，この 2 次関数は $x = 2$ で

最大値 $8 + c$ をとる。

よって　$8 + c = 1$

ゆえに　$c = -7$

7 $x=1$ のとき最大値 5 をとり，$x=-1$ のとき $y=1$ となるような 2 次関数を求めよ。

求める 2 次関数は，$x=1$ のとき最大値をとるから，上に凸の放物線で，$a<0$ とすると

$$y=a(x-1)^2+5$$

と表される。

また，$x=-1$ のとき，$y=1$ であるから

$$1=a(-1-1)^2+5$$

よって　$a=-1$

これは $a<0$ を満たす。

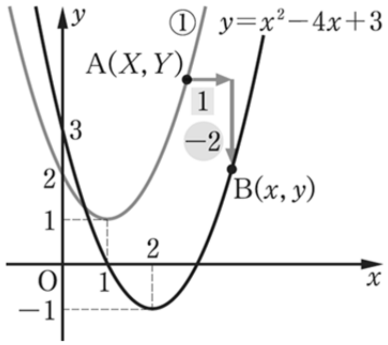
ゆえに，求める 2 次関数は

$$y=-(x-1)^2+5$$

参考　グラフの平行移動

（教科書 p.92）

例 1　2 次関数 $y=x^2-2x+2$　……①
のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。
①のグラフは，$y=(x-1)^2+1$ より，点（　$(1,\ 1)$　）を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める 2 次関数のグラフは，頂点が点（　$(2,\ -1)$　）で下に凸の放物線である。
ゆえに，求める 2 次関数は
$y=(x-2)^2-1$　すなわち　$y=x^2-4x+3$　……②



例 1 は次のように考えることもできる。
①のグラフ上の点 $A(X,\ Y)$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ移動した点を $B(x,\ y)$ とすると
$x=X+1,\ \ y=Y-2$　……③
$A(X,\ Y)$ は①上にあるから
$Y=X^2-2X+2$　……④
③の X, Y を④に代入すると，
$X=x-1,\ \ Y=y+2$
より
$y+2=(x-1)^2-2(x-1)+2$　すなわち　$y=x^2-4x+3$

よって，点 B は②の 2 次関数のグラフ上にある。これは，①で x の代わりに $x-1$，y の代わりに $y+2$ としたものに一致する。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを
x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動した関数のグラフは，x を $x-p$，y を $y-q$ で置き換えた関数のグラフになる。よって
$y-q=f(x-p)$　すなわち　関数　$y=f(x-p)+q$

問1　次の 2 次関数のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

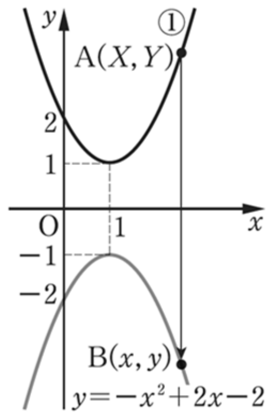
(1)　$y=2x^2+8x-1$
2 次関数 $y=2x^2+8x-1$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数は
$y=2(x+3)^2+8(x+3)-1+1$
すなわち　$y=2x^2+20x+42$

(2)　$y=-x^2+7x-7$
2 次関数 $y=-x^2+7x-7$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数は
$y=-(x+3)^2+7(x+3)-7+1$
すなわち　$y=-x^2+x+6$

参考　グラフの対称移動

（教科書 p.93）

例 1　2 次関数 $y = x^2 - 2x + 2$　……①
のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めてみよう。
①のグラフは，点（　$(1,\ 1)$　）を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める 2 次関数のグラフは，頂点が点（　$(1,\ -1)$　）で上に凸の放物線である。
ゆえに，求める 2 次関数は
$y = -(x-1)^2 - 1$　すなわち　$y = -x^2 + 2x - 2$　……②



例 1 は次のように考えることもできる。
①のグラフ上の点 $A(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $B(x,\ y)$ とすると
$x = X,\ y = -Y$　……③
$A(X,\ Y)$ は①上にあるから　$Y = X^2 - 2X + 2$　……④
③の X，Y を④に代入すると，（　$X = x,\ Y = -y$　）より
（　$-y = x^2 - 2x + 2$　）すなわち（　$y = -x^2 + 2x - 2$　）
よって，点 B は②の 2 次関数のグラフ上にある。
一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフを
x 軸に関して対称移動すると
$-y = f(x)$　すなわち　関数 $\boldsymbol{y = -f(x)}$
y 軸に関して対称移動すると
関数 $\boldsymbol{y = f(-x)}$
原点に関して対称移動すると
$-y = f(-x)$　すなわち　関数 $y = -f(-x)$
のグラフになる。

問1　2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数は
$y = -(-x^2 - 6x - 2)$
すなわち　$y = x^2 + 6x + 2$
2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを y 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数は
$y = -(-x)^2 - 6(-x) - 2$
すなわち　$y = -x^2 + 6x - 2$
2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 2$ のグラフを原点に関して対称移動した放物線をグラフとする 2 次関数は
$y = -\{-(-x)^2 - 6(-x) - 2\}$
すなわち　$y = x^2 - 6x + 2$