2節　整数の性質の応用

1 方程式の整数解

（教科書 p.88）

問 1 39 人の生徒全員を 5 人の班と 6 人の班に分けたい。5 人の班と 6 人の班をそれぞれいくつつくればよいですか。

2 つの文字 x，y に関する方程式の解のうち，x と y がともに整数になるものを，その方程式の（1　　　　　　　）という。

例 1 方程式 $xy=4$ の整数解をすべて求めてみよう。
x，y がともに 4 の約数であるから

問 2 次の方程式の整数解をすべて求めなさい。
(1) $xy=7$

(2) $xy=8$

例題 1 方程式 $xy-2x-y=3$ の整数解をすべて求めなさい。

解 $xy-2x-y=3$ より　$x(y-2)-y=3$
両辺に 2 をたして　$x(y-2)-y+2=3+2$
$x(y-2)-(y-2)=5$
よって　$(x-1)(y-2)=5$
$x-1$，$y-2$ がともに 5 の約数であるから

$\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.$　$\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.$　$\left\{\begin{array}{l} \\ \end{array}\right.$

したがって，整数 x，y の組は

問 3 方程式 $xy+3x-y=6$ の整数解をすべて求めなさい。

例 2 方程式 $2x = 3y$ の整数解をすべて求めてみよう。

y が整数であるから，$2x = 3y$ より $2x$ は 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素であるから，x が 3 の倍数でなければならない。

よって

$x =$

とおくことができる。このとき

となる。したがって

……①

例２の①の n に整数を代入することによって方程式 $2x = 3y$ の整数解が求められるので，①がこの方程式のすべての整数解を示している。

問 4 方程式 $3x = 5y$ の整数解をすべて求めなさい。

不定方程式

（教科書 p.90）

整数 a, b, c を係数とする x, y に関する 1 次方程式 $ax + by = c$ を，1 次の(2　　　　　)という。

1 次の不定方程式は，整数解を 1 つ見つけることによって，すべての整数解を求めることができる。

例題 2 方程式

$$2x + 3y = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

の整数解をすべて求めなさい。

解 $x = -1$，$y = 1$ は①の整数解の 1 つである。

したがって，　$2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$ ……②

① − ②より　$2(x + 1) + 3(y - 1) = 0$

よって　$2(x + 1) = -3(y - 1)$ ……③

③より，$2(x + 1)$ は 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素であるから，$x + 1$ は 3 の倍数でなければならない。

よって

問 5 次の方程式の整数解をすべて求めなさい。

(1) $3x+4y=1$

(2) $3x-5y=4$

2 分数と小数

分数と小数 （教科書 p.91）

整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を有理数という。

整数 m は $\frac{m}{1}$ という形に表すことができるので，有理数である。

整数でない有理数は，分子を分母でわると小数になる。このとき，たとえば

$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{5}{8}=0.625$

のように小数第何位かで終わる場合がある。このような小数を（[1] ）という。

また，

$\frac{1}{3}=0.333333333\cdots$，$\frac{7}{22}=0.318181818\cdots$

のように同じ数の並びがくり返し現れる場合もある。

このような小数を（[2] ）という。

一般に，有理数は，整数か有限小数か循環小数のいずれかになる。

例 3 有限小数 0.175 を既約分数で表すと

$0.175=\frac{175}{1000}=$

問 6 次の有限小数を既約分数で表しなさい。

(1) 0.15

(2) 0.215

有限小数 （教科書 p.92）

どのような分数が有限小数で表されるか考えてみよう。たとえば

$\frac{7}{10}=0.7$，　$\frac{17}{100}=0.17$，　$\frac{107}{1000}=0.107$

のように，分母が 10，100，1000 など 10^n の形である分数は，必ず有限小数になる。

また，分母が 10^n の形でなくても，有限小数になる場合がある。たとえば

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=\frac{3\times5^2}{2^2\times5^2}=\frac{3\times5^2}{(2\times5)^2}=\frac{75}{100}=0.75$$

$$\frac{7}{50}=\frac{7}{2\times5^2}=\frac{7\times2}{2\times5^2\times2}=\frac{7\times2}{(2\times5)^2}=\frac{14}{100}=0.14$$

このように，分母の素因数が 2 と 5 だけの分数は，分母と分子に適当な数をかけることによって分母を 10^n の形にできるので，有限小数になる。

一般的に，次のことが知られている。

有限小数になるための条件
分母の素因数が 2 と 5 だけの既約分数は， 有限小数になる。

例 4 (1) $\frac{37}{160}$ は $160=2^5\times5$ であるから，（ ）。

(2) $\frac{2}{15}$ は $15=3\times5$ であるから，（ ）。

問 7 次の分数のうち，有限小数になるものはどれですか。

① $\frac{6}{7}$　② $\frac{7}{8}$　③ $\frac{5}{12}$　④ $\frac{9}{40}$

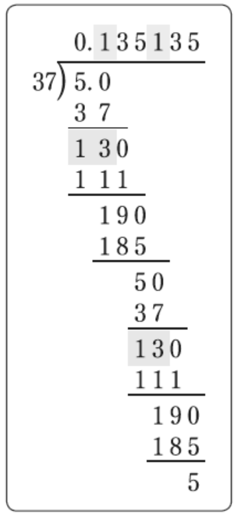
循環小数

（教科書 p.93）

分母が 2 と 5 以外の素因数をもつ既約分数は，必ず循環小数になる。循環小数になる仕組みを考えてみよう。

たとえば，$\frac{5}{37}$ では，分子を分母でわるとわり切れず，わり算をくり返す。

このとき，わり算の各段の余りは，1 から 36 までのいずれかの数であるから，最大で 37 回わり算をくり返せば，必ず同じ余りが現れる。



実際には，右のように，4 回目で同じ余りが現れるので，余りは

$\underline{13 \to 19 \to 5} \to \underline{13 \to 19 \to 5} \to \cdots$

とくり返される。これにより，商も

$\underline{1 \to 3 \to 5} \to \underline{1 \to 3 \to 5} \to \cdots$

とくり返されるので，循環小数になる。

循環小数は，くり返される部分がわかるように，記号・を用いて，次のように表す。

$\frac{1}{3} = 0.333333333 \cdots = 0.\dot{3}$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857 \cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

$\frac{7}{22} = 0.318181818 \cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$

例 5 $\frac{4}{37} =$

$\frac{5}{18} =$

問8 次の分数を循環小数の記号を用いて表しなさい。

(1) $\frac{7}{11}$　　(2) $\frac{3}{7}$

3 2進法

10 進法

（教科書 p.94）

たくさんのおはじきを数えるときは，まとまりをつくりながら数えると，数えやすい。

おはじきを，はじめに 10 ずつまとめて小皿に取り分け，次に小皿を 10 ずつまとめると，下の写真のようになった。

小皿 10 のまとまり $\boxed{1}$　小皿 ④　余り 8

このとき，おはじきの数は次のようになる。

$\boxed{1} \times (10 \times 10) + 4 \times 10 + 8$

$= \boxed{1} \times 10^2 + 4 \times 10 + 8$

$= \boxed{1}\,4\,8$

このように 10，10^2，10^3，… ずつにまとめて数える方法を，（[1]　　　　　　）という。

10 進法は日常用いる数の表し方である。10 進法では，0 から 9 までの 10 種類の数字を用い，右から順に，1 の位，10 の位，10^2 の位，… である。

数には，10 進法以外にも，（[2]　　　　　　）や（[3]　　　　　　）などいろいろな表し方がある。

2 進法

（教科書 p.95）

おはじきを使って，2 進法における数の表し方を考えてみよう。

10 進法で 10 ずつのまとまりをつくって数えたように，2 進法では，2 ずつのまとまりをつくって数える。

はじめに，㋐のように 2 ずつにまとめる。次に，㋑のように 2 のまとまりを 2 ずつ，すなわち 4 ずつにまとめる。次に，㋒のように 4 のまとまりを 2 ずつ，すなわち 8 ずつにまとめる。ここで

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$8 = 4 \times 2 = (2 \times 2) \times 2 = 2^3$

であるから，おはじきは，次のようにまとめられる。

2^3 のまとまり　$\boxed{1}$

2^2 のまとまり　⓪

2 のまとまり　1

余り　1

したがって，おはじきの数は，10 進法では

$\boxed{1} \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 11$

である。これを，2 進法では

$\boxed{1}\,0\,1\,1$

のように，0 と 1 の 2 種類の数字を用いて表す。

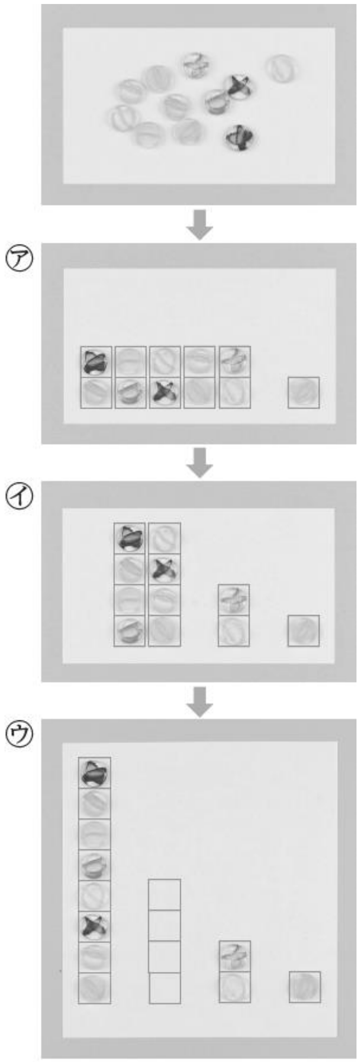
2 進法でも，10 進法と同様に，右から順に，1 の位，2 の位，2^2 の位，2^3 の位，… である。

また，これからは，たとえば 1011 が 2 進法で表された数であることを示すために，$1011_{(2)}$ のように書くこととする。

㋐

㋑

㋒



$\boxed{1}$　⓪　1　1

例 6 $1100_{(2)}$ を 10 進法で表すと，次のようになる。

$1100_{(2)} =$

問 9 次の数を 10 進法で表しなさい。

(1) $10_{(2)}$

(2) $101_{(2)}$

(3) $1001_{(2)}$

(4) $11101_{(2)}$

2 進法と10進法
（教科書 p.96）

10 進法で表された数を 2 進法で表すことを考えよう。

たとえば，10 進法で表された数 13 を，2 進法で表すためには，次のように変形する。

$$13 = 6\times 2 + \boxed{1} \qquad \leftarrow 13\div 2 = 6 \quad \text{余り}\ \boxed{1}$$

$$= (3\times 2 + 0)\times 2 + \boxed{1} \qquad \leftarrow 6\div 2 = 3 \quad \text{余り}\ 0$$

$$= 3\times 2^2 + 0\times 2 + \boxed{1}$$

$$= (1\times 2 + \boxed{1})\times 2^2 + 0\times 2 + \boxed{1} \qquad \leftarrow 3\div 2 = 1 \quad \text{余り}\ \boxed{1}$$

$$= 1\times 2^3 + \boxed{1}\times 2^2 + 0\times 2 + \boxed{1}$$

この変形から

$13 = 1\boxed{1}0\boxed{1}_{(2)}$

となる。

上の変形からわかるように，10 進法で表された数を 2 進法で表すと，2 でわった余りと，最後の商の 1 を右から順に書き並べたものになっている。

したがって，10 進法で表された数を 2 進法で表すには，次のようにするとよい。

① 与えられた 10 進法の数を 2 でわり，商と余りを求める。

② これを商が 1 になるまでくり返す。

③ 最後の商 1 と余りを順に書き並べる。

	余り
2)13	
2) 6	… $\boxed{1}$
2) 3	… 0
1	… $\boxed{1}$

問 10 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表しなさい。

(1) 3

(2) 7

(3) 14

(4) 27

2進法の計算
（教科書 p.97）

2 進法でも，10 進法のときと同じようにたし算やかけ算ができる。このとき基本となるのは，1 桁どうしの計算である。

2 進法での 1 桁のたし算は，右のようになる。とくに，$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$ ではくり上がることに気をつける。

$0_{(2)}+0_{(2)}=0_{(2)}$
$0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$
$1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}$
$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$

例 7 2 進法で表された数のたし算

$101_{(2)}+110_{(2)}$

をしてみよう。

10 進法の場合と同様に縦に並べ，くり上がりに気をつけて計算すると，右のようになるので

$$\begin{array}{r} 101 \\ +110 \\ \hline 1011 \end{array}$$

① $1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}$

② $0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$

③ $1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$ より，0 となって，くり上がる。

問 11 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

(1) $10_{(2)}+1_{(2)}$

(2) $11_{(2)}+1_{(2)}$

(3) $101_{(2)}+11_{(2)}$

(4) $111_{(2)}+101_{(2)}$

2 進法での 1 桁のかけ算は，右のようになる。

2 進法のかけ算は，これらを利用して，各桁のかけ算を行い，その後でたし算を行えばよい。

$$0_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$$
$$0_{(2)}\times 1_{(2)}=0_{(2)}$$
$$1_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$$
$$1_{(2)}\times 1_{(2)}=1_{(2)}$$

例 8 2 進法で表された数のかけ算

$111_{(2)}\times 11_{(2)}$

をしてみよう。

10 進法の場合と同様に縦に並べて計算すると，右のようになるので

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 10101 \end{array}$$

① 111 に 11 の 1 の位の 1 をかける。

② 111 に 11 の 2 の位の 1 をかける。

③ ① と ② を加える。

問 12 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

(1) $101_{(2)}\times 11_{(2)}$

(2) $101_{(2)}\times 101_{(2)}$

チャレンジ ユークリッドの互除法と不定方程式の整数解 （教科書 p.98）

ユークリッドの互除法を用いて，不定方程式の整数解の 1 つを求めてみよう。

例題 1 次の不定方程式の整数解を 1 つ求めなさい。

$$37x + 15y = 1$$

解 x と y の係数 37 と 15 について，ユークリッドの互除法を用いると

となる。①，②をそれぞれひき算の式で書きなおすと

④の 7 に③の左辺を代入すると

37 と 15 に着目して整理すると

よって

したがって，$x = ($　　　　　$)$，$y = ($　　　　$)$ は，不定方程式 $37x + 15y = 1$ の整数解の 1 つである。

問 1 ユークリッドの互除法を用いて，不定方程式

$$28x + 19y = 1$$

の整数解を 1 つ求めなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.99）

1 次の方程式の整数解をすべて求めなさい。

(1) $xy + x - 3y = 5$

(2) $3x = 4y$

(3) $5x + 3y = 2$

(4) $5x - 2y = 1$

2 次の分数を循環小数の記号・を用いて表しなさい。

(1) $\frac{5}{7}$　(2) $\frac{4}{11}$　(3) $\frac{10}{13}$

3 次の数を 10 進法で表しなさい。

(1) $1011_{(2)}$

(2) $10101_{(2)}$

4 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表しなさい。

(1) 20

(2) 24

5 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

(1) $111_{(2)}+111_{(2)}$

(2) $111_{(2)}\times 101_{(2)}$

数学ミュージアム　16 進法　（教科書 p.99）

16，16^2，16^3，… ずつにまとめて数えるのが 16 進法です。16 進法は，コンピューターのプログラムをつくるときなどに利用されます。

16 進法で数を表すには，0 から 9 までの 10 種類の数字だけでなく，さらに 6 種類の数字が必要となります。一般には，A, B, C, D, E, F を数字として 10，11，12，13，14，15 に対応させ，次のように表すことが多いようです。

$25D_{(16)} = 2 \times 16^2 + 5 \times 16 + 13 = 605$

16 進法は 2 進法のように桁数が大きくなることがなく，また，16 進法で表された数を 2 進法で表すことは，10 進法で表された数を 2 進法で表すことより容易です。16 進法がコンピューターでよく使われるのは，このためです。

数という文字を表すコード。漢字，ひらがななどの全角の文字には 16 進法 4 桁のコードが対応している。

数学ミュージアム　虫くい算　（教科書 p.100）

右のように，計算の一部が□で隠されていて，そこに適切な数を入れて正しい計算となるようにする問題を，虫くい算といいます。ただし，□には 0 から 9 のうち 1 つの数が入り，左端の□には 0 は入らないものとします。

虫くい算には決まった解き方はありません。わかっている数と計算の規則から，□に入る数を推理していきます。

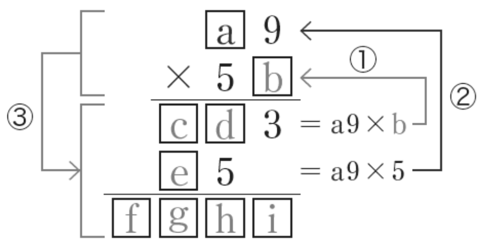
それでは，虫くい算に挑戦してみましょう。ここでは，説明のために，下のように□に入る数を a ～ i とします。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \square & 9 \\
 & \times & 5 & \square \\
\hline
 & \square & \square & 3 \\
 & \square & 5 & \\
\hline
\square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

① a9 × b の 1 の位は 3 であるから， b は 7 になる。

② a9 × 5 ＝ e5 は 2 桁であるから， a は 1 になる。

③ 19 × 57 を計算すると， c ～ i がわかる。



［答え］

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 1 & 9 \\
 & \times & 5 & 7 \\
\hline
 & 1 & 3 & 3 \\
 & 9 & 5 & \\
\hline
1 & 0 & 8 & 3
\end{array}
$$

かける数が 1 桁の虫くい算は考えやすいでしょう。□をうめてみてください。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \square & 5 & \square \\
\times & & & 9 \\
\hline
\square & 7 & \square & 6
\end{array}
$$

それでは，右の虫くい算はどうなるか，考えてみましょう。

$$
\begin{array}{rrr}
 & \square & 3 \\
\times & 5 & \square \\
\hline
\square & \square & 7 \\
6 & \square & \\
\hline
\square & \square & \square
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & \square & \square \\
\times & 3 & \square \\
\hline
\square & \square & 6 \\
\square & 3 & \\
\hline
\square & \square & \square
\end{array}
$$

2節　整数の性質の応用

1 方程式の整数解　　（教科書 p.88）

問 1　39 人の生徒全員を 5 人の班と 6 人の班に分けたい。5 人の班と 6 人の班をそれぞれいくつつくればよいですか。

5 人の班の数を x，6 人の班の数を y とすると

$5x+6y=39$

x に 0，1，2，3，4，5，6，7 を代入して y が整数になるのは，$x=3$，$y=4$ のときだけである。よって，5 人の班を 3 つ，6 人の班を 4 つつくればよい。

2 つの文字 x，y に関する方程式の解のうち，x と y がともに整数になるものを，その方程式の（[1]　整数解　）という。

例 1　方程式 $xy=4$ の整数解をすべて求めてみよう。

x，y がともに 4 の約数であるから

$x=1$，$y=4$　　$x=-1$，$y=-4$

$x=2$，$y=2$　　$x=-2$，$y=-2$

$x=4$，$y=1$　　$x=-4$，$y=-1$

問 2　次の方程式の整数解をすべて求めなさい。

(1)　$xy=7$

x，y がともに 7 の約数であるから

$x=1$，$y=7$　$x=-1$，$y=-7$

$x=7$，$y=1$　$x=-7$，$y=-1$

(2)　$xy=8$

x，y がともに 8 の約数であるから

$x=1$，$y=8$　$x=-1$，$y=-8$

$x=2$，$y=4$　$x=-2$，$y=-4$

$x=4$，$y=2$　$x=-4$，$y=-2$

$x=8$，$y=1$　$x=-8$，$y=-1$

例題 1　方程式 $xy-2x-y=3$ の整数解をすべて求めなさい。

解　$xy-2x-y=3$ より　$x(y-2)-y=3$

両辺に 2 をたして　$x(y-2)-y+2=3+2$

$x(y-2)-(y-2)=5$

よって　$(x-1)(y-2)=5$

$x-1$，$y-2$ がともに 5 の約数であるから

$\begin{cases}x-1=1\\y-2=5\end{cases}$　$\begin{cases}x-1=-1\\y-2=-5\end{cases}$

$\begin{cases}x-1=5\\y-2=1\end{cases}$　$\begin{cases}x-1=-5\\y-2=-1\end{cases}$

したがって，整数 x，y の組は

$x=2$，$y=7$　　$x=0$，$y=-3$

$x=6$，$y=3$　　$x=-4$，$y=1$

問 3　方程式 $xy+3x-y=6$ の整数解をすべて求めなさい。

左辺が積の形になるように方程式を変形すると

$x(y+3)-y-3=6-3$

$x(y+3)-(y+3)=3$

$(x-1)(y+3)=3$

よって，$x-1$，$y+3$ がともに 3 の約数であるから

$\begin{cases}x-1=1\\y+3=3\end{cases}$　$\begin{cases}x-1=-1\\y+3=-3\end{cases}$

$\begin{cases}x-1=3\\y+3=1\end{cases}$　$\begin{cases}x-1=-3\\y+3=-1\end{cases}$

したがって

$x=2$，$y=0$　　$x=0$，$y=-6$

$x=4$，$y=-2$　　$x=-2$，$y=-4$

例 2 方程式 $2x=3y$ の整数解をすべて求めてみよう。

y が整数であるから，$2x=3y$ より $2x$ は 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素であるから，x が 3 の倍数でなければならない。

よって

$x=3n$ （n は整数）

とおくことができる。このとき

$2\times 3n=3y$

$y=2n$

となる。したがって

$x=3n$，$y=2n$ （n は整数） ……①

例２の①の n に整数を代入することによって方程式 $2x=3y$ の整数解が求められるので，①がこの方程式のすべての整数解を示している。

問 4 方程式 $3x=5y$ の整数解をすべて求めなさい。

y が整数であるから，$3x=5y$ より $3x$ は 5 の倍数であり，3 と 5 は互いに素であるから，x が 5 の倍数でなければならない。よって

$x=5n$ （n は整数)

とおくことができる。このとき

$3\times 5n=5y$

$y=3n$

となる。したがって

$x=5n$，$y=3n$ （n は整数)

不定方程式

（教科書 p.90）

整数 a, b, c を係数とする x, y に関する 1 次方程式 $ax+by=c$ を，1 次の（2 不定方程式 ）という。

1 次の不定方程式は，整数解を 1 つ見つけることによって，すべての整数解を求めることができる。

例題 2 方程式

$2x+3y=1$ ……①

の整数解をすべて求めなさい。

解 $x=-1$，$y=1$ は①の整数解の 1 つである。

したがって，　$2\times(-1)+3\times 1=1$ ……②

①－②より　$2(x+1)+3(y-1)=0$

よって　$2(x+1)=-3(y-1)$ ……③

③より，$2(x+1)$ は 3 の倍数であり，2 と 3 は互いに素であるから，$x+1$ は 3 の倍数でなければならない。

よって

$x+1=3n$ （n は整数）

とおける。これを③に代入すると

$y-1=-2n$

したがって，すべての整数解は

$x=3n-1$，$y=-2n+1$ （n は整数） ……④

①を満たす x，y の具体的な値を求めるには，④の n に整数を代入すればよい。たとえば

$n=1$ のとき　$x=2$，$y=-1$

$n=2$ のとき　$x=5$，$y=-3$

となるが，これらは①を満たしている。

問 5 次の方程式の整数解をすべて求めなさい。

(1) $3x+4y=1$

$3x+4y=1$ ……①

$x=-1$，$y=1$ は①の整数解の 1 つである。

したがって　$3\times(-1)+4\times1=1$ ……②

①－②より　$3(x+1)+4(y-1)=0$

よって　$3(x+1)=-4(y-1)$ ……③

3 と 4 は互いに素であるから，$x+1$ は 4 の倍数でなければならない。よって

$x+1=4n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入すると

$y-1=-3n$

したがって，すべての整数解は

$x=4n-1$，$y=-3n+1$　（n は整数）

(2) $3x-5y=4$

$3x-5y=4$ ……①

$x=3$，$y=1$ は①の整数解の 1 つである。

したがって　$3\times3-5\times1=4$ ……②

①－②より　$3(x-3)-5(y-1)=0$

よって　$3(x-3)=5(y-1)$ ……③

3 と 5 は互いに素であるから，$x-3$ は 5 の倍数でなければならない。よって

$x-3=5n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入すると

$y-1=3n$

したがって，すべての整数解は

$x=5n+3$，$y=3n+1$　（n は整数）

2 分数と小数

分数と小数　（教科書 p.91）

整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を有理数という。

整数 m は $\frac{m}{1}$ という形に表すことができるので，有理数である。

整数でない有理数は，分子を分母でわると小数になる。このとき，たとえば

$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{5}{8}=0.625$

のように小数第何位かで終わる場合がある。このような小数を（1　有限小数　）という。

また，

$\frac{1}{3}=0.333333333\cdots$，$\frac{7}{22}=0.318181818\cdots$

のように同じ数の並びがくり返し現れる場合もある。

このような小数を（2　循環小数　）という。

一般に，有理数は，整数か有限小数か循環小数のいずれかになる。

例 3 有限小数 0.175 を既約分数で表すと

$$0.175=\frac{175}{1000}=\frac{5^2\times7}{2^3\times5^3}=\frac{7}{2^3\times5}=\frac{7}{40}$$

問 6 次の有限小数を既約分数で表しなさい。

(1) 0.15

$$0.15=\frac{15}{100}=\frac{3\times5}{2^2\times5^2}=\frac{3}{2^2\times5}=\frac{3}{20}$$

(2) 0.215

$$0.215=\frac{215}{1000}=\frac{5\times43}{2^3\times5^3}=\frac{43}{2^3\times5^2}=\frac{43}{200}$$

有限小数　（教科書 p.92）

どのような分数が有限小数で表されるか考えてみよう。たとえば

$\frac{7}{10}=0.7$，　$\frac{17}{100}=0.17$，　$\frac{107}{1000}=0.107$

のように，分母が 10，100，1000 など 10^n の形である分数は，必ず有限小数になる。

また，分母が 10^n の形でなくても，有限小数になる場合がある。たとえば

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=\frac{3\times5^2}{2^2\times5^2}=\frac{3\times5^2}{(2\times5)^2}=\frac{75}{100}=0.75$$

$$\frac{7}{50}=\frac{7}{2\times5^2}=\frac{7\times2}{2\times5^2\times2}=\frac{7\times2}{(2\times5)^2}=\frac{14}{100}=0.14$$

このように，分母の素因数が 2 と 5 だけの分数は，分母と分子に適当な数をかけることによって分母を 10^n の形にできるので，有限小数になる。

一般的に，次のことが知られている。

有限小数になるための条件
分母の素因数が 2 と 5 だけの既約分数は， 有限小数になる。

例 4 (1) $\frac{37}{160}$ は $160=2^5\times5$ であるから，（　有限小数になる　）。

(2) $\frac{2}{15}$ は $15=3\times5$ であるから，（　有限小数にならない　）。

問 7 次の分数のうち，有限小数になるものはどれですか。

①　$\frac{6}{7}$　　②　$\frac{7}{8}$　　③　$\frac{5}{12}$　　④　$\frac{9}{40}$

分母の素因数が 2 と 5 だけのものは②の 8 と④の 40 であるから，有限小数になるものは

②，④

循環小数

（教科書 p.93）

分母が 2 と 5 以外の素因数をもつ既約分数は，必ず循環小数になる。循環小数になる仕組みを考えてみよう。

たとえば，$\frac{5}{37}$ では，分子を分母でわるとわり切れず，わり算をくり返す。

このとき，わり算の各段の余りは，1 から 36 までのいずれかの数であるから，最大で 37 回わり算をくり返せば，必ず同じ余りが現れる。

実際には，右のように，4 回目で同じ余りが現れるので，余りは

$\underline{13 \to 19 \to 5} \to \underline{13 \to 19 \to 5} \to \cdots$

とくり返される。これにより，商も

$\underline{1 \to 3 \to 5} \to \underline{1 \to 3 \to 5} \to \cdots$

とくり返されるので，循環小数になる。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.135135 \\
37 \,\big) & 5.0 \\
 & 3\,7 \\ \hline
 & 1\,30 \\
 & 1\,11 \\ \hline
 & 190 \\
 & 185 \\ \hline
 & 50 \\
 & 37 \\ \hline
 & 130 \\
 & 111 \\ \hline
 & 190 \\
 & 185 \\ \hline
 & 5
\end{array}$$

循環小数は，くり返される部分がわかるように，記号・を用いて，次のように表す。

$\frac{1}{3} = 0.333333333\cdots = 0.\dot{3}$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

$\frac{7}{22} = 0.318181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$

例 5 $\frac{4}{37} = 0.108108108108\cdots = 0.\dot{1}0\dot{8}$

$\frac{5}{18} = 0.2777777\cdots = 0.2\dot{7}$

問8 次の分数を循環小数の記号を用いて表しなさい。

(1) $\frac{7}{11}$　　(2) $\frac{3}{7}$

(1) $\frac{7}{11} = 0.636363\cdots = 0.\dot{6}\dot{3}$

(2) $\frac{3}{7} = 0.428571428571\cdots = 0.\dot{4}2857\dot{1}$

3 2 進法

10 進法

（教科書 p.94）

たくさんのおはじきを数えるときは，まとまりをつくりながら数えると，数えやすい。

おはじきを，はじめに 10 ずつまとめて小皿に取り分け，次に小皿を 10 ずつまとめると，下の写真のようになった。

小皿 10 のまとまり $\boxed{1}$　小皿 4　余り 8

このとき，おはじきの数は次のようになる。

$$\boxed{1}\times(10\times10)+4\times10+8$$
$$=\boxed{1}\times10^2+4\times10+8$$
$$=\boxed{1}\,4\,8$$

このように 10，10^2，10^3，… ずつにまとめて数える方法を，（1　10 進法　）という。

10 進法は日常用いる数の表し方である。10 進法では，0 から 9 までの 10 種類の数字を用い，右から順に，1 の位，10 の位，10^2 の位，… である。

数には，10 進法以外にも，（2　2 進法　）や（3　16 進法　）などいろいろな表し方がある。

2 進法

（教科書 p.95）

おはじきを使って，2 進法における数の表し方を考えてみよう。

10 進法で 10 ずつのまとまりをつくって数えたように，2 進法では，2 ずつのまとまりをつくって数える。

はじめに，㋐のように 2 ずつにまとめる。次に，㋑のように 2 のまとまりを 2 ずつ，すなわち 4 ずつにまとめる。次に，㋒のように 4 のまとまりを 2 ずつ，すなわち 8 ずつにまとめる。ここで

$$4=2\times2=2^2$$
$$8=4\times2=(2\times2)\times2=2^3$$

であるから，おはじきは，次のようにまとめられる。

2^3 のまとまり　$\boxed{1}$
2^2 のまとまり　0
2 のまとまり　1
余り　1

したがって，おはじきの数は，10 進法では

$$\boxed{1}\times2^3+0\times2^2+1\times2+1=11$$

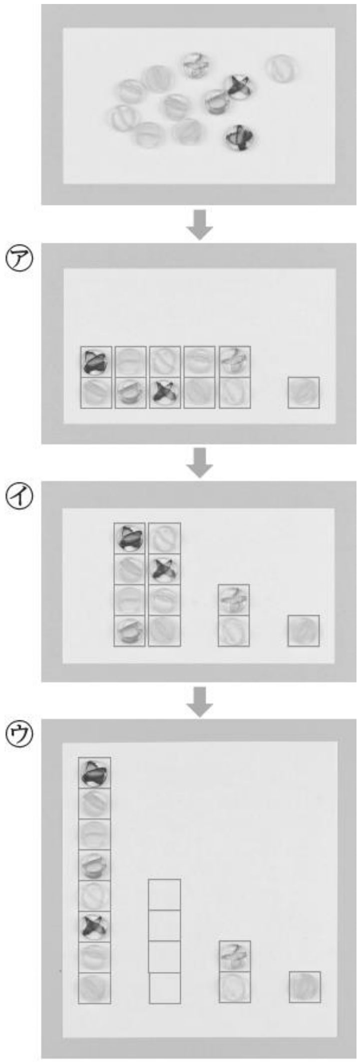
である。これを，2 進法では

$$\boxed{1}\,0\,1\,1$$

のように，0 と 1 の 2 種類の数字を用いて表す。

2 進法でも，10 進法と同様に，右から順に，1 の位，2 の位，2^2 の位，2^3 の位，… である。

また，これからは，たとえば 1011 が 2 進法で表された数であることを示すために，$1011_{(2)}$ のように書くこととする。



㋐　㋑　㋒

1　0　1　1

例 6　$1100_{(2)}$ を 10 進法で表すと，次のようになる。

$1100_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2+0=8+4+0+0=12$

問 9　次の数を 10 進法で表しなさい。

(1)　$10_{(2)}=1\times2+0=2$

(2)　$101_{(2)}=1\times2^2+0\times2+1=5$

(3)　$1001_{(2)}=1\times2^3+0\times2^2+0\times2+1=9$

(4)　$11101_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2+1=29$

2 進法と10進法

（教科書 p.96）

10 進法で表された数を 2 進法で表すことを考えよう。

たとえば，10 進法で表された数 13 を，2 進法で表すためには，次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
13 &= 6\times 2+\boxed{1} && \leftarrow 13\div 2=6\quad \text{余り}\ \boxed{1}\\
&=(3\times 2+0)\times 2+\boxed{1} && \leftarrow 6\div 2=3\quad \text{余り}\ 0\\
&=3\times 2^2+0\times 2+\boxed{1} &&\\
&=(1\times 2+\boxed{1})\times 2^2+0\times 2+\boxed{1} && \leftarrow 3\div 2=1\quad \text{余り}\ \boxed{1}\\
&=1\times 2^3+\boxed{1}\times 2^2+0\times 2+\boxed{1} &&
\end{aligned}
$$

この変形から

$13 = 1\boxed{1}0\boxed{1}_{(2)}$

となる。

上の変形からわかるように，10 進法で表された数を 2 進法で表すと，2 でわった余りと，最後の商の 1 を右から順に書き並べたものになっている。

したがって，10 進法で表された数を 2 進法で表すには，次のようにするとよい。

① 与えられた 10 進法の数を 2 でわり，商と余りを求める。
② これを商が 1 になるまでくり返す。
③ 最後の商 1 と余りを順に書き並べる。

$$
\begin{array}{r|rl}
2 & 13 & \text{余り}\\
2 & 6 & \cdots \boxed{1}\\
2 & 3 & \cdots 0\\
 & 1 & \cdots \boxed{1}
\end{array}
$$

問 10 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表しなさい。

(1) $3 = 11_{(2)}$

$$
\begin{array}{r|rl}
2 & 3 & \\
 & 1 & \cdots 1
\end{array}
$$

(2) $7 = 111_{(2)}$

$$
\begin{array}{r|rl}
2 & 7 & \\
2 & 3 & \cdots 1\\
 & 1 & \cdots 1
\end{array}
$$

(3) $14 = 1110_{(2)}$

$$
\begin{array}{r|rl}
2 & 14 & \\
2 & 7 & \cdots 0\\
2 & 3 & \cdots 1\\
 & 1 & \cdots 1
\end{array}
$$

(4) $27 = 11011_{(2)}$

$$
\begin{array}{r|rl}
2 & 27 & \\
2 & 13 & \cdots 1\\
2 & 6 & \cdots 1\\
2 & 3 & \cdots 0\\
 & 1 & \cdots 1
\end{array}
$$

2進法の計算

（教科書 p.97）

2 進法でも，10 進法のときと同じようにたし算やかけ算ができる。このとき基本となるのは，1 桁どうしの計算である。

2 進法での 1 桁のたし算は，右のようになる。とくに，$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$ ではくり上がることに気をつける。

$$
\begin{aligned}
0_{(2)}+0_{(2)}&=0_{(2)}\\
0_{(2)}+1_{(2)}&=1_{(2)}\\
1_{(2)}+0_{(2)}&=1_{(2)}\\
1_{(2)}+1_{(2)}&=10_{(2)}
\end{aligned}
$$

例 7 2 進法で表された数のたし算

$101_{(2)}+110_{(2)}$

をしてみよう。

10 進法の場合と同様に縦に並べ，くり上がりに気をつけて計算すると，右のようになるので

$101_{(2)}+110_{(2)}=1011_{(2)}$

$$
\begin{array}{r}
101\\
+\,110\\
\hline
1011
\end{array}
$$

① $1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}$
② $0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$
③ $1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$ より，0 となって，くり上がる。

問 11 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

（1） $10_{(2)}+1_{(2)}=11_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ \ 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

（2） $11_{(2)}+1_{(2)}=100_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ \ 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

（3） $101_{(2)}+11_{(2)}=1000_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ \ 11 \\ \hline 1000 \end{array}$$

（4） $111_{(2)}+101_{(2)}=1100_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ +\ 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

2 進法での 1 桁のかけ算は，右のようになる。

2 進法のかけ算は，これらを利用して，各桁のかけ算を行い，その後でたし算を行えばよい。

$$0_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$$
$$0_{(2)}\times 1_{(2)}=0_{(2)}$$
$$1_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$$
$$1_{(2)}\times 1_{(2)}=1_{(2)}$$

例 8 2 進法で表された数のかけ算

$111_{(2)}\times 11_{(2)}$

をしてみよう。

10 進法の場合と同様に縦に並べて計算すると，右のようになるので

$111_{(2)}\times 11_{(2)}=10101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 111 \\ 111\ \ \\ \hline 10101 \end{array}$$

① 111 に 11 の 1 の位の 1 をかける。
② 111 に 11 の 2 の位の 1 をかける。
③ ① と ② を加える。

問 12 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

（1） $101_{(2)}\times 11_{(2)}=1111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 101 \\ 101\ \ \\ \hline 1111 \end{array}$$

（2） $101_{(2)}\times 101_{(2)}=11001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 101 \\ \hline 101 \\ 101\ \ \ \ \\ \hline 11001 \end{array}$$

チャレンジ　ユークリッドの互除法と不定方程式の整数解　（教科書 p.98）

ユークリッドの互除法を用いて，不定方程式の整数解の 1 つを求めてみよう。

例題 1 次の不定方程式の整数解を 1 つ求めなさい。

$$37x + 15y = 1$$

解 x と y の係数 37 と 15 について，ユークリッドの互除法を用いると

$37 \div 15 = 2$　余り 7……①

$15 \div 7 = 2$　余り 1 ……②

$7 \div 1 = 7$

となる。①，②をそれぞれひき算の式で書きなおすと

$37 - 15 \times 2 = 7$　……③

$15 - 7 \times 2 = 1$　……④

④の 7 に③の左辺を代入すると

$15 - (37 - 15 \times 2) \times 2 = 1$

37 と 15 に着目して整理すると

$15 - 37 \times 2 + 15 \times 2 \times 2 = 1$

$15 \times 1 + 37 \times (-2) + 15 \times 4 = 1$

$37 \times (-2) + 15 \times (1 + 4) = 1$

よって　$37 \times (-2) + 15 \times 5 = 1$

したがって，x = (　-2　)，y = (　5　) は，不定方程式 $37x + 15y = 1$ の整数解の 1 つである。

問 1 ユークリッドの互除法を用いて，不定方程式

$$28x + 19y = 1$$

の整数解を 1 つ求めなさい。

x と y の係数 28 と 19 について，ユークリッドの互除法を用いると

$28 \div 19 = 1$　余り 9　……①

$19 \div 9 = 2$　余り 1　……②

$9 \div 1 = 9$

となる。①，②をそれぞれひき算の式で書きなおすと

$28 - 19 \times 1 = 9$　……③

$19 - 9 \times 2 = 1$　……④

④の 9 に③の左辺を代入すると

$19 - (28 - 19 \times 1) \times 2 = 1$

$19 - 28 \times 2 + 19 \times 1 \times 2 = 1$

$19 \times 1 + 28 \times (-2) + 19 \times 2 = 1$

$28 \times (-2) + 19 \times (1 + 2) = 1$

よって　$28 \times (-2) + 19 \times 3 = 1$

したがって，$x = -2$，$y = 3$ は不定方程式 $28x + 19y = 1$ の整数解の 1 つである。

復　習　問　題

（教科書 p.99）

1 次の方程式の整数解をすべて求めなさい。

(1) $xy + x - 3y = 5$

左辺が積の形になるように方程式を変形すると

$$x(y+1) - 3y - 3 = 5 - 3$$
$$x(y+1) - 3(y+1) = 2$$
$$(x-3)(y+1) = 2$$

よって，$x-3$，$y+1$ がともに 2 の約数であるから

$$\begin{cases} x-3=1 \\ y+1=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-1 \\ y+1=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3=2 \\ y+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-2 \\ y+1=-1 \end{cases}$$

よって，求める整数解は

$x=4$，$y=1$　　$x=2$，$y=-3$

$x=5$，$y=0$　　$x=1$，$y=-2$

(2) $3x = 4y$

y が整数であるから，$3x=4y$より $3x$ は 4 の倍数であり， 3 と 4 は互いに素であるから，x が 4 の倍数でなければならない。よって

$x = 4n$　（n は整数）

とおくことができる。このとき

$$3 \times 4n = 4y$$
$$y = 3n$$

となる。したがって

$x = 4n$，$y = 3n$　（n は整数）

(3) $5x + 3y = 2$　　……①

$x=1$，$y=-1$ は①の整数解の 1 つである。

したがって　$5 \times 1 + 3 \times (-1) = 2$　……②

①－②より　$5(x-1) + 3(y+1) = 0$

よって　$5(x-1) = -3(y+1)$　　……③

5 と 3 は互いに素であるから，$x-1$ は 3 の倍数でなければならない。よって

$x - 1 = 3n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入すると

$y + 1 = -5n$

したがって，すべての整数解は

$x = 3n+1$，$y = -5n-1$　（n は整数）

(4) $5x - 2y = 1$　　……①

$x=1$，$y=2$ は①の整数解の 1 つである。

したがって　$5 \times 1 - 2 \times 2 = 1$　　……②

①－②より　$5(x-1) - 2(y-2) = 0$

よって　$5(x-1) = 2(y-2)$　　……③

5 と 2 は互いに素であるから，$x-1$ は 2 の倍数でなければならない。よって

$x - 1 = 2n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入すると

$y - 2 = 5n$

したがって，すべての整数解は

$x = 2n+1$，$y = 5n+2$　（n は整数）

2 次の分数を循環小数の記号・を用いて表しなさい。

(1) $\frac{5}{7}$　　(2) $\frac{4}{11}$　　(3) $\frac{10}{13}$

(1) $\frac{5}{7} = 0.714285714285\cdots = 0.\dot{7}1428\dot{5}$

(2) $\frac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$

(3) $\frac{10}{13} = 0.769230769230\cdots = 0.\dot{7}6923\dot{0}$

3 次の数を 10 進法で表しなさい。

(1) $1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 11$

(2) $10101_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 21$

4 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表しなさい。

(1) $20 = 10100_{(2)}$

$$\begin{array}{r|rl} 2) & 20 & \\ \hline 2) & 10 & \cdots 0 \\ \hline 2) & 5 & \cdots 0 \\ \hline 2) & 2 & \cdots 1 \\ \hline & 1 & \cdots 0 \end{array}$$

(2) $24 = 11000_{(2)}$

$$\begin{array}{r|rl} 2) & 24 & \\ \hline 2) & 12 & \cdots 0 \\ \hline 2) & 6 & \cdots 0 \\ \hline 2) & 3 & \cdots 0 \\ \hline & 1 & \cdots 1 \end{array}$$

5 次の 2 進法で表された数の計算をしなさい。

(1) $111_{(2)} + 111_{(2)} = 1110_{(2)}$

$$\begin{array}{rr} & 111 \\ + & 111 \\ \hline & 1110 \end{array}$$

(2) $111_{(2)} \times 101_{(2)} = 100011_{(2)}$

$$\begin{array}{rr} & 111 \\ \times & 101 \\ \hline & 111 \\ & 111 \\ \hline & 100011 \end{array}$$

数学ミュージアム　16 進法

（教科書 p.99）

16，16^2，16^3，… ずつにまとめて数えるのが 16 進法です。16 進法は，コンピューターのプログラムをつくるときなどに利用されます。

16 進法で数を表すには，0 から 9 までの 10 種類の数字だけでなく，さらに 6 種類の数字が必要となります。一般には，A, B, C, D, E, F を数字として 10，11，12，13，14，15 に対応させ，次のように表すことが多いようです。

$25D_{(16)} = 2 \times 16^2 + 5 \times 16 + 13 = 605$

16 進法は 2 進法のように桁数が大きくなることがなく，また，16 進法で表された数を 2 進法で表すことは，10 進法で表された数を 2 進法で表すことより容易です。16 進法がコンピューターでよく使われるのは，このためです。

数という文字を表すコード。漢字，ひらがななどの全角の文字には 16 進法 4 桁のコードが対応している。

数学ミュージアム　虫くい算

（教科書 p.100）

右のように，計算の一部が□で隠されていて，そこに適切な数を入れて正しい計算となるようにする問題を，虫くい算といいます。ただし，□には 0 から 9 のうち 1 つの数が入り，左端の□には 0 は入らないものとします。

虫くい算には決まった解き方はありません。わかっている数と計算の規則から，□に入る数を推理していきます。

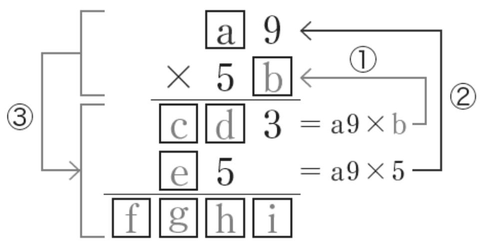
それでは，虫くい算に挑戦してみましょう。ここでは，説明のために，下のように□に入る数を a～i とします。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \square & 9 \\
\times & & 5 & \square \\
\hline
 & \square & \square & 3 \\
 & \square & 5 & \\
\hline
\square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

① a9×b の 1 の位は 3 であるから， b は 7 になる。

② a9×5 = e5 は 2 桁であるから， a は 1 になる。

③ 19×57 を計算すると， c～ i がわかる。



［答え］

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \boxed{1} & 9 \\
\times & & 5 & \boxed{7} \\
\hline
 & \boxed{1} & \boxed{3} & 3 \\
 & \boxed{9} & 5 & \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{8} & \boxed{3}
\end{array}
$$

かける数が 1 桁の虫くい算は考えやすいでしょう。
□をうめてみてください。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \boxed{7} & 5 & \boxed{4} \\
\times & & & 9 \\
\hline
\boxed{6} & 7 & \boxed{8} & 6
\end{array}
$$

それでは，右の虫くい算はどうなるか，考えてみましょう。

$$
\begin{array}{rrr}
 & \boxed{1} & 3 \\
\times & 5 & \boxed{9} \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{1} & 7 \\
6 & \boxed{5} & \\
\hline
\boxed{7} & \boxed{6} & \boxed{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & \boxed{2} & \boxed{1} \\
\times & 3 & \boxed{6} \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{2} & 6 \\
\boxed{6} & 3 & \\
\hline
\boxed{7} & \boxed{5} & \boxed{6}
\end{array}
$$