3 節 積分

1 不定積分

（教科書 p.146）

x^2, x^2-1, x^2+2 は，微分すると

$(x^2)' =$ （① 　　　　）

$(x^2-1)' = (x^2)' - (1)' =$ （② 　　　　）

$(x^2+2)' = (x^2)' + (2)' =$ （③ 　　　　）

のように，すべて $2x$ になる。このほかにも微分すると

$2x$ になる関数は無数にあるが，どれも

$x^2 + C$ 　（C は定数）

の形になっている。

この $x^2 + C$ を $2x$ の（④ 　　　　　　）といい

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

と書く。

＋解説

x^2, x^2-1, x^2+2 $\longrightarrow$ $2x$ 微分

◀記号 $\int$ と dx で $2x$ をはさんで書き表す。
$\int$ は，インテグラルと読む。

一般に，$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ の不定積分は

（⑤ 　　　　　　　　）（C は定数）

と表される。定数 C を（⑥ 　　　　　　）という。

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を

（⑦ 　　　　　　）という。

積分することは，微分することの逆の計算である。

＋解説

微分

$x^2 + C$ 　 $2x$

積分

例1 $(2x^2)' = 4x$ であるから

問1 $(x^3)' = 3x^2$ であることを利用して，$\int 3x^2\,dx$ を求めなさい。

x^n の不定積分

（教科書 p.147）

例2 $(2x^2)' = 4x$ であるから 　 $\int 4x\,dx = 2x^2 + C$

$(x)' = 1$ より

$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ より

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ より

◀ $\int 1dx$ は，単に $\int dx$ と書くことが多い。

一般に，次の公式が成り立つ。

x^n の不定積分
n が 0 または正の整数のとき $\displaystyle\int \boldsymbol{x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

＋解説

1 大きくする

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

1 大きくする

不定積分の計算(1)

k を定数とする。$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき

$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$

したがって，次の公式が成り立つ。

不定積分の公式
$\boldsymbol{\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$ 　　（k は定数）

例3 $\int 3x^2\,dx =$

◀積分定数 C を忘れずに書く。

問2 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int 6x\,dx$

(2) $\int(-8x)\,dx$

(3) $\int(-4x^2)\,dx$

(4) $\int 3\,dx$

不定積分の計算(2) （教科書 p.148）

関数の和や差の積分を考えよう。

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ が成り立つとき

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$$
$$=f(x)+g(x)$$
$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)$$
$$=f(x)-g(x)$$

したがって，次の公式が成り立つ。

不定積分の公式
$\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$ $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

例4 (1) $\int(x^2+x)\,dx=\int\quad dx+\int\quad dx$

$=$

◀積分定数はまとめてCと書く。

(2) $\int(x^2-3x+2)\,dx=$

問3 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(6x+5)\,dx$

(2) $\int(-3x+1)\,dx$

(3) $\int(2x^2-5x-3)\,dx$

⑷ $\int(-6x^2+2x+3)\,dx$

例題 1 不定積分 $\int(x+1)(2x-3)\,dx$ を求めなさい。

解

◀まず，展開する。

問4 次の不定積分を求めなさい。

⑴ $\int(x-2)(x+1)\,dx$

⑵ $\int(3x-1)(x+2)\,dx$

⑶ $\int(x-3)^2\,dx$

⑷ $\int(3x+2)^2\,dx$

例題 2 関数 $f(x)=2x+3$ の不定積分のうち，$F(1)=5$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

解

◀$F(1)=5$ から C が定まる。

問5 関数 $f(x) = -2x + 1$ の不定積分のうち，$F(2) = 3$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

2 定積分

（教科書 p.150）

関数 $f(x) = 3x^2$ に対し

$$F(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

とする。ここで，$F(2) - F(1)$ を求めてみると

$F(2) - F(1) = (2^3 + C) - (1^3 + C) =$（⑧　　　　　）

となり，この値は積分定数 C に無関係である。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき，$F(b) - F(a)$ の値は積分定数 C に無関係である。
この $F(b) - F(a)$ を，$f(x)$ の a から b までの（⑨　　　　　）といい

（⑩　　　　　）

で表す。このとき，a を（⑪　　　　　），b を（⑫　　　　　）という。
また，$F(b) - F(a)$ を（⑬　　　　　）とも書く。

定積分
$F'(x) = f(x)$ のとき $\displaystyle \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

例5 (1)　$\int_1^4 2x\,dx = [\quad]_1^4 =$

(2)　$\int_{-1}^1 x^2\,dx = \Big[\quad\Big]_{-1}^1 =$

◀$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^1$ と計算してもよい。

問6 次の定積分を求めなさい。

(1)　$\int_0^3 4x\,dx$

(2) $\int_1^4 3\,dx$

(3) $\int_{-2}^1 2x^2\,dx$

定積分についても不定積分と同様に，次の公式が成り立つ。

定積分の公式
$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k は定数）
$\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
$\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

例6 $\int_1^3 (3x^2-4x+2)\,dx$

$= (\quad)\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx - (\quad)\int_1^3 x\,dx + (\quad)\int_1^3 dx$

◀$\left[x^3-2x^2+2x\right]_1^3$ としてもよい。

$=$

問7 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_2^4 (3x^2-6x)\,dx$

(2) $\int_0^2 (-x^2+2x+4)\,dx$

例7 $\int_1^2 (x-1)(x+3)\,dx = \int_1^2 (\qquad)\,dx$

◀まず，展開する。

$=$

問8 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_{1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx$

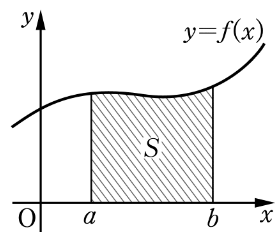
(2) $\int_{-1}^{2}(x+3)^2\,dx$

3 面積

(教科書 p.152)

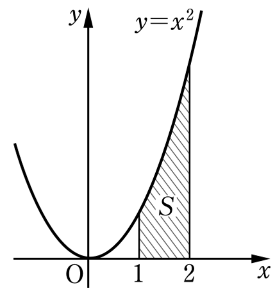
一般に，$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線$y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は，$f(x)$ の a から b までの定積分に等しい。

定積分と面積
$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき $\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)\,dx}$



例8 曲線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S は，(　　) $\leqq x \leqq$ (　　) で $x^2 \geqq 0$ であるから

$S=\int_{(\quad)}^{(\quad)} x^2\,dx=$

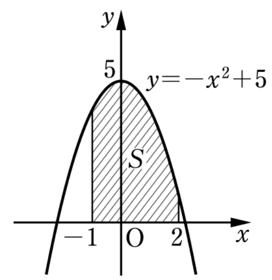


問9 曲線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=3$，$x=5$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

例9 曲線 $y=-x^2+5$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S は，(　　　　) $\leqq x \leqq$ (　　　　) で $-x^2+5 \geqq 0$ であるから

$S=\int_{(\quad)}^{(\quad)} (-x^2+5)\,dx$

$=$



問 10 曲線 $y=-x^2+5$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

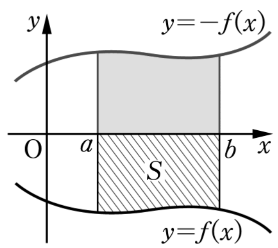
（教科書 p.153）

$f(x) \leqq 0$ となる場合の面積

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=-f(x)$ は x 軸に関して対称であるから，面積 S は，曲線 $y=-f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい。よって

$\boldsymbol{S}=$（⑭　　　　　　　　　　）

となる。



例題 3 曲線 $y=x^2-1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解

問 11 次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

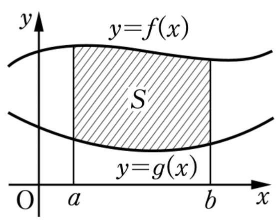
（1）　$y=x^2-3x$

(2)　$y = x^2 + x - 6$

2 曲線間の面積　　（教科書 p.154）

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積は，次のように求められる。

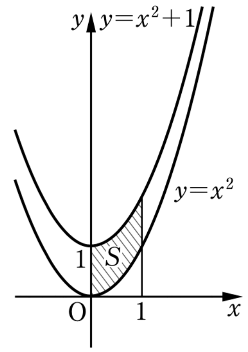
S ＝（⑮　　　　　　　　　　　　　）



例 10 2 曲線 $y = x^2 + 1$，$y = x^2$ と 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $x^2 + 1 \geqq x^2$ であるから

$S =$



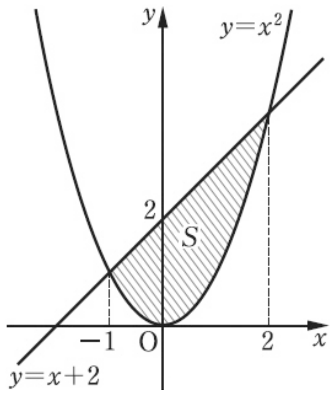
問 12 2 曲線 $y = 2x^2 + 3$，$y = x^2$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

チャレンジ 放物線と直線で囲まれた図形の面積

（教科書 p.155）

例題 1 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解



◀まず，曲線と直線の交点の x 座標を求める。

問1 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.156）

1 次の不定積分を求めなさい。

⑴ $\int(4x-3)\,dx$

⑵ $\int\left(-x^2+5x+3\right)dx$

⑶ $\int(2x+5)(x-3)\,dx$

⑷ $\int(2x-1)^2\,dx$

2 関数 $f(x)=6x^2-2x+5$ の不定積分のうち，$F(1)=4$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

3 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_{1}^{2}(3x-1)\,dx$

(2) $\int_{-1}^{3}(3x^2-4x+1)\,dx$

(3) $\int_{-2}^{2}(x+3)(3x-1)\,dx$

(4) $\int_{1}^{3}(3x+1)^2\,dx$

4 曲線 $y = 3x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1,\ x = 3$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

5 曲線 $y = x^2 + 3x - 4$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

6 2 曲線 $y = x^2,\ y = -x^2 + 4$ と 2 直線 $x = 0,\ x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

3 節 積分

1 不定積分

（教科書 p.146）

x^2，x^2-1，x^2+2 は，微分すると

$(x^2)'=$（① $2x$ ）

$(x^2-1)'=(x^2)'-(1)'=$（② $2x$ ）

$(x^2+2)'=(x^2)'+(2)'=$（③ $2x$ ）

のように，すべて $2x$ になる。このほかにも微分すると $2x$ になる関数は無数にあるが，どれも

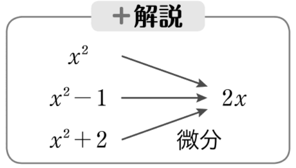
x^2+C （C は定数）

の形になっている。

この x^2+C を $2x$ の（④ 不定積分 ）といい

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

と書く。



◀記号 $\int$ と dx で $2x$ をはさんで書き表す。

$\int$ は，インテグラルと読む。

一般に，$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ の不定積分は

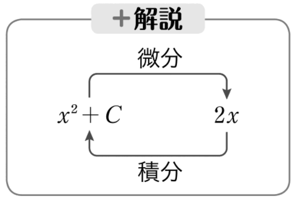
（⑤ $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ ）（C は定数）

と表される。定数 C を（⑥ 積分定数 ）という。

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を

（⑦ 積分する ）という。

積分することは，微分することの逆の計算である。



例1 $(2x^2)'=4x$ であるから　$\int 4x\,dx=2x^2+C$

問1 $(x^3)'=3x^2$ であることを利用して，$\int 3x^2\,dx$ を求めなさい。

$(x^3)'=3x^2$であるから　$\int 3x^2\,dx=x^3+C$

x^n の不定積分

（教科書 p.147）

例2 $(2x^2)'=4x$ であるから　$\int 4x\,dx=2x^2+C$

$(x)'=1$ より　$\int 1\,dx=x+C$

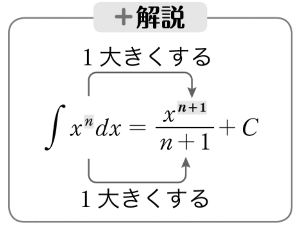
$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$ より　$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ より　$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$

◀ $\int 1dx$ は，単に $\int dx$ と書くことが多い。

一般に，次の公式が成り立つ。

x^n の不定積分
n が 0 または正の整数のとき $\displaystyle\int \boldsymbol{x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$



不定積分の計算(1)

k を定数とする。$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき

$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$

したがって，次の公式が成り立つ。

不定積分の公式
$\int \boldsymbol{kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx}$ （k は定数）

例3 $\int 3x^2\,dx=3\int x^2\,dx=3\times\frac{x^3}{3}+C=x^3+C$

◀積分定数 C を忘れずに書く。

問2 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int 6x\,dx$

$=6\int x\,dx$

$=6\times\frac{x^2}{2}+C$

$=3x^2+C$

(2) $\int(-8x)\,dx$

$=-8\int x\,dx$

$=-8\times\frac{x^2}{2}+C$

$=-4x^2+C$

(3) $\int(-4x^2)\,dx$

$= -4\int x^2\,dx$

$= -4 \times \dfrac{x^3}{3} + C$

$= -\dfrac{4}{3}x^3 + C$

(4) $\int 3\,dx$

$= 3\int dx$

$= 3 \times x + C$

$= 3x + C$

不定積分の計算(2)

（教科書 p.148）

関数の和や差の積分を考えよう。

$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ が成り立つとき

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

したがって，次の公式が成り立つ。

不定積分の公式
$\displaystyle\int\{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\displaystyle\int\{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

例4 (1) $\int(x^2 + x)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$

◀積分定数はまとめてCと書く。

(2) $\int(x^2 - 3x + 2)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int dx$

$= \dfrac{x^3}{3} - 3 \times \dfrac{x^2}{2} + 2 \times x + C$

$= \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$

問3 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(6x + 5)\,dx$

$= 6\int x\,dx + 5\int dx$

$= 6 \times \dfrac{x^2}{2} + 5 \times x + C$

$= 3x^2 + 5x + C$

(2) $\int(-3x + 1)\,dx$

$= -3\int x\,dx + \int dx$

$= -3 \times \dfrac{x^2}{2} + x + C$

$= -\dfrac{3}{2}x^2 + x + C$

(3) $\int(2x^2 - 5x - 3)\,dx$

$= 2\int x^2\,dx - 5\int x\,dx - 3\int dx$

$= 2 \times \dfrac{x^3}{3} - 5 \times \dfrac{x^2}{2} - 3 \times x + C$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + C$

(4) $\int(-6x^2+2x+3)\,dx$

$= -6\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + 3\int dx$

$= -6\times\dfrac{x^3}{3} + 2\times\dfrac{x^2}{2} + 3\times x + C$

$= -2x^3 + x^2 + 3x + C$

例題 1 不定積分 $\int(x+1)(2x-3)\,dx$ を求めなさい。

解 $\int(x+1)(2x-3)\,dx = \int(2x^2-x-3)\,dx$

$= 2\int x^2\,dx - \int x\,dx - 3\int dx$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 3x + C$

◀まず，展開する。

問4 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(x-2)(x+1)\,dx$

$= \int(x^2-x-2)\,dx$

$= \int x^2\,dx - \int x\,dx - 2\int dx$

$= \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + C$

(2) $\int(3x-1)(x+2)\,dx$

$= \int(3x^2+5x-2)\,dx$

$= 3\int x^2\,dx + 5\int x\,dx - 2\int dx$

$= x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + C$

(3) $\int(x-3)^2\,dx$

$= \int(x^2-6x+9)\,dx$

$= \int x^2\,dx - 6\int x\,dx + 9\int dx$

$= \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$

(4) $\int(3x+2)^2\,dx$

$= \int(9x^2+12x+4)\,dx$

$= 9\int x^2\,dx + 12\int x\,dx + 4\int dx$

$= 3x^3 + 6x^2 + 4x + C$

例題 2 関数 $f(x) = 2x+3$ の不定積分のうち，$F(1) = 5$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

解 $F(x) = \int(2x+3)\,dx$

$= 2\int x\,dx + 3\int dx$

$= x^2 + 3x + C$

ここで，$F(1) = 5$ であるから

$1^2 + 3\times 1 + C = 5$

$4 + C = 5$

$C = 1$

よって，求める関数 $F(x)$ は

$F(x) = x^2 + 3x + 1$

◀$F(1) = 5$ から C が定まる。

問5 関数 $f(x)=-2x+1$ の不定積分のうち，$F(2)=3$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

$$F(x)=\int(-2x+1)\,dx$$
$$=-2\int x\,dx+\int dx$$
$$=-x^2+x+C$$

ここで，$F(2)=3$ であるから

$$-2^2+2+C=3$$
$$-2+C=3$$
$$C=5$$

よって，求める関数 $F(x)$ は

$$F(x)=-x^2+x+5$$

2 定積分

（教科書 p.150）

関数 $f(x)=3x^2$ に対し

$$F(x)=\int 3x^2\,dx=x^3+C$$

とする。ここで，$F(2)-F(1)$ を求めてみると

$F(2)-F(1)=(2^3+C)-(1^3+C)=$（⑧ 7 ）

となり，この値は積分定数 C に無関係である。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき，$F(b)-F(a)$ の値は積分定数 C に無関係である。

この $F(b)-F(a)$ を，$f(x)$ の a から b までの（⑨ 定積分 ）といい

（⑩ $\int_a^b f(x)\,dx$ ）

で表す。このとき，a を（⑪ 下端 ），b を（⑫ 上端 ）という。

また，$F(b)-F(a)$ を（⑬ $[F(x)]_a^b$ ）とも書く。

定積分
$F'(x)=f(x)$ のとき $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$

例5 (1) $\int_1^4 2x\,dx=[\,x^2\,]_1^4=4^2-1^2=15$

(2) $\int_{-1}^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{2}{3}$

◀ $\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^1$ と計算してもよい。

問6 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_0^3 4x\,dx$

$=[2x^2]_0^3$

$=2\times3^2-2\times0^2$

$=18$

(2) $\int_1^4 3\,dx$

$= [3x]_1^4$

$= 3\times 4 - 3\times 1$

$= 9$

(3) $\int_{-2}^1 2x^2\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^1$

$= \frac{2}{3}\times 1^3 - \frac{2}{3}\times(-2)^3$

$= 6$

定積分についても不定積分と同様に，次の公式が成り立つ。

定積分の公式

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k\text{ は定数})$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

例6 $\int_1^3 (3x^2-4x+2)\,dx$

$= (\ 3\ )\int_1^3 x^2\,dx - (\ 4\ )\int_1^3 x\,dx + (\ 2\ )\int_1^3 dx$

◀$\left[x^3-2x^2+2x\right]_1^3$ としてもよい。

$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + 2[x]_1^3$

$= [x^3]_1^3 - 2[x^2]_1^3 + 2[x]_1^3$

$= (3^3-1^3) - 2(3^2-1^2) + 2(3-1)$

$= 14$

問7 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_2^4 (3x^2-6x)\,dx$

$= 3\int_2^4 x^2\,dx - 6\int_2^4 x\,dx$

$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 - 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$

$= [x^3]_2^4 - 3[x^2]_2^4$

$=(4^3-2^3) - 3(4^2-2^2)$

$= 20$

(2) $\int_0^2 (-x^2+2x+4)\,dx$

$= -\int_0^2 x^2\,dx + 2\int_0^2 x\,dx + 4\int_0^2 dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 4[x]_0^2$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_0^2 + [x^2]_0^2 + 4[x]_0^2$

$= -\frac{1}{3}(2^3-0^3) + (2^2-0^2) + 4(2-0)$

$= \frac{28}{3}$

例7 $\int_1^2 (x-1)(x+3)\,dx = \int_1^2 (\ x^2+2x-3\ )\,dx$ ◀まず，展開する。

$= \int_1^2 x^2\,dx + 2\int_1^2 x\,dx - 3\int_1^2 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 3[x]_1^2$

$= \frac{1}{3}[x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 - 3[x]_1^2$

$= \frac{1}{3}(2^3-1^3) + (2^2-1^2) - 3(2-1)$

$= \frac{7}{3}$

問8 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^3 (x+1)(x-3)\,dx$

$= \int_1^3 (x^2-2x-3)\,dx$

$= \int_1^3 x^2\,dx - 2\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - 3[x]_1^3$

$= \frac{1}{3}[x^3]_1^3 - [x^2]_1^3 - 3[x]_1^3$

$= \frac{1}{3}(3^3-1^3) - (3^2-1^2) - 3(3-1)$

$= -\frac{16}{3}$

(2) $\int_{-1}^2 (x+3)^2\,dx$

$= \int_{-1}^2 (x^2+6x+9)\,dx$

$= \int_{-1}^2 x^2\,dx + 6\int_{-1}^2 x\,dx + 9\int_{-1}^2 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 + 9[x]_{-1}^2$

$= \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 + 3[x^2]_{-1}^2 + 9[x]_{-1}^2$

$= \frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\} + 3\{2^2-(-1)^2\} + 9\{2-(-1)\}$

$= 39$

3 面積

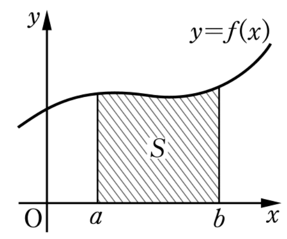
（教科書 p.152）

一般に，$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線$y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は，$f(x)$ の a から b までの定積分に等しい。

定積分と面積

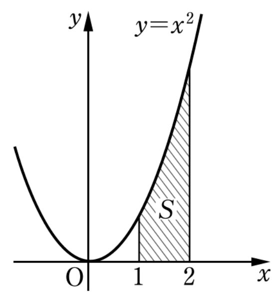
$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



例8 曲線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S は，（ 1 ）$\leqq x \leqq$（ 2 ）で $x^2 \geqq 0$ であるから

$S = \int_{(\ 1\ )}^{(\ 2\ )} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}[x^3]_1^2 = \frac{7}{3}$



問9 曲線 $y=x^2$ と x 軸および 2 直線 $x=3$，$x=5$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

求める面積を S とすると，$3 \leqq x \leqq 5$で$x^2 \geqq 0$ であるから

$S = \int_3^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{1}{3}[x^3]_3^5 = \frac{98}{3}$

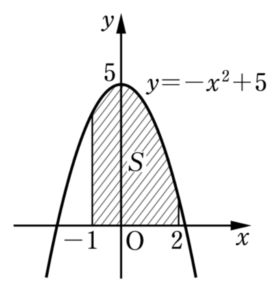
例9 曲線 $y=-x^2+5$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S は,（ -1 ）$\leqq x \leqq$（ 2 ）で $-x^2+5 \geqq 0$ であるから

$S = \int_{(\ -1\ )}^{(\ 2\ )} (-x^2+5)\,dx$

$= -\int_{-1}^2 x^2\,dx + 5\int_{-1}^2 dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 + 5[x]_{-1}^2$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 + 5[x]_{-1}^2 = 12$



問 10 曲線 $y=-x^2+5$ と x 軸および 2 直線 $x=1$, $x=2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

求める図形の面積を S とすると，$1 \leqq x \leqq 2$ で $-x^2+5 \geqq 0$ であるから

$$S=\int_1^2(-x^2+5)\,dx$$
$$=-\int_1^2 x^2\,dx+5\int_1^2 dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+5[x]_1^2$$
$$=-\frac{1}{3}[x^3]_1^2+5[x]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}$$

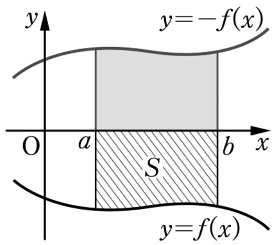
（教科書 p.153）

$f(x) \leqq 0$ となる場合の面積

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=-f(x)$ は x 軸に関して対称であるから，面積 S は，曲線 $y=-f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積に等しい。よって

S = (⑭ $\int_a^b\{-f(x)\}\,dx$)

となる。



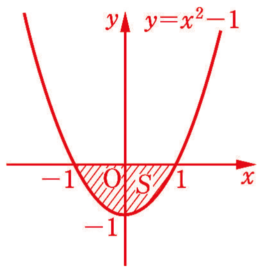
例題 3 曲線 $y=x^2-1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解 曲線 $y=x^2-1$ と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-1=0$ の解であるから

$x=-1,\ 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ で $x^2-1 \leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1\{-(x^2-1)\}\,dx=\int_{-1}^1(-x^2+1)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^1 x^2\,dx+\int_{-1}^1 dx=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1+[x]_{-1}^1$$
$$=-\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^1+[x]_{-1}^1=\frac{4}{3}$$



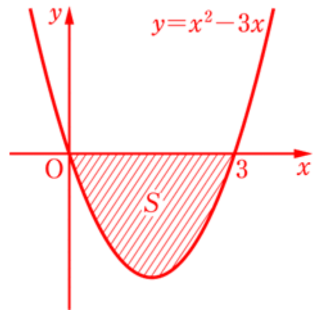
問 11 次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(1) $y=x^2-3x$

曲線 $y=x^2-3x$ と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-3x=0$ の解であるから

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$



$0 \leqq x \leqq 3$ で $x^2-3x \leqq 0$ であるから，求める面積 S は

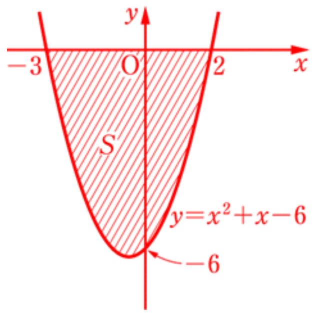
$$S=\int_0^3\{-(x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$$
$$=-\int_0^3 x^2\,dx+3\int_0^3 x\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}[x^3]_0^3+\frac{3}{2}[x^2]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2) $y = x^2 + x - 6$

曲線 $y = x^2 + x - 6$ と x 軸の交点の x座標は，$x^2 + x - 6 = 0$ の解であるから

$(x+3)(x-2) = 0$

$x = -3,\ 2$



$-3 \leqq x \leqq 2$ で $x^2 + x - 6 \leqq 0$ であるから，求める面積 S は

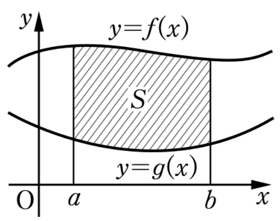
$$S = \int_{-3}^{2} \{-(x^2 + x - 6)\}\,dx$$
$$= \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\,dx$$
$$= -\int_{-3}^{2} x^2\,dx - \int_{-3}^{2} x\,dx + 6\int_{-3}^{2} dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} + 6[x]_{-3}^{2}$$
$$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-3}^{2} - \frac{1}{2}[x^2]_{-3}^{2} + 6[x]_{-3}^{2}$$
$$= \frac{125}{6}$$

2 曲線間の面積

(教科書 p.154)

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積は，次のように求められる。

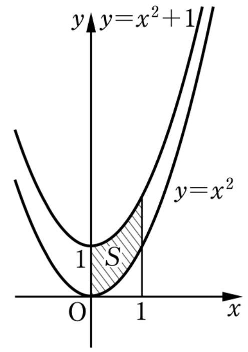
$\boldsymbol{S} =$ (⑮ $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$)



例 10 2 曲線 $y = x^2 + 1$，$y = x^2$ と 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $x^2 + 1 \geqq x^2$ であるから

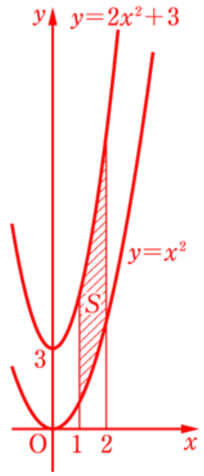
$$S = \int_0^1 \{(x^2+1) - x^2\}\,dx = \int_0^1 dx$$
$$= [x]_0^1 = 1$$



問 12 2 曲線 $y = 2x^2 + 3$，$y = x^2$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

求める面積を S とすると，$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $2x^2 + 3 \geqq x^2$ であるから

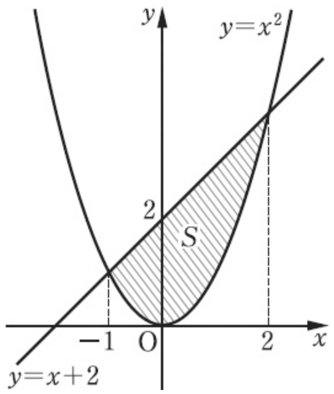
$$S = \int_1^2 \{(2x^2+3) - x^2\}\,dx$$
$$= \int_1^2 (x^2 + 3)\,dx$$
$$= \int_1^2 x^2\,dx + 3\int_1^2 dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 3[x]_1^2$$
$$= \frac{1}{3}[x^3]_1^2 + 3[x]_1^2$$
$$= \frac{16}{3}$$



チャレンジ　放物線と直線で囲まれた図形の面積

（教科書 p.155）

例題 1 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。



◀まず，曲線と直線の交点の x 座標を求める。

解 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点の x 座標は，$x^2=x+2$ の解であるから

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

よって　$x=-1,\ 2$

ここで，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で $x^2\leqq x+2$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

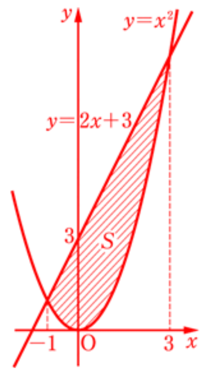
$$=-\int_{-1}^{2}x^2\,dx+\int_{-1}^{2}x\,dx+2\int_{-1}^{2}dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}+2[x]_{-1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{2}+\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{2}+2[x]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

問1 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。



曲線 $y=x^2$ と直線$y=2x+3$ の交点の x 座標は，

$x^2=2x+3$ の解であるから

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

よって　$x=-1,\ 3$

ここで，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲で $x^2\leqq 2x+3$ であるから，

求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{3}\{(2x+3)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{3}x^2\,dx+2\int_{-1}^{3}x\,dx+3\int_{-1}^{3}dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}+3[x]_{-1}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{3}+[x^2]_{-1}^{3}+3[x]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{32}{3}$$

復 習 問 題

（教科書 p.156）

1 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(4x-3)\,dx$

$= 4\int x\,dx - 3\int dx$

$= 4\times\dfrac{x^2}{2} - 3\times x + C$

$= 2x^2 - 3x + C$

(2) $\int\left(-x^2+5x+3\right)dx$

$= -\int x^2\,dx + 5\int x\,dx + 3\int dx$

$= -\dfrac{x^3}{3} + 5\times\dfrac{x^2}{2} + 3\times x + C$

$= -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + C$

(3) $\int(2x+5)(x-3)\,dx$

$= \int(2x^2 - x - 15)\,dx$

$= 2\int x^2\,dx - \int x\,dx - 15\int dx$

$= 2\times\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 15\times x + C$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 15x + C$

(4) $\int(2x-1)^2\,dx$

$= \int(4x^2-4x+1)\,dx$

$= 4\int x^2\,dx - 4\int x\,dx + \int dx$

$= 4\times\dfrac{x^3}{3} - 4\times\dfrac{x^2}{2} + x + C$

$= \dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

2 関数 $f(x) = 6x^2 - 2x + 5$ の不定積分のうち，$F(1) = 4$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

$F(x) = \int(6x^2-2x+5)\,dx$

$= 6\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int dx$

$= 2x^3 - x^2 + 5x + C$

ここで，$F(1) = 4$ であるから

$2\times1^3 - 1^2 + 5\times1 + C = 4$

$6 + C = 4$

$C = -2$

よって，求める関数 $F(x)$ は

$F(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$

3 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^2 (3x-1)\,dx$

$$= 3\int_1^2 x dx - \int_1^2 dx$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - [x]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}[x^2]_1^2 - [x]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}(2^2-1^2) - (2-1)$$

$$= \frac{7}{2}$$

(2) $\int_{-1}^3 (3x^2-4x+1)\,dx$

$$= 3\int_{-1}^3 x^2\,dx - 4\int_{-1}^3 x\,dx + \int_{-1}^3 dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^3 + [x]_{-1}^3$$

$$= [x^3]_{-1}^3 - 2[x^2]_{-1}^3 + [x]_{-1}^3$$

$$= \{3^3-(-1)^3\} - 2\{3^2-(-1)^2\} + \{3-(-1)\}$$

$$= 16$$

(3) $\int_{-2}^2 (x+3)(3x-1)\,dx$

$$= \int_{-2}^2 (3x^2+8x-3)\,dx$$

$$= 3\int_{-2}^2 x^2\,dx + 8\int_{-2}^2 x\,dx - 3\int_{-2}^2 dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 + 8\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^2 - 3[x]_{-2}^2$$

$$= [x^3]_{-2}^2 + 4[x^2]_{-2}^2 - 3[x]_{-2}^2$$

$$= \{2^3-(-2)^3\} + 4\{2^2-(-2)^2\} - 3\{2-(-2)\}$$

$$= 4$$

(4) $\int_1^3 (3x+1)^2\,dx$

$$= \int_1^3 (9x^2+6x+1)\,dx$$

$$= 9\int_1^3 x^2\,dx + 6\int_1^3 x\,dx + \int_1^3 dx$$

$$= 9\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + [x]_1^3$$

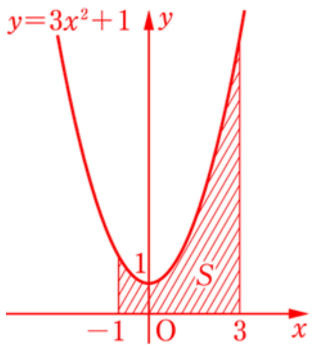
$$= 3[x^3]_1^3 + 3[x^2]_1^3 + [x]_1^3$$

$$= 3(3^3-1^3) + 3(3^2-1^2) + (3-1)$$

$$= 104$$

4 曲線 $y=3x^2+1$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=3$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

求める面積を S とすると，$-1 \leqq x \leqq 3$ で $3x^2+1 \geqq 0$ であるから



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3}(3x^2+1)\,dx \\
&= 3\int_{-1}^{3}x^2\,dx + \int_{-1}^{3}dx \\
&= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} + [x]_{-1}^{3} \\
&= [x^3]_{-1}^{3} + [x]_{-1}^{3} \\
&= 32
\end{aligned}
$$

5 曲線 $y=x^2+3x-4$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

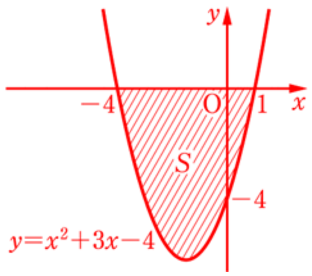
曲線 $y=x^2+3x-4$ と x 軸の交点の x 座標は，

$x^2+3x-4=0$ の解であるから

$(x+4)(x-1)=0$

$x=-4,\ 1$

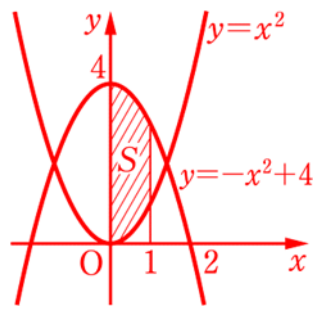
$-4 \leqq x \leqq 1$ で $x^2+3x-4 \leqq 0$ あるから，求める面積 S は



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-4}^{1}\{-(x^2+3x-4)\}\,dx \\
&= \int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)\,dx \\
&= -\int_{-4}^{1}x^2\,dx - 3\int_{-4}^{1}x\,dx + 4\int_{-4}^{1}dx \\
&= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{1} - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{1} + 4[x]_{-4}^{1} \\
&= -\frac{1}{3}[x^3]_{-4}^{1} - \frac{3}{2}[x^2]_{-4}^{1} + 4[x]_{-4}^{1} \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}
$$

6 2 曲線 $y=x^2$，$y=-x^2+4$ と 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

求める面積を S とすると，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $-x^2+4 \geqq x^2$ であるから



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{0}^{1}\{(-x^2+4)-x^2\}\,dx \\
&= \int_{0}^{1}(-2x^2+4)\,dx \\
&= -2\int_{0}^{1}x^2\,dx + 4\int_{0}^{1}dx \\
&= -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} + 4[x]_{0}^{1} \\
&= -\frac{2}{3}[x^3]_{0}^{1} + 4[x]_{0}^{1} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$