1節 式の計算

1 整式

単項式と多項式

この節では，文字式の性質や計算方法を学ぶことにしよう。

$2a$，$-x^2y$，3 のように，数，文字およびそれらの積として表される式を **単項式** という。単項式において，掛け合わされている文字の個数をその単項式の **次数** といい，数の部分を単項式の **係数** という。

例 1

(1)　$2a$ の次数は 1，係数は 2

(2)　$-x^2y$ の次数は 3，係数は -1

(3)　定数 3 は文字を含まないから，
　次数は 0，係数は 3

$$-x^2y = \boxed{-1} \times \underbrace{x \times x \times y}_{\boxed{3}\text{個}}$$

係数　　次数

問 1　次の単項式の次数と係数を答えよ。

(1)　$5a^4$　　(2)　xy^3　　(3)　-7

2 種類以上の文字を含む単項式では，特定の文字に着目して次数を考えることがある。このとき，他の文字は定数として扱う。

例 2　$-3x^2yz$ は，文字 x に着目すると，　次数は 2，係数は $-3yz$
文字 x と y に着目すると，次数は 3，係数は $-3z$

問 2　〔　〕内の文字に着目したとき，次の単項式の次数と係数を答えよ。

(1)　$4x^2y^3$　〔y〕　　(2)　$-2a^2bc^4$　〔b と c〕

$3xy^2-5y+7$ のように，単項式の和として表される式を **多項式** といい，その 1 つ 1 つの単項式を多項式の **項** という。

単項式と多項式を合わせて **整式** という。

注意　単項式を項の個数が 1 つだけの多項式と考えて，多項式を整式と同じ意味に用いることもある。

整式の整理

整式 $2x^2y+4xy+3x^2y$ における2つの項 $2x^2y$，$3x^2y$ のように，文字の部分が同じ項を **同類項** という。同類項を1つにまとめて

$$2x^2y+4xy+3x^2y=(2+3)x^2y+4xy=5x^2y+4xy$$

のように式を簡単にすることを，整式を **整理する** という。

問3　整式 $3x^2y+4xy-7x^2y+5xy-4$ を整理せよ。

整理された整式において，各項の次数のうち最も高いものを，その整式の **次数** といい，次数が n の整式を **n 次式** という。

また，整式の項の中で，文字を含まない項を **定数項** という。

例3　$4x^2+xy^2-2x+y+5$ は，3次式で，定数項は5である。

整式を特定の文字に着目して整理することがある。

例4　$4x^2+xy^2-2x+y+5$ を x について整理すると

$$4x^2+(y^2-2)x+(y+5)$$

となり，x については2次式で，定数項は $y+5$ である。

問4　次の整式は何次式で，定数項は何か。また，x については何次式で，その場合の定数項は何か。

(1)　$5x^3-3x^2y^3+y^4-8$　　(2)　$x^3+x^2y-y^2+7x-4y+1$

ある1つの文字に着目して整式を整理するとき，$5x^2-7x+8$ のように次数の高い項から順に並べることがある。このことを **降**(こう)**べきの順** に整理するという。逆に，$8-7x+5x^2$ のように次数の低い項から順に並べることを **昇**(しょう)**べきの順** に整理するという。

例5　$x^2+y^2-4xy+5x+3y+2$ を x について降べきの順に整理すると

$$x^2+(-4y+5)x+(y^2+3y+2)$$

問5　次の整式を x について降べきの順に整理せよ。

(1)　$5x^2-2+7x^3-3x$　　(2)　$2x^2+5xy+y^2-x+5y-4$

2 整式の加法・減法・乗法

整式の加法・減法

整式の和・差は，同類項をまとめることにより計算できる。

例 6 整式 $A=4x^2-3x+10$，$B=-2x^2+6$ のとき

$A+B=(4x^2-3x+10)+(-2x^2+6)$

$\quad=4x^2-3x+10-2x^2+6$ ◀かっこをはずす

$\quad=(4-2)x^2-3x+10+6$ ◀同類項をまとめる

$\quad=2x^2-3x+16$

$A-B=(4x^2-3x+10)-(-2x^2+6)$

$\quad=4x^2-3x+10+2x^2-6$ ◀かっこをはずす

$\quad=(4+2)x^2-3x+10-6$ ◀同類項をまとめる

$\quad=6x^2-3x+4$

例 6 は次のような形式で計算することもできる。

$$\begin{array}{rr} & 4x^2-3x+10 \\ +) & -2x^2 \qquad +\ 6 \\ \hline & 2x^2-3x+16 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 4x^2-3x+10 \\ -) & -2x^2 \qquad +\ 6 \\ \hline & 6x^2-3x+\ 4 \end{array}$$

◀同類項を縦にそろえる

問 6 次の整式 A，B について，$A+B$，$A-B$ を求めよ。

(1) $A=x^3-4x^2-3$，$B=3x^3-5x^2-x+3$

(2) $A=2x^2+y^2$，$B=-x^2-3xy+y^2$

例 7 $A=x^2+x-3$，$B=2x^2-x-4$ のとき

$3A-2B=3(x^2+x-3)-2(2x^2-x-4)$

$\quad=3x^2+3x-9-4x^2+2x+8$

$\quad=(3-4)x^2+(3+2)x-9+8=-x^2+5x-1$

問 7 $A=3x^2+2x+1$，$B=-x^2+3x-5$ のとき，次の式を計算せよ。

(1) $A+3B$　(2) $2A-B$　(3) $5(A-B)-3A$

➡ p.19 問題1

指数法則

a をいくつか掛けたものを a の **累乗** という。 a を n 個掛けたものを a の **n 乗** といい, a^n と表す。このとき, n を a^n の **指数** という。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}} = a^{n}$$

指数

とくに, $a^1 = a$ である。

累乗についての積の計算をしてみよう。

$$a^2a^3 = \underbrace{(a\times a)}_{2\text{個}}\times\underbrace{(a\times a\times a)}_{3\text{個}} = a^5 = a^{2+3}$$

$$(a^2)^3 = (a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a) = a^6 = a^{2\times3}$$

$$(ab)^3 = ab\times ab\times ab = a^3b^3$$

一般に, 次の **指数法則** が成り立つ。

指数法則

m, n が正の整数のとき

$$a^ma^n = a^{m+n},\qquad (a^m)^n = a^{mn},\qquad (ab)^n = a^nb^n$$

例 8　$a^3\times a^5 = a^{3+5} = a^8$,　　$(a^4)^3 = a^{4\times3} = a^{12}$

$(a^2b)^4 = (a^2)^4b^4 = a^{2\times4}b^4 = a^8b^4$

問 8　次の計算をせよ。

(1)　$a^6\times a^2$　　(2)　$(ab^3)^3$

(3)　$(x^3)^5\times x^2$　　(4)　$x^3\times(x^2y^3)^4\times y^2$

単項式の積は, 係数, 文字の部分の積をそれぞれ計算すればよい。

例 9　$3x^2y^4\times(-2x^4y)^3 = 3x^2y^4\times(-2)^3(x^4)^3y^3$

$= 3\times(-2)^3\times x^2x^{12}y^4y^3 = -24x^{14}y^7$

問 9　次の計算をせよ。

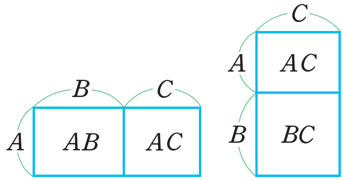
(1)　$2a^3\times\dfrac{1}{4}a^4$　　(2)　$4a^2b^4\times(-a^6b)$

(3)　$(-3x^2)^4\times(x^3)^2$　　(4)　$64x^3y\times\left(\dfrac{1}{2}xy^2\right)^5$

式の展開

整式の積を計算するには，次の分配法則を用いる。

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(A+B)C=AC+BC$$



整式の積を単項式の和の形に表すことを **展開** するという。

例 10　$7x(x^2+3xy-2y^2)=7x\cdot x^2+7x\cdot 3xy+7x\cdot(-2y^2)$
$$=7x^3+21x^2y-14xy^2$$

注意　$7x\cdot x^2$ の・は積を表し，×と同じ意味である。

問 10　次の式を展開せよ。

(1)　$3x(2x-7)$　　(2)　$(3x^2-2x+1)\times 5x^3$

(3)　$-4xy(2x^2-xy+y^2)$

例 11　$(4x+5)(x^2+3x-2)=4x(x^2+3x-2)+5(x^2+3x-2)$
$$=4x^3+12x^2-8x+5x^2+15x-10$$
$$=4x^3+(12+5)x^2+(-8+15)x-10$$
$$=4x^3+17x^2+7x-10$$

例 11 は次のような形式で計算することもできる。

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +3x & -2 \\
\times) & & 4x & +5 & \\
\hline
 & 4x^3 & +12x^2 & -8x & \\
 & & 5x^2 & +15x & -10 \\
\hline
 & 4x^3 & +17x^2 & +7x & -10
\end{array}$$

◀同類項を縦にそろえる

問 11　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+6)(2x+3)$　　(2)　$(5x-4)(3x+7)$

(3)　$(x+4)(2x^2-8x+5)$　　(4)　$(2x-7)(4x^2-2x+3)$

乗法公式

展開において，次の基本的な公式がよく利用される。発展 P.21

> **1**　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
>
> **2**　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
>
> **3**　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
>
> **4**　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例12
(1)　$(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

(2)　$(5x-y)^2=(5x)^2-2\cdot 5x\cdot y+y^2=25x^2-10xy+y^2$

(3)　$(4x+7y)(4x-7y)=(4x)^2-(7y)^2=16x^2-49y^2$

(4)　$(x+3)(x+6)=x^2+(3+6)x+3\cdot 6=x^2+9x+18$

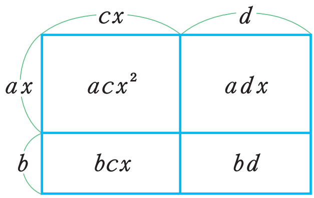
問12　次の式を展開せよ。

(1)　$(3x+y)^2$　　(2)　$(8x-3y)^2$

(3)　$(6x+5y)(6x-5y)$　　(4)　$(x+2)(x-7)$

x についての1次式の積は次のようになる。

$$(ax+b)(cx+d)=ax(cx+d)+b(cx+d)$$
$$=acx^2+adx+bcx+bd$$
$$=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

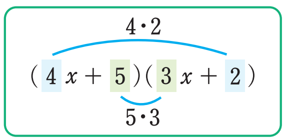


> **5**　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

例13
　$(4x+5)(3x+2)$

$=4\cdot 3x^2+(4\cdot 2+5\cdot 3)x+5\cdot 2$

$=12x^2+23x+10$



問13　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)(5x+2)$　　(2)　$(3x-4)(2x+5)$

例14 $(3x-7y)(x+3y)=3x^2+(3\cdot 3-7\cdot 1)xy-7\cdot 3y^2$

$$=3x^2+2xy-21y^2$$

問14 次の式を展開せよ。

(1) $(x-3y)(4x-y)$　　(2) $(4x+y)(3x-2y)$

展開の工夫

式の一部をひとまとめにして，1つの文字のようにみなすことによって，展開が容易になることがある。

例15 $(a+b+c)(a-b+c)$

$=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}$　◀ $(A+b)(A-b)$

$=(a+c)^2-b^2$　◀ A^2-b^2

$=a^2+2ac+c^2-b^2$

問15 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)(a+b-5)$　　(2) $(a-b+3)(a-b-7)$

(3) $(x-y-z)(x+y-z)$　　(4) $(x+y-z)(x-y+z)$

例題 1　　展開の工夫［1］

次の等式が成り立つことを示せ。

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

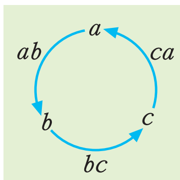
証明 $(a+b+c)^2$

$=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$(*)　◀



問16 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b-c)^2$　　(2) $(a-b-c)^2$　　(3) $(x-2y+3z)^2$

(*) 例題1の答では，ac を ca と書き，$2ab+2bc+2ca$ のように整理した。このような書き方を**輪環の順**に整理するという。

積の順序を工夫することにより，展開の計算が容易になることがある。

例題 2　　展開の工夫［2］

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2$

考え方　(1) は，積の組み合わせを工夫して，計算しやすくする。

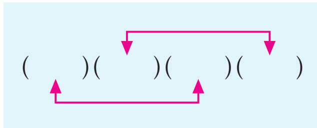
(2) は，$A^2B^2=(AB)^2$ を利用する。

解　(1)　$(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$

$=\{(x+2)(x-2)\}\{(x+3)(x-3)\}$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=x^4-13x^2+36$



(2)　$(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$

$=(a^2-b^2)^2$

$=a^4-2a^2b^2+b^4$

例題 2 の (1) は，次のようにして展開することもできる。

$(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$

$=\{(x+2)(x+3)\}\{(x-2)(x-3)\}$

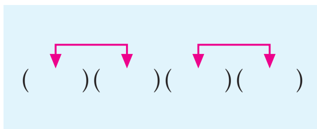
$=(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)$

$=\{(x^2+6)+5x\}\{(x^2+6)-5x\}$

$=(x^2+6)^2-25x^2$

$=x^4+12x^2+36-25x^2$

$=x^4-13x^2+36$



問17　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)(x+5)(x-2)(x-5)$　　(2)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(3)　$(a+2b)^2(a-2b)^2$　　(4)　$(2x-3y)^2(2x+3y)^2$

問18　$(a^2+1)(a+1)(a-1)$ を展開せよ。

3 因数分解

整式を1次以上のいくつかの整式の積の形に表すことを **因数分解** という。このとき，積をつくる各整式をもとの整式の **因数** という。

$$(x+a)(x+b)$$

展開↓ ↑因数分解

$$x^2+(a+b)x+ab$$

因数分解は，展開と逆の操作である。

共通因数をくくり出すこと

整式の各項に共通な因数があるとき，それをかっこの外にくくり出して，整式を因数分解することができる。

$$\boldsymbol{ma+mb=m(a+b)}$$

例 16 (1) $6a^2b+8ab^2=2ab\cdot 3a+2ab\cdot 4b$
$=2ab(3a+4b)$

(2) $2xy^2-y^2=2x\cdot y^2-1\cdot y^2$
$=(2x-1)y^2$

問19 次の式を因数分解せよ。

(1) $9a^2b-6ac$　　(2) $3x^2yz+yz$

(3) $3a^3b^2-6a^2b^3+12a^2b^2c$

式の一部をひとまとめにして，1つの文字のようにみなすことにより，共通因数をくくり出すことができる場合がある。

例 17 (1) $a(a+3)-2b(a+3)=(a+3)(a-2b)$

(2) $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)$　◀ $y-x=-(x-y)$
$=(a-b)(x-y)$

問20 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+5y)y-(x+5y)z$　　(2) $4x(y-2)+y-2$

(3) $(3a-b)x-3a+b$　　(4) $a(b-c)-2c+2b$

2 次式の因数分解

乗法公式を逆に利用すると，次の因数分解の公式が得られる。発展 P.21

$\boxed{1}$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$\boxed{2}$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$\boxed{3}$ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\boxed{4}$ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例 18 (1) $x^2+6xy+9y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2$

$$=(x+3y)^2$$

(2) $9x^2-24xy+16y^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2$

$$=(3x-4y)^2$$

(3) $36x^2-25y^2=(6x)^2-(5y)^2$

$$=(6x+5y)(6x-5y)$$

(4) $x^2-9x-22=x^2+\{2+(-11)\}x+2\cdot(-11)$

$$=(x+2)(x-11)$$

問21 次の式を因数分解せよ。

(1) $16x^2+8x+1$　　(2) $4x^2-28xy+49y^2$

(3) $64x^2-81y^2$　　(4) $x^2+13x-30$

共通因数をくくり出すと，公式を用いて因数分解できる場合がある。

例 19 $9x^3y-16xy^3=xy(9x^2-16y^2)$

$$=xy\{(3x)^2-(4y)^2\}$$

$$=xy(3x+4y)(3x-4y)$$

問22 次の式を因数分解せよ。

(1) $25x^4-4x^2y^2$　　(2) $ax^2+12ax+36a$

(3) x^3-2x^2-48x　　(4) $(a-b)x^2+(b-a)y^2$

2次式の因数分解では，次の公式がよく用いられる。

> **5** $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

例20 $3x^2+2x-5$ を因数分解してみよう。(*)

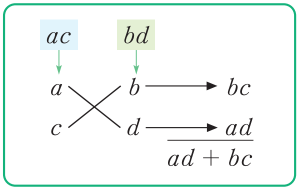
この式と公式 **5** の左辺を比べて

$$ac=3,\quad ad+bc=2,\quad bd=-5$$

を満たす a，b，c，d の組を見つければよい。

まず，$ac=3$ を満たす整数 a，c の組は，$a>0$，$c>0$ とすると

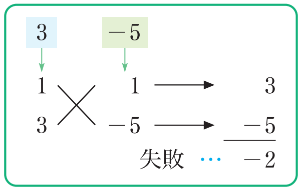
$$\begin{cases}a=1\\c=3\end{cases}\quad\begin{cases}a=3\\c=1\end{cases}$$



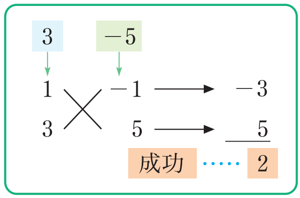
また，$bd=-5$ を満たす整数 b，d の組は

$$\begin{cases}b=1\\d=-5\end{cases}\quad\begin{cases}b=5\\d=-1\end{cases}\quad\begin{cases}b=-1\\d=5\end{cases}\quad\begin{cases}b=-5\\d=1\end{cases}$$

がある。



これらの組について，右のような形式の計算によって，$ad+bc=2$ を満たす a，b，c，d の組を見つける。



よって，$a=1$，$b=-1$，$c=3$，$d=5$ とすればよい。

ゆえに $\quad 3x^2+2x-5=(x-1)(3x+5)$

問23 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2+3x+1$ (2) $3x^2-5x-2$

(3) $5x^2+7x-6$ (4) $8x^2+6x-5$

(5) $6x^2-5x-6$ (6) $4x^2-16x+15$

(*) 例20のような方法を，**たすき掛け** の方法という。

例 21　$8x^2-26xy+15y^2$ を因数分解してみよう。

この式を，x についての 2 次式と考えると

x の係数は　$-26y$

定数項は　$15y^2$

である。

したがって，右の計算より

$$
\begin{array}{ccccr}
4 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -3y & \longrightarrow & -6y \\
2 & & -5y & \longrightarrow & -20y \\
\hline
 & & & & -26y
\end{array}
$$

$$8x^2-26xy+15y^2=(4x-3y)(2x-5y)$$

問24　次の式を因数分解せよ。

(1)　$7x^2+11xy+4y^2$　　(2)　$12x^2-xy-6y^2$

因数分解の工夫

式の一部をひとまとめにして，1 つの文字のようにみなすことにより，公式を利用して因数分解できることがある。参考 P.20

例題 3　　因数分解の工夫［1］

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^2-c^2$　　(2)　$(x-2y)(x-2y+5)+6$

解　(1)　$(a+b)^2-c^2=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$$=(a+b+c)(a+b-c)$$

(2)　$(x-2y)(x-2y+5)+6=(x-2y)\{(x-2y)+5\}+6$

$$=(x-2y)^2+5(x-2y)+6$$

$$=\{(x-2y)+2\}\{(x-2y)+3\}$$

$$=(x-2y+2)(x-2y+3)$$

問25　次の式を因数分解せよ。

(1)　$(a+4b)^2-b^2$　　(2)　$9x^2-(y-z)^2$

(3)　$(x-y)^2+4(x-y)-45$　　(4)　$(2a+b)(2a+b-9)+20$

2つ以上の文字を含む整式においては，最も次数の低い文字について整理すると，因数分解が簡単になることがある。

応用例題 4　　因数分解の工夫［2］

$a^3-ab^2-b^2c+a^2c$ を因数分解せよ。

考え方　この式は a について3次式，b について2次式，c について1次式であるから，最も次数の低い c について整理する。

解

$$
\begin{aligned}
a^3-ab^2-b^2c+a^2c &= (a^2-b^2)c+(a^3-ab^2)\\
&= (a^2-b^2)c+a(a^2-b^2)\\
&= (a^2-b^2)(a+c)\\
&= (a+b)(a-b)(a+c)
\end{aligned}
$$

問26　次の式を因数分解せよ。

(1)　$4xy^2-4y^2-x+1$　　(2)　$a^3-9ab^2+a^2c-9b^2c$

最も次数の低い文字が2つ以上あるときは，そのうちの1つの文字について整理するとよい。

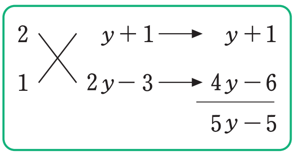
応用例題 5　　因数分解の工夫［3］

$2x^2+5xy+2y^2-5x-y-3$ を因数分解せよ。

考え方　この式は x，y のどちらの文字についても2次式であるから，たとえば，x について整理する。

解

$$
\begin{aligned}
&2x^2+5xy+2y^2-5x-y-3\\
&= 2x^2+(5y-5)x+(2y^2-y-3)\\
&= 2x^2+(5y-5)x+(2y-3)(y+1)\\
&= \{2x+(y+1)\}\{x+(2y-3)\}\\
&= (2x+y+1)(x+2y-3)
\end{aligned}
$$



問27　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$　　(2)　$2x^2-3xy-2y^2+x+3y-1$

応用例題 6　　因数分解の工夫［4］

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解せよ。

考え方　この式は a, b, c のどの文字についても2次式であるから，たとえば，a について整理する。

解

$$\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)\\
&=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\\
&=-(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

問28　$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$ を因数分解せよ。

問題

1　$A=3x^2-4x+1$, $B=-4x^2+3$, $C=2x^2+5x-7$ とするとき，$3(A-2B)+4(B-C)$ を計算せよ。

→ p.46 練習問題1

2　2つの整式の和が $6x^3+2x^2-3x-4$, 差が $2x^3-6x^2+3x+12$ であるとき，この2つの整式を求めよ。

3　次の式を展開せよ。

(1)　$(3x-1)(x^2+7x-5)$　　(2)　$(x^2-x+1)^2$

(3)　$\left(a-2b-\frac{1}{2}c\right)\left(a+2b+\frac{1}{2}c\right)$　　(4)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+6)$

→ p.46 練習問題2

4　次の式を因数分解せよ。

(1)　$4x^3-18x^2-10x$　　(2)　$8a^2-2ab-3b^2$

(3)　$(x-3)^2+3-x$　　(4)　$(x-y)^2-(2x-y)^2$

(5)　$4ab^2-a+2b-1$　　(6)　$x^2-(a-1)x-a$

(7)　$6x^2+7xy+2y^2-x-y-1$　　(8)　$a^3-ab^2+b^2c-a^2c$

→ p.46 練習問題3

参考　複2次式の因数分解

x についての整式が

$$ax^4+bx^2+c \quad \cdots\cdots ①$$

の形に表されるとき，① を **複 2 次式** という。

例 1　複 2 次式 x^4+x^2-2 を因数分解してみよう。

$x^2=X$ とおくと

$$\begin{aligned} x^4+x^2-2 &= X^2+X-2=(X-1)(X+2) \\ &= (x^2-1)(x^2+2) \\ &= (x+1)(x-1)(x^2+2) \end{aligned}$$

例 1 のように，① において $x^2=X$ とおいたときの X の 2 次式が因数分解できる場合には，① も因数分解できる。

問 1　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^4-13x^2+36　　(2)　$8x^4+10x^2-3$

① において $x^2=X$ とおいたときの X の 2 次式が因数分解できない場合にも，平方の差の形にすることで因数分解できることがある。

例 2　(1)　$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2=(x^2+2)^2-x^2 \\ &= \{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\} \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned} 4x^4-8x^2+1 &= (4x^4-4x^2+1)-4x^2 \\ &= (2x^2-1)^2-(2x)^2 \\ &= \{(2x^2-1)+2x\}\{(2x^2-1)-2x\} \\ &= (2x^2+2x-1)(2x^2-2x-1) \end{aligned}$$

問 2　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^4+x^2+1　　(2)　$9x^4-7x^2+1$

数と式

発展　3次式の乗法公式と因数分解

11ページの乗法公式を用いると，次の3次式の乗法公式が得られる。

3次式の乗法公式

$\boxed{1}$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

問1　上の公式 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が成り立つことを確かめよ。

例 1
(1) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

問2　次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^3$　　(2) $(2x-y)^3$

さらに，次の3次式の因数分解の公式も成り立つ。

3次式の因数分解の公式

$\boxed{3}$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\boxed{4}$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

問3　上の公式 $\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が成り立つことを，右辺を展開することにより確かめよ。

例 2
(1) $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)$

(2) $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

問4　次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+125　　(2) $64x^3-27y^3$