1節　関数とグラフ

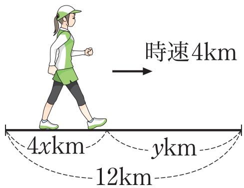
1　関数

関数

例 1　家から 12km 離れた場所から，時速 4km で家まで歩いた。出発してから x 時間経過したときの，家までの距離を $y$km とすると

$$y=12-4x$$

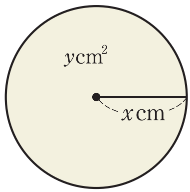
と表される。ただし，$0 \leqq x \leqq 3$ である。



例 2　半径 $x$cm の円があり，その面積を $y\text{cm}^2$ とすると

$$y=\pi x^2$$

と表される。ただし，$x>0$ である。



このように，2つの変数 x，y があって，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ1つだけ定まるとき，**y は x の関数** であるという。

y が x の関数であることを

$$y=f(x), \qquad y=g(x)$$

などと表す。関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応する y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ で表し，$f(a)$ を $x=a$ のときの **関数 $\boldsymbol{f(x)}$ の値** という。

例 3　$f(x)=2x^2-3x+5$ のとき

$$f(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+5=4$$

$$f(-2)=2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+5=19$$

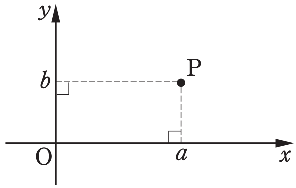
$$f(a)=2a^2-3a+5$$

問 1　$f(x)=2x^2-2$ のとき，$f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(a+1)$ を求めよ。

→ p.91 問題1

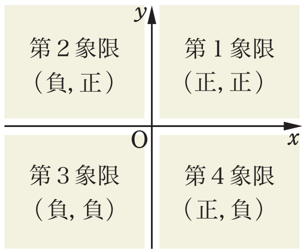
関数のグラフ

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点Ｐの位置は，右の図のように，実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を点Ｐの **座標** といい，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ と書く。



座標軸の定められた平面を **座標平面** という。

座標平面は座標軸によって４つの部分に分けられる。これらを右の図のように，それぞれ **第１象限**（しょうげん），**第２象限**，**第３象限**，**第４象限** という。ただし，座標軸上の点はどの象限にも含まれないものとする。



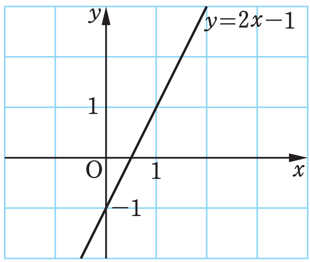
問２　次の点はどの象限にあるか。

(1)　A$(3,\ -2)$　　(2)　B$(6,\ 5)$　　(3)　C$(-5,\ -1)$　　(4)　D$(-3,\ 1)$

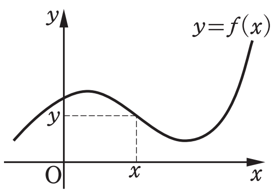
たとえば，１次関数

$$y = 2x - 1$$

のグラフは，y 軸上の点 $(0,\ -1)$ を通り，傾き２の直線である。このグラフは，$y = 2x - 1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなる図形である。



一般に，関数 $y = f(x)$ において，x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点全体からなる図形を，**関数 $\boldsymbol{y = f(x)}$ のグラフ** という。



関数の定義域・値域

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を，この関数の **定義域** という。定義域をはっきり示す必要があるときには

$$y=f(x)\quad(a \leqq x \leqq b)$$

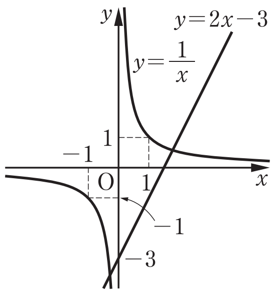
と書くことが多い。たとえば，72 ページ例 1 の関数の場合，定義域は $0 \leqq x \leqq 3$ であるから

$$y=12-4x\quad(0 \leqq x \leqq 3)$$

と表す。本書では，とくに断らないときは，関数 $y=f(x)$ の定義域は，$f(x)$ を表す式が意味をもつような x の値全体と考える。

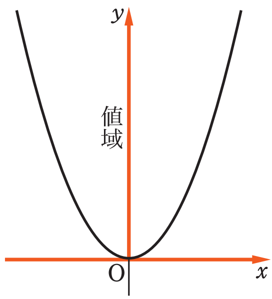
例 4　(1)　関数 $y=2x-3$ の定義域は，すべての実数である。

(2)　関数 $y=\dfrac{1}{x}$ の定義域は，0 以外のすべての実数である。



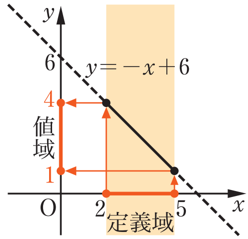
関数 $y=f(x)$ において，x が定義域内のすべての値をとるときの y の値全体を，この関数の **値域** という。

例 5　関数 $y=x^2$ の値域は，下のグラフより，$y \geqq 0$ である。



問 3　関数 $y=-x^2$ のグラフをかいて，値域を求めよ。

定義域が制限された関数の値域を求めてみよう。



例 6　関数 $y=-x+6\ (2\leqq x\leqq 5)$ の値域は，右のグラフより

$$1\leqq y\leqq 4$$

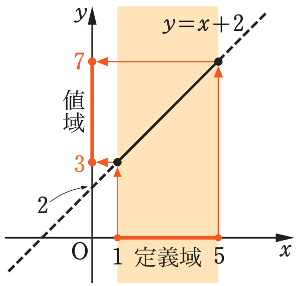
である。

問 4　次の関数のグラフをかいて，値域を求めよ。

(1)　$y=2x-1\quad(-1\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=-3x+11\quad(1\leqq x\leqq 3)$

関数の最大値・最小値

関数 $y=f(x)$ において，その値域に最大の値，最小の値があるとき，これらをそれぞれこの関数の **最大値**，**最小値** という。

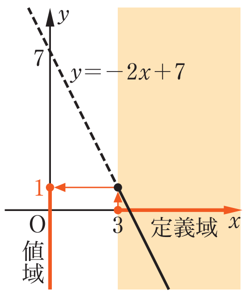


例 7　(1)　関数 $y=x+2\ (1\leqq x\leqq 5)$ の値域は，右のグラフより，$3\leqq y\leqq 7$ である。

よって　　$x=5$ のとき　最大値 7

　　　　　$x=1$ のとき　最小値 3

である。



(2)　関数 $y=-2x+7\ (x\geqq 3)$ の値域は，右のグラフより，$y\leqq 1$ である。

よって　　$x=3$ のとき　最大値 1

である。

また，y の値はいくらでも小さくすることができるから，最小値はない。

問 5　次の関数のグラフをかいて，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x\quad(2\leqq x\leqq 4)$　　(2)　$y=-x+4\quad(-1\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x+1\quad(x\leqq 4)$

2　2次関数とそのグラフ

関数　$y=2x^2$，　$y=x^2+3x$，　$y=-2x^2+4x+1$

などのように，y が x の2次式で表されるとき，y は x の **2次関数** という。

一般に，x の2次関数は，a，b，c を定数として

$$y=ax^2+bx+c$$

の形に表すことができる。ただし，$a \neq 0$ とする。

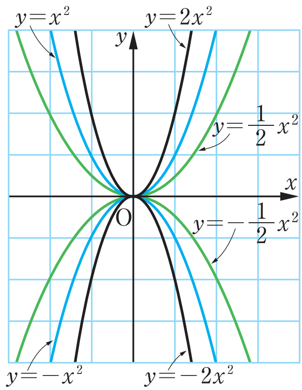
$y=ax^2$ のグラフ

はじめに，基本的な2次関数 $y=ax^2$ について復習しておこう。

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸に関して対称である。このグラフが表す曲線を **放物線** という。

一般に，放物線の対称軸を **軸**，軸と放物線の交点を **頂点** という。

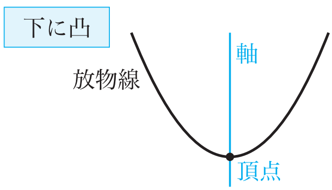
$y=ax^2$ のグラフは，軸が y 軸，頂点が原点である放物線である。

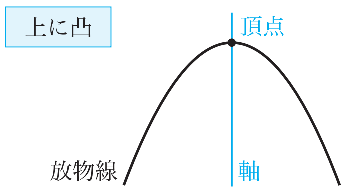


また，この放物線は

$a>0$ のときは **下に凸**（とつ），　$a<0$ のときは **上に凸**

であるという。





問6　次の2次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=3x^2$　　(2)　$y=-3x^2$　　(3)　$y=-\frac{1}{3}x^2$

$y=ax^2+q$ のグラフ

図形を，一定の方向に，一定の距離だけ動かす移動を **平行移動** という。

2次関数の式と，そのグラフの平行移動の関係について調べてみよう。

例 8　2つの2次関数

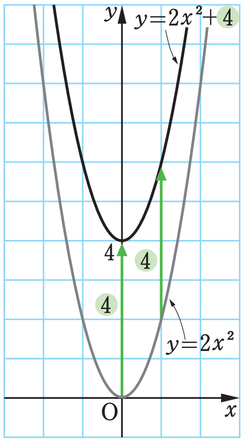
$$y=2x^2 \quad と \quad y=2x^2+4$$

を比べることによって，$y=2x^2+4$ のグラフをかいてみよう。

これらの2つの関数について，次のような表をつくる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$2x^2+4$	…	22	12	6	4	6	12	22	…

$+4$



上の表から，同じ x の値に対応する y の値は，$2x^2+4$ の方が $2x^2$ より4だけ大きいことがわかる。

したがって，$y=2x^2+4$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを

　　y 軸方向に4

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ 4)$ である。

一般に，$y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

y 軸方向に q だけ平行移動

した放物線である。(*) その **軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ q)$** である。

問 7　次の2次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-4$　　(2)　$y=-3x^2+3$

(*) たとえば，“y 軸方向に -1 だけ平行移動する”ということは，“y 軸の負の向きに1だけ平行移動する”ということである。

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

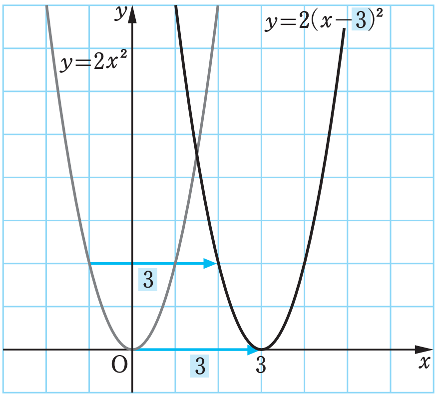
例 9　２つの２次関数

$$y=2x^2 \quad と \quad y=2(x-3)^2$$

を比べることによって，$y=2(x-3)^2$ のグラフをかいてみよう。

これらの２つの関数について，次のような表をつくる。

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$



上の表から，同じ y の値をとる x の値が右に３だけずれていることがわかる。

したがって，

$y=2(x-3)^2$ のグラフは，

$y=2x^2$ のグラフを

　　x 軸方向に３

だけ平行移動した放物線である。

この放物線の軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3,\ 0)$ である。

注意　点 $(p,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線を **直線 $x=p$** と表す。

一般に，$y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

した放物線である。その **軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$** である。

問 8　次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-(x-4)^2$　　　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

例 10　2次関数

$$y=2x^2$$

のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動すると

$$y=2(x-3)^2$$

のグラフになる。さらに，y 軸方向に4だけ平行移動すると

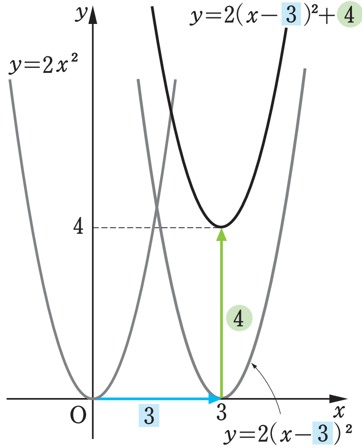
$$y=2(x-3)^2+4$$

のグラフになる。したがって

$y=2(x-3)^2+4$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に3，y 軸方向に4だけ平行移動

した放物線である。その軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3,\ 4)$ である。



一般に，次のことが成り立つ。

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

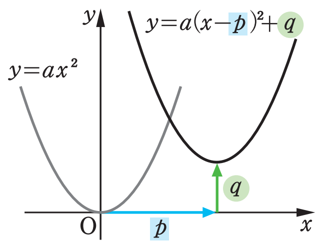
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，

$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線である。

軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$



問 9　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-2)^2+1$　　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+3)^2+2$

問 10　2次関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動して，頂点を次の点に移したとき，それをグラフとする2次関数を求めよ。

(1)　$(-3,\ 4)$　　(2)　$(2,\ -5)$　　(3)　$(-1,\ -6)$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例 11　2次関数

$$y=2x^2+4x-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフをかいてみよう。

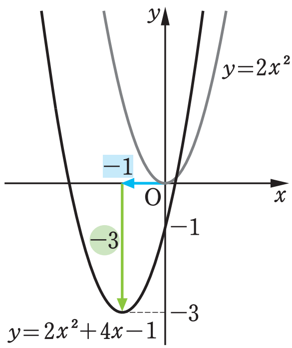
まず，① を変形して，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+4x-1 \\ &= 2(x^2+2x)-1 &\longleftarrow\ &x^2 \text{ の係数でくくり出す} \\ &= 2\{\underline{(x+1)^2-1^2}\}-1 &\longleftarrow\ &\{(x+(x\text{の係数の半分}))^2-(x\text{の係数の半分})^2\} \\ &= 2(x+1)^2-2-1 &\longleftarrow\ &\{\ \ \}\text{をはずす} \\ &= 2(x+1)^2-3 &\longleftarrow\ &\text{定数項を整理する} \end{aligned}$$

(2の半分)

この結果から，① のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線であることがわかる。

したがって，① のグラフは軸が直線 $x=-1$，頂点が点 $(-1,\ -3)$ の放物線である。また，$x=0$ のとき $y=-1$ であるから，グラフは y 軸と点 $(0,\ -1)$ で交わる。



例 11 のようにして，ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成** という。

問 11　次の2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。

(1)　$y=x^2+4x+5$　　(2)　$y=3x^2-6x+4$

(3)　$y=-x^2+6x+1$　　(4)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+4x+6$

(5)　$y=x^2+3x+4$　　(6)　$y=-2x^2+2x+3$

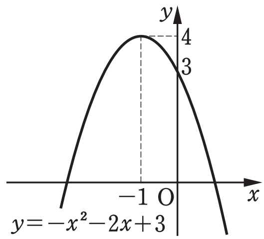
例題 1　　$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=-x^2-2x+3$ のグラフの軸と頂点を求めよ。
また，そのグラフをかけ。

解　与えられた2次関数は

$$\begin{aligned} y &= -(x^2+2x)+3 \\ &= -\{(x+1)^2-1^2\}+3 \\ &= -(x+1)^2+4 \end{aligned}$$

と変形できる。



よって，求めるグラフは軸が直線 $x=-1$，頂点が点 $(-1,\ 4)$ の上に凸の放物線である。また，グラフは y 軸と点 $(0,\ 3)$ で交わるから，上の図のようになる。

問12　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2+12x+8$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-1$

(3)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$　　(4)　$y=-x^2-x+1$　→ p.91 問題2

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の式は，次のように変形できる。

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

したがって，次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフで

軸は直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　**頂点は点** $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

注意　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである放物線を，単に，放物線 $y=ax^2+bx+c$ といい，$y=ax^2+bx+c$ をこの放物線の方程式という。

$y=ax^2+bx+c$ の形で表される放物線は，放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。ここでは，x^2 の係数が等しい2つの放物線の一方を平行移動して他方に重ねることを考えてみよう。

例題 2　　グラフの平行移動

2次関数 $y=x^2+2x+3$ のグラフをどのように平行移動すると，2次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフになるか。

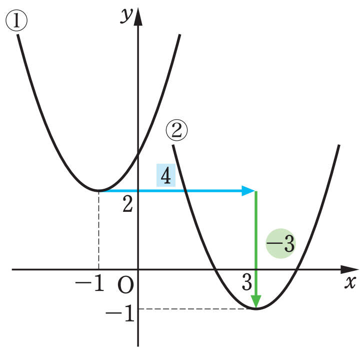
考え方　x^2 の係数が等しい2つの2次関数のグラフは，平行移動して重ねることができるから，放物線の頂点が重なるように，平行移動するとよい。

解　2つの2次関数を

$$y=x^2+2x+3 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=x^2-6x+8 \quad \cdots\cdots ②$$

とおく。



① の2次関数は

$$y=(x+1)^2+2$$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(-1,\ 2)$ である。

② の2次関数は

$$y=(x-3)^2-1$$

と変形できるから，グラフの頂点は点 $(3,\ -1)$ である。

したがって，① のグラフを

x 軸方向に 4，　y 軸方向に -3

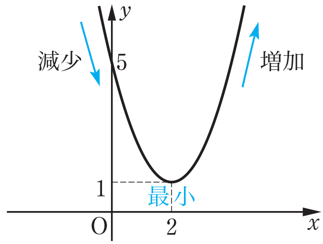
だけ平行移動すれば，② のグラフになる。

問13　2次関数 $y=-x^2+8x-13$ のグラフをどのように平行移動すると，2次関数 $y=-x^2-4x+2$ のグラフになるか。

3　2次関数の最大・最小

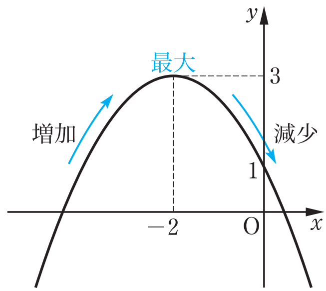
グラフを利用して，2次関数の最大値・最小値を求めてみよう。

例12　2次関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフは，$y=(x-2)^2+1$ より，頂点が点 $(2,\ 1)$ の下に凸の放物線である。
右の図より，この関数は $x=2$ のときに最小値1をとる。



また，y はいくらでも大きい値をとるから，最大値はない。

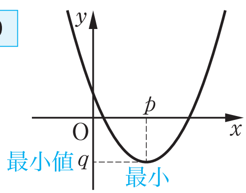
例13　2次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$ のグラフは，$y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2+3$ より，頂点が点 $(-2,\ 3)$ の上に凸の放物線である。
右の図より，この関数は $x=-2$ のとき最大値3をとる。



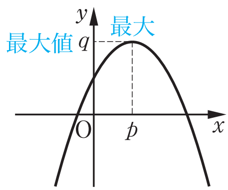
また，y はいくらでも小さい値をとるから，最小値はない。

2次関数は，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することによって，そのグラフから最大値または最小値を求めることができる。

$a>0$



$a<0$



問14　次の2次関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$　　(2)　$y=-2x^2+3x$

定義域が限られたときの最大値・最小値

定義域がある範囲に制限されている2次関数の最大値，最小値を調べるには，グラフの頂点と定義域の両端における関数の値を比較すればよい。

例題 3 定義域が限られたときの最大・最小

2次関数 $y=x^2-2x-2$ において，定義域が次の場合の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $-2 \leqq x \leqq 3$　　(2) $2 \leqq x \leqq 4$

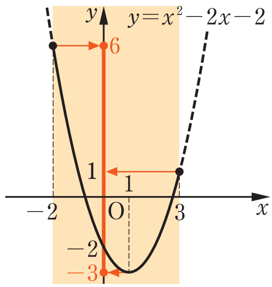
解 与えられた2次関数は，$y=(x-1)^2-3$ と変形できる。

(1) $-2 \leqq x \leqq 3$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x=-2$ のとき　最大値 6

$x=1$ のとき　最小値 -3

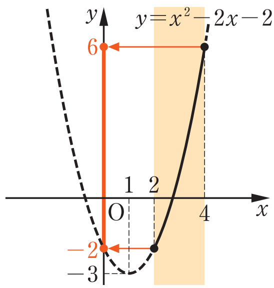


(2) $2 \leqq x \leqq 4$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

したがって

$x=4$ のとき　最大値 6

$x=2$ のとき　最小値 -2



問15 次の2次関数について，（　）に示した定義域における最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^2-9$　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

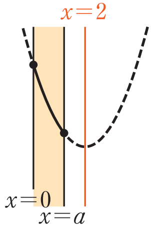
(2) $y=x^2+4x+3$　$(-1 \leqq x \leqq 3)$

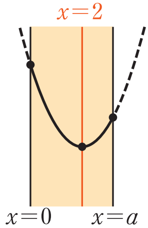
(3) $y=-2x^2+4x+3$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$

応用例題 4　定義域に文字を含む場合の最大・最小

$a>0$ のとき，2次関数 $y=x^2-4x+5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

考え方　$y=x^2-4x+5$ のグラフの軸は直線 $x=2$ である。定義域に 2 を含まない場合と，含む場合に分けて考える。



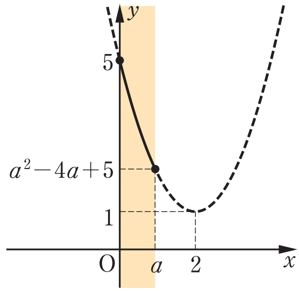


解　与えられた2次関数は，

$y=(x-2)^2+1$ と変形できる。

(i)　$0<a<2$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。

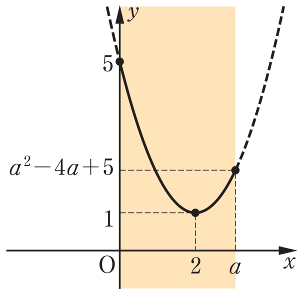


したがって

$x=a$ のとき　最小値 a^2-4a+5

(ii)　$2 \leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。



したがって

$x=2$ のとき　最小値 1

(i)，(ii) より
$$\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } a^2-4a+5 \\ 2 \leqq a \text{ のとき} & x=2 \text{ で最小値 } 1 \end{cases}$$

問16　$a>0$ のとき，2次関数 $y=-x^2+6x+1$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

応用例題 5　　軸に文字を含む場合の最大・最小

2次関数 $y=x^2-2ax+a^2+1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

考え方　$y=x^2-2ax+a^2+1$ のグラフの軸は直線 $x=a$ である。a の値と定義域の関係に着目して，場合を分けて考える。

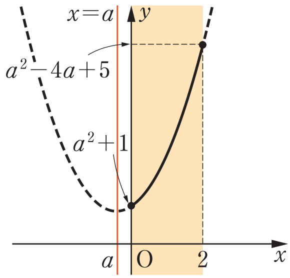
解　与えられた2次関数は，

$y=(x-a)^2+1$ と変形できる。

(i)　$a<0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。したがって

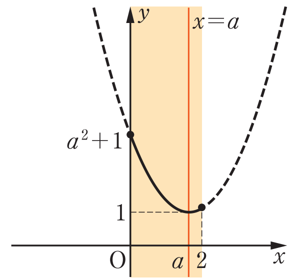
$x=0$ のとき　最小値 a^2+1



(ii)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。したがって

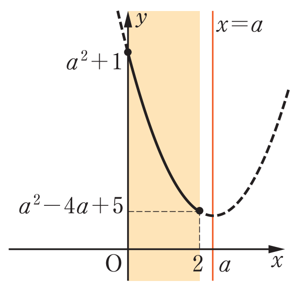
$x=a$ のとき　最小値 1



(iii)　$2<a$ のとき

$0 \leqq x \leqq 2$ におけるこの関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。したがって

$x=2$ のとき　最小値 a^2-4a+5



(i)，(ii)，(iii) より

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & x=0 \text{ で最小値 } a^2+1 \\ 0 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値 } 1 \\ 2<a \text{ のとき} & x=2 \text{ で最小値 } a^2-4a+5 \end{cases}$$

問17　2次関数 $y=-x^2+2ax-a^2+3\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

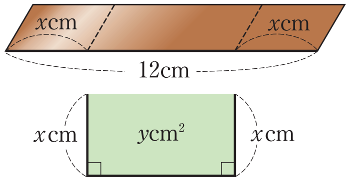
→ p.91 問題4

最大・最小の応用

2次関数の最大・最小の応用問題を考えてみよう。

応用 例題 6　　　　最大・最小の応用

幅12cmの銅板を，断面が右の図の形になるように折り曲げて，深さ $x$cmの溝（みぞ）をつくる。溝の断面積を $y$cm^2 とするとき，yの最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。



解　底の幅は $(12-2x)$ cm であり

$$x>0,\qquad 12-2x>0$$

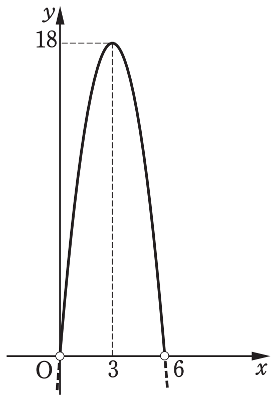
であるから

$$0<x<6 \qquad \cdots\cdots ①$$

この範囲において面積は

$$\begin{aligned} y &= x(12-2x) \\ &= 12x-2x^2 \\ &= -2(x-3)^2+18 \end{aligned}$$

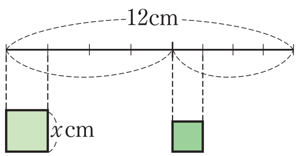
① の範囲における y のグラフは，右の図の放物線の実線部分である。



ゆえに

$x=3$ のとき，y は最大値18をとる。

問18　長さ12cmの針金を2つに切り，そのおのおのを折り曲げて右の図のように2つの正方形をつくる。2つの正方形の面積の和が最小となるのは，針金をどのように切ったときか。また，そのときの最小値を求めよ。



→ p.114 練習問題4

4　2次関数の決定

2次関数のグラフについて，いくつかの条件が与えられると，その2次関数が求められる。いろいろな場合について考えてみよう。

頂点や軸に関する条件が与えられたとき

例題 7　　2次関数の決定［1］

グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-2$ で，2点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通る。

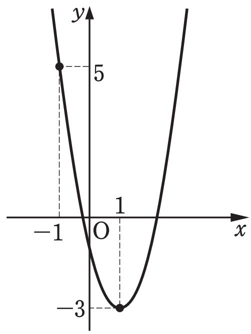
解　(1)　頂点が点 $(1,\ -3)$ であるから，

求める2次関数は　$y=a(x-1)^2-3$

と表される。グラフが点 $(-1,\ 5)$ を通るから　$5=4a-3$

これを解いて　$a=2$

よって　$y=2(x-1)^2-3$



(2)　軸が直線 $x=-2$ であるから，

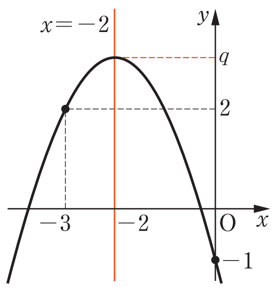
求める2次関数は　$y=a(x+2)^2+q$

と表される。グラフが2点 $(-3,\ 2)$，$(0,\ -1)$ を通るから

$$\begin{cases} 2=a+q \\ -1=4a+q \end{cases}$$

これを解いて　$a=-1$，$q=3$

よって　$y=-(x+2)^2+3$



問19　グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-1,\ 2)$ で，点 $(1,\ -6)$ を通る。

(2)　頂点の x 座標が2で，2点 $(0,\ 7)$，$(6,\ 13)$ を通る。

グラフ上の 3 点が与えられたとき

グラフが 3 点 A(−1, −3), B(2, 0), C(3, −7) を通るような 2 次関数を求めてみよう。求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とすると

点 A(−1, −3) を通るから　　$a-b+c=-3$　　…… ①

点 B(2, 0) を通るから　　$4a+2b+c=0$　　…… ②

点 C(3, −7) を通るから　　$9a+3b+c=-7$　　…… ③

したがって，①，②，③ を同時に満たす a, b, c を求めればよい。

①，②，③ のような 3 文字についての 1 次方程式を連立したものを，**連立 3 元 1 次方程式** という。

例 14　次の連立 3 元 1 次方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} a-b+c=-3 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=-7 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

まず，文字 c を消去する。

②−① より　　$3a+3b=3$

すなわち　　$a+b=1$　　…… ④

③−② より　　$5a+b=-7$　　…… ⑤

④，⑤ を a, b について解くと　　$a=-2$, $b=3$

これらを ① に代入して c を求めると　　$c=2$

ゆえに　　$a=-2$, $b=3$, $c=2$

例 14 から，グラフが 3 点 A(−1, −3), B(2, 0), C(3, −7) を通るような 2 次関数は，$y=-2x^2+3x+2$ である。

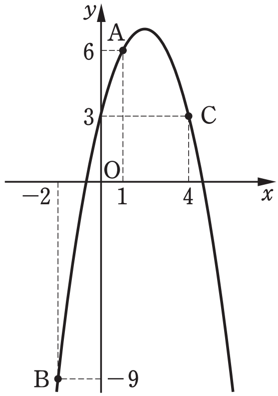
問20　次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 2a-4b+c=18 \\ 4a+16b+c=-40 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases}$

例題 8 2次関数の決定［2］

グラフが3点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るような2次関数を求めよ。

解 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。この関数のグラフが3点 A(1, 6), B(−2, −9), C(4, 3) を通るから



$$\begin{cases} a+b+c=6 & \cdots\cdots ① \\ 4a-2b+c=-9 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

まず，②−① より，c を消去して

$$3a-3b=-15$$

すなわち

$$a-b=-5 \qquad \cdots\cdots ④$$

③−② より，c を消去して

$$12a+6b=12$$

すなわち

$$2a+b=2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

次に，④，⑤ を a，b について解くと

$$a=-1,\ b=4$$

これらを ① に代入して c を求めると

$$c=3$$

ゆえに，求める2次関数は

$$y=-x^2+4x+3$$

問21 グラフが次の3点 A，B，C を通るような2次関数を求めよ。

(1) A(−1, −7), B(2, −1), C(3, −7)

(2) A(−2, −3), B(0, −1), C(1, 3)

問題

1　$f(x)=x^2-2x+3$ において，次の値を求めよ。

(1)　$f(3)$　　(2)　$f(a-1)$　　(3)　$f(2-a)$

2　次の2次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=-x^2+6x-5$　　(2)　$y=2(x-1)(x-3)$

→ p.114 練習問題1

3　次の2次関数の値域を求めよ。

(1)　$y=-2x^2-8x+3$　$(-3 \leqq x \leqq 2)$

(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$　$(-2 \leqq x \leqq 4)$

4[†]　2次関数 $y=x^2-2ax+1$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問に答えよ。

(1)　最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

→ p.115 練習問題12

5　グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(4,\ -7)$ を通る。

(2)　3点 $(-1,\ 5)$，$(-2,\ -3)$，$(1,\ 9)$ を通る。

(3)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを平行移動したもので，頂点が x 軸上にあり，点 $(3,\ 8)$ を通る。

(4)　x 軸と点 $(-2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0,\ -12)$ で交わる。

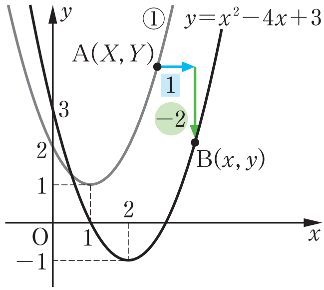
6　2次関数 $y=x^2+2x+c$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が1のとき，c の値を求めよ。

7　$x=1$ のとき最大値5をとり，$x=-1$ のとき $y=1$ となるような2次関数を求めよ。

参考　グラフの平行移動

例 1　２次関数 $y=x^2-2x+2$ ……①

のグラフを x 軸方向に１，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線をグラフとする２次関数を求めてみよう。



① のグラフは，$y=(x-1)^2+1$ より，点 $(1,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める２次関数のグラフは，頂点が点 $(2,\ -1)$ で下に凸の放物線である。

ゆえに，求める２次関数は

$$y=(x-2)^2-1 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-4x+3 \qquad \cdots\cdots ②$$

例１は次のように考えることもできる。

① のグラフ上の点 $A(X,\ Y)$ を x 軸方向に１，y 軸方向に -2 だけ移動した点を $B(x,\ y)$ とすると　$x=X+1,\ y=Y-2$ ……③

$A(X,\ Y)$ は ① 上にあるから　$Y=X^2-2X+2$ ……④

③ の $X,\ Y$ を ④ に代入すると，$X=x-1,\ Y=y+2$ より

$$y+2=(x-1)^2-2(x-1)+2 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-4x+3$$

よって，点Bは ② の２次関数のグラフ上にある。これは，① で x の代わりに $x-1$，y の代わりに $y+2$ としたものに一致する。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを **x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動** した関数のグラフは，x を $x-p$，y を $y-q$ で置き換えた関数のグラフになる。よって

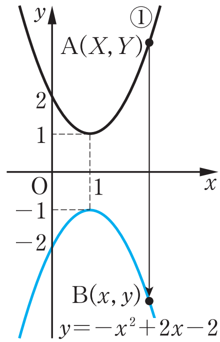
$$y-q=f(x-p) \quad \text{すなわち} \quad \text{関数} \ \boldsymbol{y=f(x-p)+q}$$

問 1　次の２次関数のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に１だけ平行移動した放物線をグラフとする２次関数を求めよ。

(1)　$y=2x^2+8x-1$　　　　(2)　$y=-x^2+7x-7$

参考 グラフの対称移動

例 1 2次関数 $y=x^2-2x+2$ ……①
のグラフを x 軸に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数を求めてみよう。
①のグラフは，点 $(1,\ 1)$ を頂点とする下に凸の放物線である。したがって，求める2次関数のグラフは，頂点が点 $(1,\ -1)$ で上に凸の放物線である。



ゆえに，求める2次関数は

$$y=-(x-1)^2-1 \quad すなわち \quad y=-x^2+2x-2 \quad ……②$$

同様に，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数はそれぞれ，$y=x^2+2x+2$，$y=-x^2-2x-2$ となる。

例1は次のように考えることもできる。

①のグラフ上の点 $\mathrm{A}(X,\ Y)$ を x 軸に関して対称移動した点を $\mathrm{B}(x,\ y)$ とすると $\quad x=X,\ y=-Y \quad ……③$

$\mathrm{A}(X,\ Y)$ は①上にあるから $\quad Y=X^2-2X+2 \quad ……④$

③の X，Y を④に代入すると，$X=x$，$Y=-y$ より

$$-y=x^2-2x+2 \quad すなわち \quad y=-x^2+2x-2$$

よって，点Bは②の2次関数のグラフ上にある。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを

x 軸に関して対称移動 すると $-y=f(x)$ すなわち 関数 $\boldsymbol{y=-f(x)}$

y 軸に関して対称移動 すると 関数 $\boldsymbol{y=f(-x)}$

原点に関して対称移動 すると $-y=f(-x)$ すなわち 関数 $\boldsymbol{y=-f(-x)}$

のグラフになる。

問 1 2次関数 $y=-x^2-6x-2$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した放物線をグラフとする2次関数をそれぞれ求めよ。