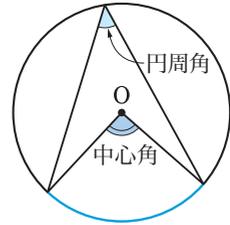


3 節 三角形への応用

1 正弦定理

中学校では、次の円周角の定理を学んだ。

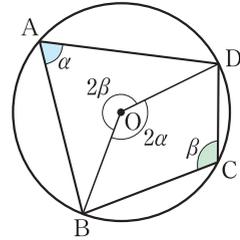
1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である。



5

円周角の定理を用いて、円に内接する四角形の対角の和を求めてみよう。

右の図のように、 $\angle DAB = \alpha$ 、 $\angle BCD = \beta$ とすると、円周角の定理により、弧BCDに対する中心角は 2α 、弧DABに対する中心角は 2β となる。



10

ゆえに、 $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ より $\alpha + \beta = 180^\circ$
すなわち $A + C = 180^\circ$

同様に $B + D = 180^\circ$

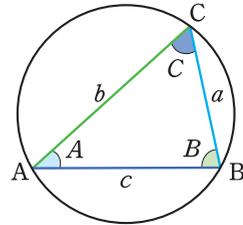
したがって、円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

今後、 $\triangle ABC$ の3つの角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の対辺の長さをそれぞれ a 、 b 、 c で表す。

三角形の3つの頂点を通る円はただ1つ定まる。

これを、その三角形の**外接円**という。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次の



15

正弦定理 が成り立つ。

20

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

証明

まず、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 、すなわち

$$a = 2R \sin A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

(i) A が鋭角であるとき

点Bを通る直径を引き、 BA' とする。

円周角の定理から $\angle BAC = \angle BA'C$

また、 BA' は直径であるから

$$\angle A'CB = 90^\circ$$

よって $a = BA' \sin A' = 2R \sin A$

(ii) A が直角であるとき

BC は外接円の直径であり

$\sin 90^\circ = 1$ であるから

$$a = 2R = 2R \sin A$$

(iii) A が鈍角であるとき

点Bを通る直径を引き、 BD とすると

$$\angle DCB = 90^\circ$$

四角形 $ABDC$ は円に内接するから

$$A + D = 180^\circ$$

よって $a = BD \sin D = 2R \sin(180^\circ - A)$

$$= 2R \sin A$$

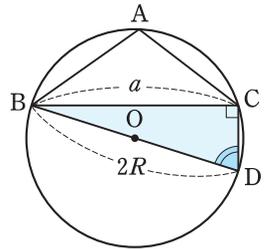
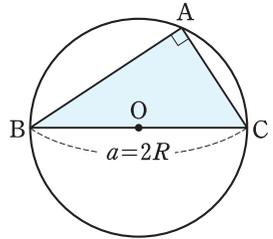
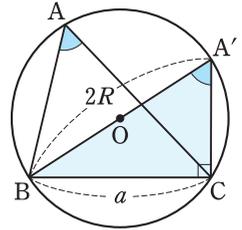
したがって、(i), (ii), (iii)のいずれの場合にも、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

同様に、次の等式が成り立つ。

$$b = 2R \sin B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c = 2R \sin C \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



5

10

15

20

25

三角形の1辺の長さや2つの角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題

正弦定理の利用 [1]

- 1 $\triangle ABC$ において、 $a = 12$ 、 $B = 60^\circ$ 、 $C = 75^\circ$ のとき、 b を求めよ。
また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

5

解

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ であるから}$$

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

ゆえに $b = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 6\sqrt{6} \quad \dots\dots \text{答}$$

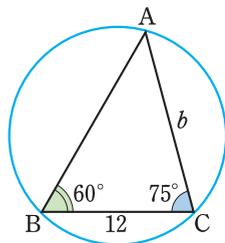
また $2R = \frac{a}{\sin A}$

$$= \frac{12}{\sin 45^\circ}$$

$$= 12 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

ゆえに $R = 6\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{答}$



10

15

- 問1 $\triangle ABC$ において、 $a = 10$ 、 $A = 120^\circ$ 、 $C = 15^\circ$ のとき、 b を求めよ。
また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

- 問2 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。 $A = 135^\circ$ 、 $R = 4$ のとき、 a を求めよ。

20

三角形の2辺の長さとその辺に対する1つの対角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の2つの角の大きさを求めることができる。

例題

正弦定理の利用 [2]

2 $\triangle ABC$ において、 $b = 2$ 、 $c = \sqrt{6}$ 、 $B = 45^\circ$ のとき、 C 、 A を求めよ。

解 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{c \sin B}{b} \\ &= \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

したがって $C = 60^\circ$ または $C = 120^\circ$

$C = 60^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

$C = 120^\circ$ のとき

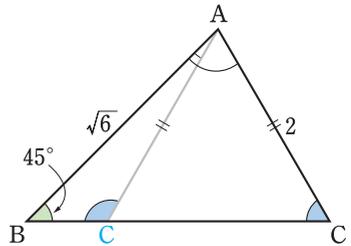
$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) \\ &= 15^\circ \end{aligned}$$

〈答〉 $C = 60^\circ$ 、 $A = 75^\circ$ または $C = 120^\circ$ 、 $A = 15^\circ$

問3 $\triangle ABC$ において、 $a = 2\sqrt{2}$ 、 $b = 2$ 、 $A = 135^\circ$ のとき、 B 、 C を求めよ。

問4 $\triangle ABC$ において、 $b = 6$ 、 $c = 2\sqrt{3}$ 、 $C = 30^\circ$ のとき、 A 、 B 、 a を求めよ。

2辺と1対角から他の対角を求めるとき、正弦定理を利用



2 余弦定理

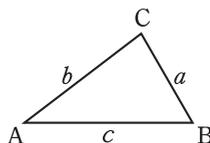
△ABC の1つの角と3辺の長さの間に次の **余弦定理** が成り立つ。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



5

証明

△ABC に対して右の図のように座標軸を定めると、3頂点 A, B, C の座標は次のようになる。

$$A(0, 0), B(c, 0)$$

$$C(b \cos A, b \sin A)$$

また、 $CH \perp AB$ となるような x 軸上の点 $H(b \cos A, 0)$ をとる。直角三角形 BCH を考えて

$$a^2 = BC^2 = HB^2 + HC^2$$

である。点Hの位置に応じて

$$HB = c - b \cos A$$

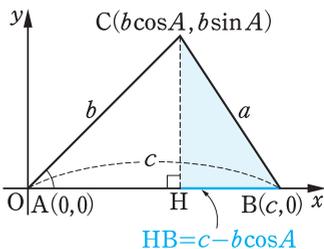
$$\text{または } HB = b \cos A - c$$

が成り立つ。

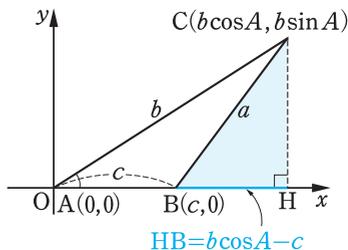
いずれの場合も

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

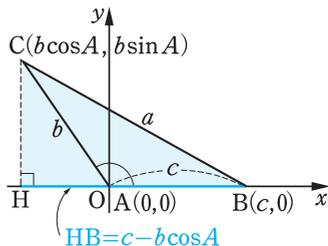
同様にして、他の2つの式も得られる。



10



15

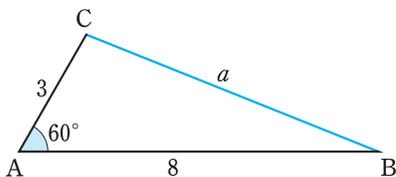


20

例 1 $\triangle ABC$ において、 $b = 3$ 、 $c = 8$ 、 $A = 60^\circ$ ならば、余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 9 + 64 - 24 = 49 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ より } a = \sqrt{49} = 7$$



問 5 $\triangle ABC$ において、 $a = 1$ 、 $b = \sqrt{3}$ 、 $C = 150^\circ$ のとき、 c を求めよ。

例題

余弦定理の利用

3 $\triangle ABC$ において、 $b = \sqrt{7}$ 、 $c = 3$ 、 $B = 60^\circ$ のとき、 a を求めよ。

解 余弦定理により、 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ で

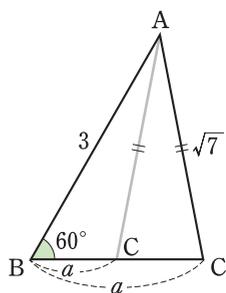
あるから

$$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cos 60^\circ$$

$$\text{よって } a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0$$

$$\text{ゆえに } a = 1, 2$$



問 6 $\triangle ABC$ において、 $a = \sqrt{7}$ 、 $b = 1$ 、 $A = 120^\circ$ のとき、 c を求めよ。

余弦定理を変形すると、次の式が得られる。

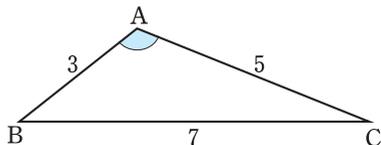
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

よって、三角形の3辺の長さから、角の大きさを求めることができる。

例 2 $\triangle ABC$ において、 $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 3$ ならば、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } A = 120^\circ$$



問 7 $\triangle ABC$ において、 $a = 5$ 、 $b = 8$ 、 $c = 7$ のとき、 C を求めよ。

三角形の辺と角の大きさ

△ABC において、余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

であるから、 $\cos A$ の値の符号と、 $b^2 + c^2 - a^2$ の値の符号は一致する。

したがって、次のことがわかる。

$$a^2 < b^2 + c^2 \iff A < 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \iff A = 90^\circ$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \iff A > 90^\circ$$

5

問 8 次の △ABC において、 A は鋭角、直角、鈍角のいずれであるか。

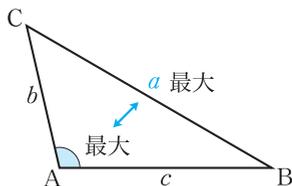
(1) $a = 11, b = 8, c = 7$

(2) $a = 7, b = 5, c = 6$

10

三角形において、角の大小と対辺の大小は一致することが知られている。とくに、最大辺の対角が最大角である。

すべての角が鋭角である三角形を



鋭角三角形 といひ、ある角が鈍角である三角形を **鈍角三角形** といふ。^(*)

15

例 3 $a = 7, b = 6, c = 4$ のとき、△ABC は鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを調べてみよう。

最大辺が a であるから、その対角 A が最大角である。

ここで $a^2 = 7^2 = 49, b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

よって $a^2 < b^2 + c^2$

20

したがって $A < 90^\circ$

最大角 A が鋭角であるから、△ABC は鋭角三角形である。

問 9 $a = 4, b = 8, c = 9$ のとき、△ABC は鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるか。

(*) 鈍角三角形においても、最大角以外の角はすべて鋭角である。

三角形の決定

三角形のいくつかの辺や角がわかっているとき、残りの辺や角を求めてみよう。

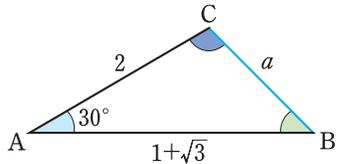
例題 三角形の決定

5 **4** $\triangle ABC$ において、 $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$ のとき、 a , B , C を求めよ。

解 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cos 30^\circ \\ &= 4 + (4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2辺とその間の角から角の対辺を求めるとき、余弦定理を利用



10 $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ …… 答

また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

より

15
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \div \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

B の対辺 b は最大辺ではないから、 B は最大角ではない。

よって、 B は鋭角であるから

$B = 45^\circ$ …… 答

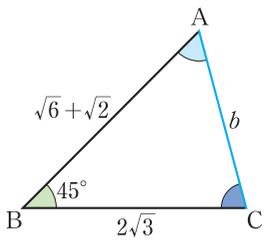
したがって

20 $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ …… 答

問10 $\triangle ABC$ において

$a = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$

のとき、 b , A , C を求めよ。



3 三角形の面積

△ABC の面積 S を、2 辺とその間の角によって表してみよう。

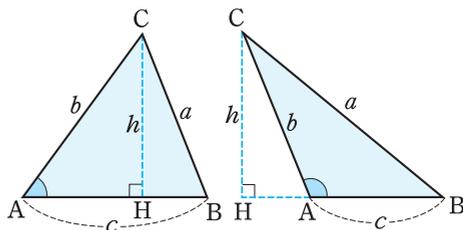
△ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすると、右の図において

$$h = b \sin A$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin A$$

他の 2 辺とその間の角からも、同様の公式が得られる。



三角形の面積

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

問11 次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b = 2, c = 5, A = 60^\circ$

(2) $a = 7, b = 4, C = 135^\circ$

例題

三角形の面積

5 $a = 13, b = 14, c = 15$ である △ABC の面積 S を求めよ。

発展 P.153

解 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

よって $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ ◀ $\sin A > 0$

ゆえに、三角形の面積の公式により

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84$$

問12 $a = 13, b = 8, c = 7$ である △ABC の面積 S を求めよ。 → p.151 問題14

円に内接する四角形

円に内接する四角形の対角の和が 180° であることを利用して、その面積を求めてみよう。

応用
例題

円に内接する四角形の面積

5

6

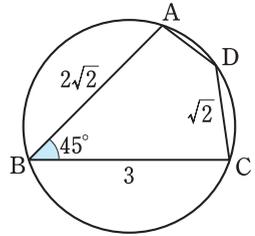
円に内接する四角形 ABCD において

$$AB = 2\sqrt{2}, \quad BC = 3, \quad CD = \sqrt{2},$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

とするとき、AD を求めよ。

また、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



10

解

対角線 AC を引き、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ \\ &= 8 + 9 - 12 = 5 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ より } AC = \sqrt{5}$$

四角形 ABCD は円に内接するから $D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

15

AD = x として、 $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$\text{すなわち } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{これを解いて } x = 1, -3$$

$$x > 0 \text{ より } AD = 1 \quad \cdots \cdots \text{答}$$

20

また $S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ$$

$$= \frac{7}{2} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

問13

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 5$, $BC = 4$, $CD = 4$,

$\angle ABC = 60^\circ$ とするとき、AD を求めよ。

また、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

25

→ p.154 練習問題4

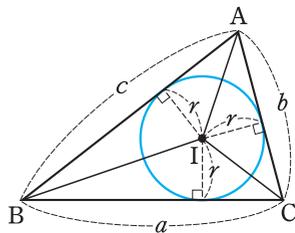
三角形の内接円の半径と面積

$\triangle ABC$ の3辺 AB , BC , CA のすべてに接する円はただ1つ存在する。これを $\triangle ABC$ の **内接円** という。

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r , 中心を I とすると, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

すなわち
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$



5

例題

三角形の内接円の半径

7

3辺の長さが $a = 3$, $b = 7$, $c = 8$ である $\triangle ABC$ がある。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めよ。

10

解

(1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{13}{14}$$

よって
$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

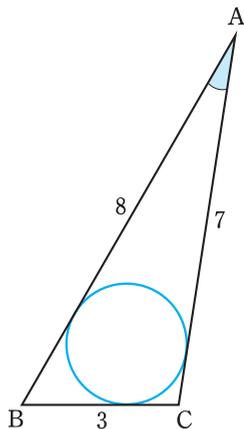
ゆえに, 求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin A = 6\sqrt{3}$$

(2) $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3+7+8)$$

ゆえに, 求める半径 r は
$$r = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



15

20

問14 $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$ である $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めよ。

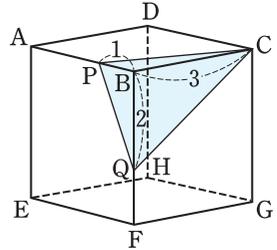
4 空間図形の計量

空間図形を扱うときには、その図形に含まれる三角形に着目すると、これまで三角形について学んだことが役立つことがある。

例題

空間における三角形 [1]

- 5 **8** 1辺の長さが3の立方体 $ABCD-EFGH$ の辺 AB 上に点 P 、辺 BF 上に点 Q を
 $BP = 1, BQ = 2$
 となるようにとる。このとき、 $\triangle CPQ$ の面積 S を求めよ。



- 10 **解** $\triangle CPQ$ の3辺の長さは

$$PQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$CP = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$CQ = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

である。 $\angle CPQ = \theta$ とおくと、余弦定理により

15
$$\cos \theta = \frac{CP^2 + PQ^2 - CQ^2}{2 \cdot CP \cdot PQ} = \frac{10 + 5 - 13}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

よって
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

ゆえに、求める面積 S は

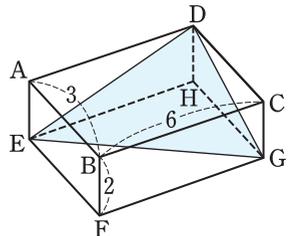
$$S = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PQ \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

- 20 **問15** 右の図の直方体 $ABCD-EFGH$ において

$$AB = 3, BC = 6, BF = 2$$

である。このとき、 $\triangle DEG$ の面積 S を求めよ。

→ p.154 練習問題5



**応用
例題**

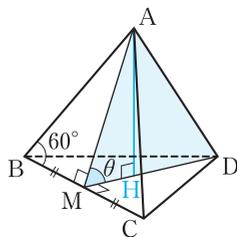
空間における三角形 [2]

9

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において、辺 BC の中点を M とし、頂点 A から DM に下ろした垂線を AH とする。

$\angle AMD = \theta$ とするとき、次の間に答えよ。

- (1) $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) AH の長さを a で表せ。


解

- (1) AM および DM の長さを求める。

M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$$\angle ABM = 60^\circ, \quad \angle AMB = 90^\circ$$

$$\text{よって} \quad AM = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{同様に} \quad DM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$\triangle AMD$ に対して余弦定理を用いると、 $\cos \theta$ の値は

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot DM} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - a^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (2) (1) で得られた $\cos \theta$ の値から $\sin \theta$ の値を求めると

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$AH = AM \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

問16 例題9において、正四面体 ABCD の体積 V を a で表せ。

問題

11 $\triangle ABC$ において、 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ であるとき、3辺 a, b, c の間に成り立つ関係式を答えよ。

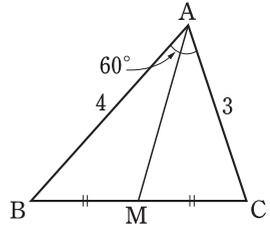
また、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

発展 P.152

5 12[†] $\triangle ABC$ において、 $AB = 4, AC = 3, A = 60^\circ$ とし、辺 BC の中点を M とする。

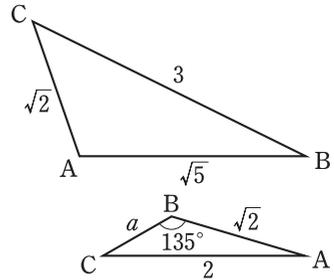
このとき、次の値を求めよ。

- (1) BC (2) $\cos B$
 (3) AM



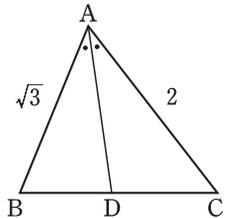
10 13 $\triangle ABC$ において、その面積を S とするとき、次の間に答えよ。

- (1) $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ のとき、 C, S を求めよ。
 (2) $c = \sqrt{2}, b = 2, B = 135^\circ$ のとき、 C, a, S を求めよ。

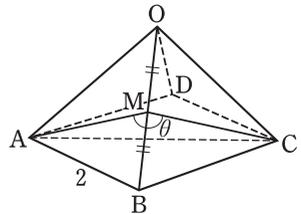


14[†] $\triangle ABC$ において、 $AB = \sqrt{3}, AC = 2, A = 60^\circ$ とし、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。
 (2) AD を求めよ。



15 1 辺の長さが 2 の正方形 $ABCD$ を底面とし、4 個の正三角形を側面とする正四角錐 $OABCD$ がある。辺 OB の中点を M 、 $\angle AMC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。



発展

三角形の形状

三角形において、与えられた辺や角の三角比の等式から、その三角形がどのような形であるかを求めてみよう。

例題

三角形の形状

1

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

$$\sin A \cos B = \sin C$$

考え方

正弦定理や余弦定理を用いて、与えられた等式から三角形の辺についての関係式を導く。

解

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c}{2R}$$

両辺に $4cR$ を掛けると

$$c^2 + a^2 - b^2 = 2c^2$$

よって

$$a^2 = b^2 + c^2$$

したがって、 $\triangle ABC$ は $A = 90^\circ$ の直角三角形である。

問 1

$\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

(1) $a \sin A = b \sin B$

(2) $a \cos A + b \cos B = c \cos C$

発展

ヘロンの公式

3辺 a, b, c が与えられたときの $\triangle ABC$ の面積 S を求めてみよう。

$S = \frac{1}{2}bc\sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\sin^2 A \\ &= b^2c^2(1 - \cos^2 A) \\ &= b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

余弦定理により $1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様に $1 - \cos A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

ここで、 $a+b+c = 2s$ とおくと
 $-a+b+c = 2(s-a)$, $a-b+c = 2(s-b)$, $a+b-c = 2(s-c)$

よって $1 + \cos A = \frac{2s(s-a)}{bc}$, $1 - \cos A = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを $\textcircled{1}$ に代入して $4S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$

したがって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

例 1 3 辺の長さが 4, 5, 7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

ヘロンの公式により, $s = \frac{4+5+7}{2} = 8$ であるから

$$S = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = 4\sqrt{6}$$

問 1 3 辺の長さが 5, 6, 9 である三角形の面積 S を求めよ。