2 節 導関数の応用

1 関数の増加･減少

（教科書 p.137）

一般に，関数 $f(x)$ の増減は，$f'(x)$ の値の符号から判断できる。

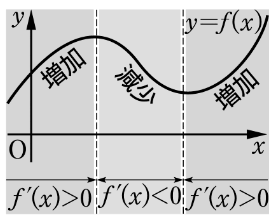
増加・減少

$\boldsymbol{f'(x) > 0}$ となる x の範囲で，

　　$\boldsymbol{f(x)}$ は**増加**する。

$\boldsymbol{f'(x) < 0}$ となる x の範囲で，

　　$\boldsymbol{f(x)}$は**減少**する。



増減表

（教科書 p.138）

関数 $f(x) = x^2 - 2x$ の増減を調べてみよう。

$f(x) = x^2 - 2x$ を微分すると

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

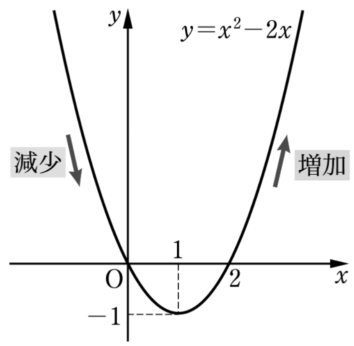
$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = 1$$

また，$x < 1$ のとき　　$f'(x) < 0$

　　$x > 1$ のとき　　$f'(x) > 0$

である。



よって，関数 $f(x) = x^2 - 2x$ は $x < 1$ で減少し，$x > 1$ で増加する。

上の関数 $f(x)$ の増加・減少のようすを表に表すと，次のようになる。

このような表を

（①　　　　　　）といい，

表の中の記号

↗は（②　　　　　）を，

↘は（③　減少　）を表す。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

◀増減表は，$f'(x) = 0$ となる x を境にしてつくる。

◀$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 = -1$

例1 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ を微分すると

　$f'(x) =$

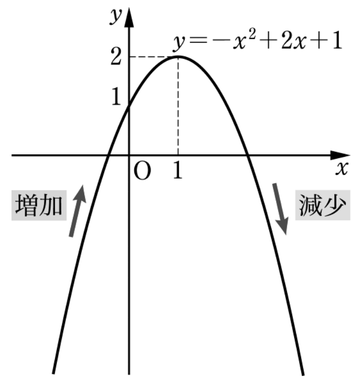
$f'(x) = 0$ の解は

$f(x)$ の増減表は，

次のようになる。

x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

よって，$x < 1$ で（　　　　　）し，$x > 1$ で（　　　　　）する。



◀**増減の調べ方**

① $f'(x)$ を求める。

② $f'(x) = 0$ を解く。

③ 増減表をつくる。

④ $f'(x) > 0$ の範囲で増加

　$f'(x) < 0$ の範囲で減少

問1 次の関数の増減を調べなさい。

（1）　$f(x) = x^2 - 4x$

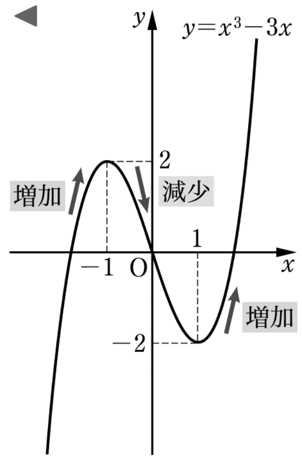
x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

(2) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$

x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

例題 1 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べなさい。

解



問2 次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x) = x^3 - 12x$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

(2) $f(x) = -2x^3 + 6x - 1$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

2 関数の極大・極小

（教科書 p.140）

139 ページの例題 1 の関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減表は，次のようであった。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

関数 $f(x)$ は，$x = -1$ を境にして増加から減少に変わる。このとき

$f(x)$ は $x = -1$ において（④　　　　　　）になるといい，

$f(-1) = 2$ を（⑤　　　　　　）という。

また，関数 $f(x)$ は，$x = 1$ を境にして減少から増加に変わる。このとき

$f(x)$ は $x = 1$ において（⑥　　　　　　）になるといい，

$f(1) = -2$ を（⑦　　　　　　）という。

さらに，極大値と極小値を合わせて，（⑧　　　　　　）という。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとき，$x = a$ を境にして $f(x)$ の増減が入れかわり，$f'(x)$ の符号が変わるから $f'(a) = 0$ となる。

したがって，極値を求めるには，まず

$f'(x) = 0$ となる x の値

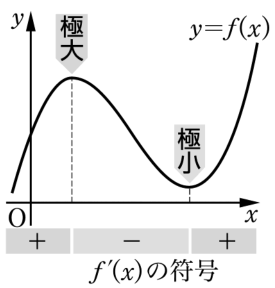
を求め，さらにその値の前後における $f'(x)$ の符号を調べればよい。

極大値・極小値

$f'(a) = 0$ となる $x = a$ を境にして

$f'(x)$ が正から負に変われば，**$f(a)$ は極大値**

$f'(x)$ が負から正に変われば，**$f(a)$ は極小値**



例2 関数 $f(x) = -2x^2 + 4x$ の極値を求めてみよう。

$f'(x) =$

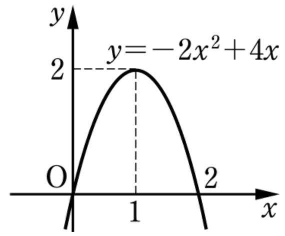
$f'(x) = 0$ の解は

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

よって，この関数は

$x =$　のとき　　になり，



◀**極値の求め方**
① $f'(x)$ を求める。
② $f'(x) = 0$ を解く。
③ 増減表をつくる。
④ $f'(x)$ が
　$+ \to -$　極大
　$- \to +$　極小

問3 次の関数の極値を求めなさい。

（1）　$f(x) = x^2 - 1$

⑵ $f(x)=-x^2+6x+3$

例3 関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の極値を求めてみよう。

$f'(x)=$

$f'(x)=0$ の解は

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

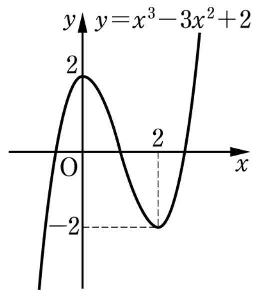
よって，この関数は

$x=$（　　　　）のとき（　　　　　　）になり，

（　　　　　　　　）

$x=$（　　　　）のとき（　　　　　　）になり，

（　　　　　　　　）

◀ 

問4 次の関数の極値を求めなさい。

⑴ $f(x)=2x^3-6x-1$

⑵ $f(x)=-x^3-3x^2+1$

（教科書 p.142）

関数のグラフ

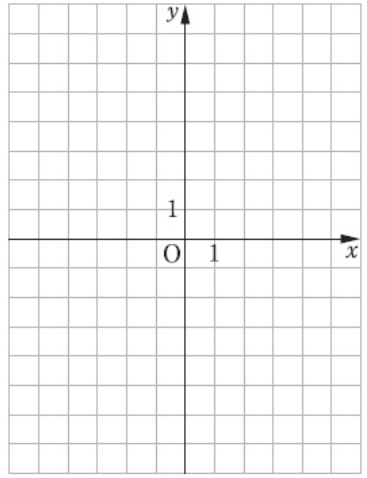
例題 2 関数 $y=-x^3+3x+1$ の極値を求め，グラフをかきなさい。

解

問5 次の関数の極値を求め，グラフをかきなさい。

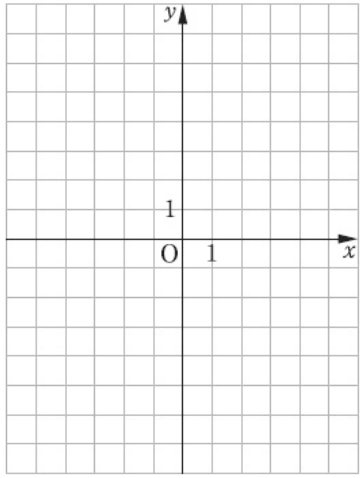
（1） $y=x^3-3x-2$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					



(2)　$y=-2x^3+3x^2-1$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					



3 関数の最大・最小

（教科書 p.143）

例題 3　次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$$y=x^3-3x^2+1\ (-2\leqq x\leqq 3)$$

◀$(-2\leqq x\leqq 3)$ は，この関数の定義域が $-2\leqq x\leqq 3$ であることを表す。

解

例題３のように，極小値が（⑨　　　　　　　　）になるとはかぎらない。
同様に，極大値が（⑩　　　　　　　　）になるとはかぎらない。

問6 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 2$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$

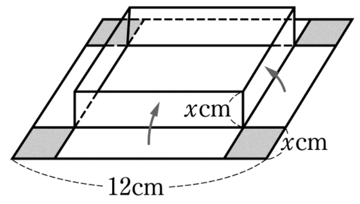
(2) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$

⑶ $y=-x^3+12x\ (-1 \leqq x \leqq 3)$

（教科書 p.144）

例題 4

1 辺が 12cm の正方形の紙がある。いま，この4 隅から1 辺が $x$cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない高さ $x$cm の直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには， x の値をいくらにすればよいか求めなさい。



解

◀ $x>0$，$12-2x>0$ より
$0<x<6$

問7 例題 4 のように，1 辺が 6cm の正方形の紙の 4 隅から1 辺が $x$cm の正方形を切り取り，高さ$x$cm の直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには，x の値をいくらにすればよいか求めなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.145）

1 次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x)=x^2-8x+1$

(2) $f(x)=x^3+3x^2+2$

2 次の関数の極値を求めなさい。

(1) $f(x)=x^3+3x^2-9x$

(2) $f(x) = -x^3 + 12x + 16$

3 次の関数の極値を求め，グラフをかきなさい。

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

⑵ $y=-x^3+6x^2-9x$

⑶ $y=-2x^3+6x+1$

4 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

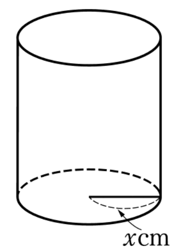
(1) $y = x^3 - 3x - 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -x^3 + 6x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

5 底面の半径と高さの和が 12cm の円柱がある。この円柱について，次の問に答えなさい。

(1) 底面の半径を $x$cm とするとき，円柱の高さを x で表しなさい。

(2) 円柱の体積を $y$cm^3 とするとき，y を x で表しなさい。



⑶　円柱の体積 y の最大値を求めなさい。

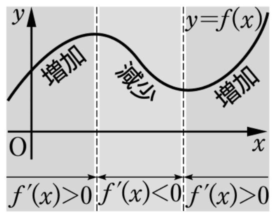
2 節 導関数の応用

1 関数の増加・減少

（教科書 p.137）

一般に，関数 $f(x)$ の増減は，$f'(x)$ の値の符号から判断できる。

増加・減少
$f'(x) > 0$ となる x の範囲で， $f(x)$ は**増加**する。 $f'(x) < 0$ となる x の範囲で， $f(x)$は**減少**する。



増減表

（教科書 p.138）

関数 $f(x) = x^2 - 2x$ の増減を調べてみよう。

$f(x) = x^2 - 2x$ を微分すると

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$f'(x) = 0$ となる x の値は

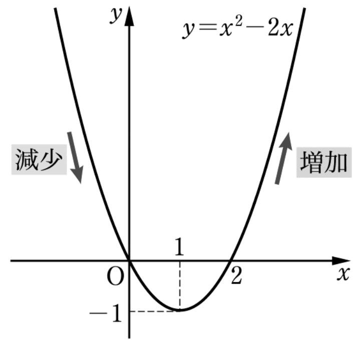
$x = 1$

また，$x < 1$ のとき　$f'(x) < 0$

$x > 1$ のとき　$f'(x) > 0$

である。

よって，関数 $f(x) = x^2 - 2x$ は $x < 1$ で減少し，$x > 1$ で増加する。



上の関数 $f(x)$ の増加・減少のようすを表に表すと，次のようになる。

このような表を

（① 増減表 ）といい，

表の中の記号

↗は（② 増加 ）を，

↘は（③ 減少 ）を表す。

x	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	−1	↗

◀増減表は，$f'(x) = 0$ となる x を境にしてつくる。

◀$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 = -1$

例1 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ を微分すると

$f'(x) = -2x + 2$

$= -2(x-1)$

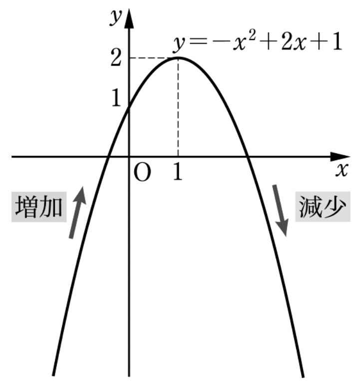
$f'(x) = 0$ の解は

$x = 1$

$f(x)$ の増減表は，

次のようになる。

x	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	2	↘



◀**増減の調べ方**
① $f'(x)$ を求める。
② $f'(x) = 0$ を解く。
③ 増減表をつくる。
④ $f'(x) > 0$ の範囲で増加
$f'(x) < 0$ の範囲で減少

よって，$x < 1$ で（ 増加 ）し，$x > 1$ で（ 減少 ）する。

問1 次の関数の増減を調べなさい。

(1)　$f(x) = x^2 - 4x$

x	…		…
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = 2$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 = -4$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	−4	↗

よって，$x < 2$ で減少し，$x > 2$ で増加する。

(2)　$f(x) = -2x^2 - 4x - 1$

x	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

$f'(x) = -4x - 4 = -4(x+1)$

$f'(x) = 0$ の解は　　$x = -1$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-1) = -2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1$

$= 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって，$x < -1$ で増加し，$x > -1$ で減少する。

例題 1　関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べなさい。

解　$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ の解は

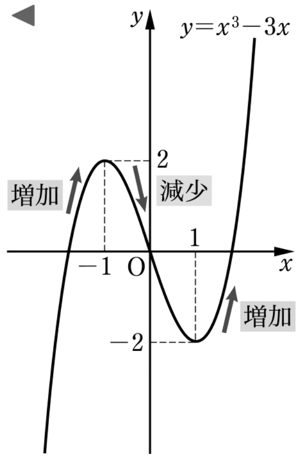
$x = -1,\ 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，$x < -1,\ 1 < x$ で増加し，

$-1 < x < 1$ で減少する。



問2　次の関数の増減を調べなさい。

(1)　$f(x) = x^3 - 12x$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f'(x) = 0$ の解は　　$x = -2,\ 2$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \times (-2) = 16$

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2 = -16$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

よって，$x < -2,\ 2 < x$ で増加し，

$-2 < x < 2$ で減少する。

(2)　$f(x) = -2x^3 + 6x - 1$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ の解は　　$x = -1,\ 1$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-1) = -2 \times (-1)^3 + 6 \times (-1) - 1 = -5$

$f(1) = -2 \times 1^3 + 6 \times 1 - 1 = 3$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$

よって，$x < -1,\ 1 < x$ で減少し，

$-1 < x < 1$ で増加する。

2 関数の極大・極小

（教科書 p.140）

139 ページの例題 1 の関数 $f(x)=x^3-3x$ の増減表は，次のようであった。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

関数 $f(x)$ は，$x=-1$ を境にして増加から減少に変わる。このとき

$f(x)$ は $x=-1$ において（④　極大　）になるといい，

$f(-1)=2$ を（⑤　極大値　）という。

また，関数 $f(x)$ は，$x=1$ を境にして減少から増加に変わる。このとき

$f(x)$ は $x=1$ において（⑥　極小　）になるといい，

$f(1)=-2$ を（⑦　極小値　）という。

さらに，極大値と極小値を合わせて，（⑧　極値　）という。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとき，$x=a$ を境にして $f(x)$ の増減が入れかわり，$f'(x)$ の符号が変わるから $f'(a)=0$ となる。

したがって，極値を求めるには，まず

$f'(x)=0$ となる x の値

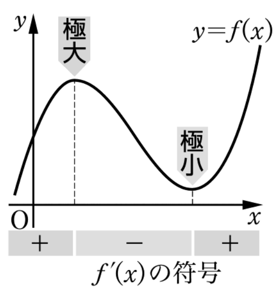
を求め，さらにその値の前後における $f'(x)$ の符号を調べればよい。

極大値・極小値

$f'(a)=0$ となる $x=a$ を境にして

$f'(x)$ が正から負に変われば，$f(a)$ は極大値

$f'(x)$ が負から正に変われば，$f(a)$ は極小値



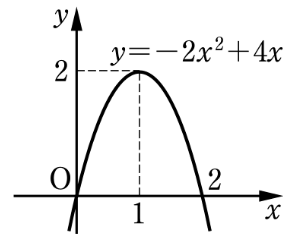
例2 関数 $f(x)=-2x^2+4x$ の極値を求めてみよう。

$f'(x)=-4x+4=-4(x-1)$

$f'(x)=0$ の解は　$x=1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 2	↘



よって，この関数は

$x=1$ のとき極大になり，極大値は 2

◀**極値の求め方**
① $f'(x)$ を求める。
② $f'(x)=0$ を解く。
③ 増減表をつくる。
④ $f'(x)$ が
＋→－　極大
－→＋　極小

問3 次の関数の極値を求めなさい。

(1)　$f(x)=x^2-1$

$f'(x)=2x$

$f'(x)=0$ の解は　$x=0$

$f'(x)=0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(0)=0^2-1=-1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 -1	↗

よって，この関数は

$x=0$ のとき極小になり，極小値は-1

(2) $f(x) = -x^2 + 6x + 3$

$f'(x) = -2x + 6 = -2(x-3)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = 3$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(3) = -3^2 + 6 \times 3 + 3 = 12$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 12	↘

よって，この関数は

$x = 3$ のとき極大になり，極大値は12

例3 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ の極値を求めてみよう。

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = 0,\ 2$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

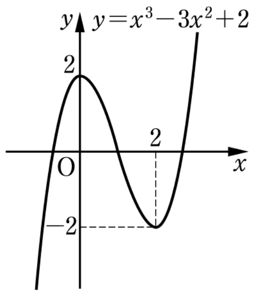
よって，この関数は

$x =$ (0) のとき (極大) になり，

(極大値は 2)

$x =$ (2) のとき (極小) になり，

(極小値は -2)



問4 次の関数の極値を求めなさい。

(1) $f(x) = 2x^3 - 6x - 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = -1,\ 1$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-1) = 2 \times (-1)^3 - 6 \times (-1) - 1$

$= 3$

$f(1) = 2 \times 1^3 - 6 \times 1 - 1 = -5$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 -5	↗

よって，この関数は

$x = -1$ のとき極大になり，

極大値は 3

$x = 1$ のとき極小になり，

極小値は -5

(2) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = -2,\ 0$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-2) = -(-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 1$

$= -3$

$f(0) = -0^3 - 3 \times 0^2 + 1 = 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -3	↗	極大 1	↘

よって，この関数は

$x = 0$ のとき極大になり，

極大値は 1

$x = -2$ のとき極小になり，

極小値は -3

（教科書 p.142）

関数のグラフ

例題 2 関数 $y=-x^3+3x+1$ の極値を求め，グラフをかきなさい。

解 $y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ の解は　$x=-1,\ 1$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 3	↘

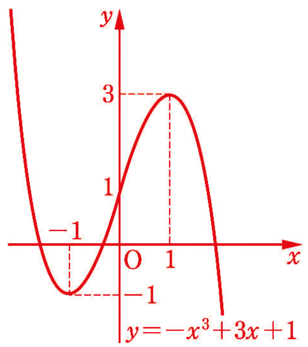
よって，この関数は

$x=1$ のとき　極大値 3

$x=-1$ のとき　極小値 -1

をとる。また，$x=0$ のとき $y=1$ である。

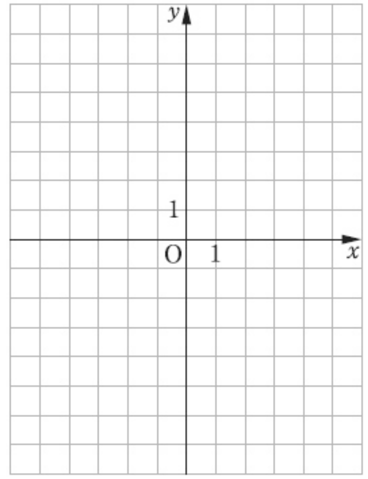
したがって，グラフは右の図のようになる。



問5 次の関数の極値を求め，グラフをかきなさい。

(1)　$y=x^3-3x-2$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					



$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ の解は　$x=-1,\ 1$

$x=-1$ のとき

$y=(-1)^3-3\times(-1)-2=0$

$x=1$ のとき

$y=1^3-3\times1-2$

$=-4$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

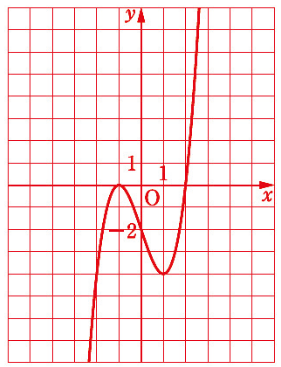
よって，この関数は

$x=-1$ のとき　極大値 0

$x=1$ のとき　極小値 -4

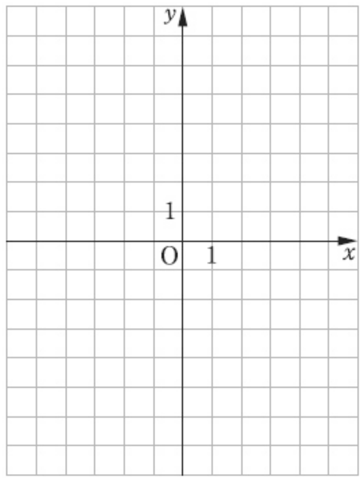
をとる。また，$x=0$ のとき $y=-2$ である。

したがって，グラフは次の図のようになる。



(2) $y=-2x^3+3x^2-1$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					



$y'=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$y'=0$ の解は　$x=0,\ 1$

$x=0$ のとき

$y=-2\times0^3+3\times0^2-1$

$=-1$

$x=1$ のとき

$y=-2\times1^3+3\times1^2-1$

$=0$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 0	↘

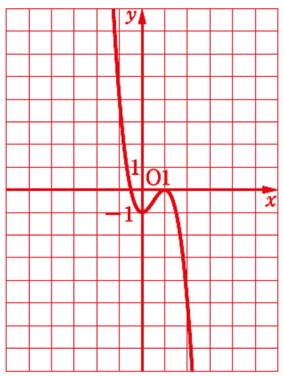
よって，この関数は

$x=1$ のとき　極大値 0

$x=0$ のとき　極小値 -1

をとる。

したがって，グラフは次の図のようになる。



3 関数の最大･最小

（教科書 p.143）

例題 3 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$y=x^3-3x^2+1\ (-2\leqq x\leqq 3)$

◀$(-2\leqq x\leqq 3)$ は，この関数の定義域が $-2\leqq x\leqq 3$ であることを表す。

解 $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ の解は　$x=0,\ 2$

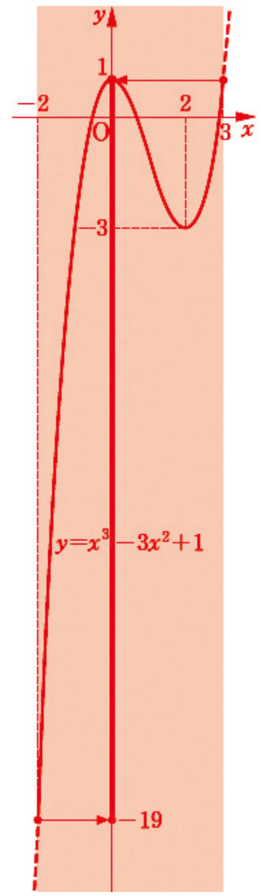
$-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-19	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗	1

よって，この関数の最大値と最小値は

$x=0,\ 3$ のとき　最大値 1

$x=-2$ のとき　最小値 -19



例題３のように，極小値が（⑨　最小値　）になるとはかぎらない。
同様に，極大値が（⑩　最大値　）になるとはかぎらない。

問6 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$

$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$y' = 0$ の解は　$x = -2,\ 0$

$x = -2$ のとき

$y = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 2 = 2$

$x = 0$ のとき

$y = 0^3 + 3 \times 0^2 - 2 = -2$

$x = 2$ のとき

$y = 2^3 + 3 \times 2^2 - 2 = 18$

$-2 \leqq x \leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'	0	$-$	0	$+$	
y	極大 2	↘	極小 -2	↗	18

よって，この関数の最大値と最小値は

$x = 2$ のとき　最大値 18

$x = 0$ のとき　最小値 -2

(2) $y = x^3 - 3x^2 - 9x\ (-3 \leqq x \leqq 2)$

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$y' = 0$ の解は　$x = -1,\ 3$

$x = -3$ のとき

$y = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3)$

$= -27$

$x = -1$ のとき

$y = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1)$

$= 5$

$x = 2$ のとき

$y = 2^3 - 3 \times 2^2 - 9 \times 2 = -22$

$-3 \leqq x \leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-27	↗	極大 5	↘	-22

よって，この関数の最大値と最小値は

$x = -1$ のとき　最大値 5

$x = -3$ のとき　最小値 -27

(3) $y = -x^3 + 12x\ (-1 \leqq x \leqq 3)$

$y' = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$

$y' = 0$ の解は　$x = -2,\ 2$

$x = -1$ のとき

$y = -(-1)^3 + 12 \times (-1) = -11$

$x = 2$ のとき

$y = -2^3 + 12 \times 2 = 16$

$x = 3$ のとき

$y = -3^3 + 12 \times 3 = 9$

$-1 \leqq x \leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-11	↗	極大 16	↘	9

よって，この関数の最大値と最小値は

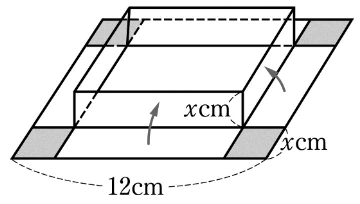
$x = 2$ のとき　最大値 16

$x = -1$ のとき　最小値 -11

関数の最大・最小の利用

（教科書 p.144）

例題 4 1 辺が 12cm の正方形の紙がある。いま，この4 隅から 1 辺が $x$cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない高さ $x$cm の直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには，x の値をいくらにすればよいか求めなさい。



解 箱の底面の 1 辺は $(12-2x)$cm，高さは $x$cm である。

これらは正であるから

$0 < x < 6$　……①

◀ $x > 0$，$12 - 2x > 0$ より $0 < x < 6$

箱の容積を $y$cm^{3}とすると

$y = x(12-2x)^2$

$= 4x^3 - 48x^2 + 144x$

$y' = 12x^2 - 96x + 144$

$= 12(x^2 - 8x + 12)$

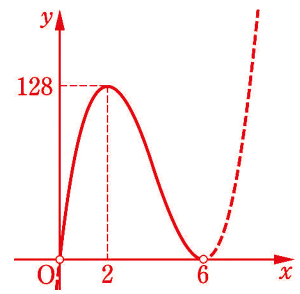
$= 12(x-2)(x-6)$

$y' = 0$ の解は　$x = 2,\ 6$

①の範囲で y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 128	↘	

よって，容積を最大にするには，$x = 2$ とすればよい。



問7 例題 4 のように，1 辺が 6cm の正方形の紙の 4 隅から1 辺が $x$cm の正方形を切り取り，高さ$x$cm の直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには，x の値をいくらにすればよいか求めなさい。

箱の底面の 1 辺は $(6-2x)$cm，高さは x cm である。
これらは正であるから

$0<x<3$ ……①

箱の容積を y cm^3 とすると

$y=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$

$y'=12x^2-48x+36$

$=12(x^2-4x+3)$

$=12(x-1)(x-3)$

$y'=0$ の解は　$x=1$，3

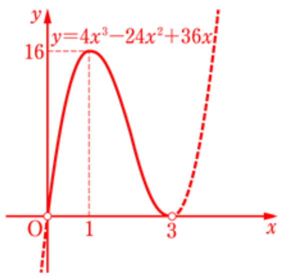
$x=1$ のとき

$y=4\times1^3-24\times1^2+36\times1=16$

①の範囲で y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	／	↗	極大 16	↘	／

よって，容積を最大にするには，$x=1$ とすればよい。



復 習 問 題

（教科書 p.145）

1 次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x) = x^2 - 8x + 1$

$f'(x) = 2x - 8 = 2(x-4)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = 4$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(4) = 4^2 - 8 \times 4 + 1 = -15$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-15	↗

よって，$x < 4$ で減少し，

$x > 4$ で増加する。

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = -2$，0

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 2 = 6$

$f(0) = 0^3 + 3 \times 0^2 + 2 = 2$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

よって，$x < -2$，$0 < x$ で増加し，

$-2 < x < 0$ で減少する。

2 次の関数の極値を求めなさい。

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x+3)(x-1)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = -3$，1

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3)$

$= 27$

$f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 = -5$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 27	↘	極小 −5	↗

よって，この関数は

$x = -3$ のとき極大になり，

極大値は 27

$x = 1$ のとき極小になり，

極小値は −5

(2) $f(x) = -x^3 + 12x + 16$

$f'(x) = -3x^2 + 12$

$= -3(x+2)(x-2)$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = -2,\ 2$

$f'(x) = 0$ のときの $f(x)$ の値は

$f(-2) = -(-2)^3 + 12 \times (-2) + 16$

$= 0$

$f(2) = -2^3 + 12 \times 2 + 16 = 32$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 32	↘

よって，この関数は

$x = 2$ のとき極大になり，

極大値は 32

$x = -2$ のとき極小になり，

極小値は 0

3 次の関数の極値を求め，グラフをかきなさい。

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$y' = 0$ の解は　$x = 0,\ 1$

$x = 0$ のとき

$y = 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 + 2 = 2$

$x = 1$ のとき

$y = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 2 = 1$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 1	↗

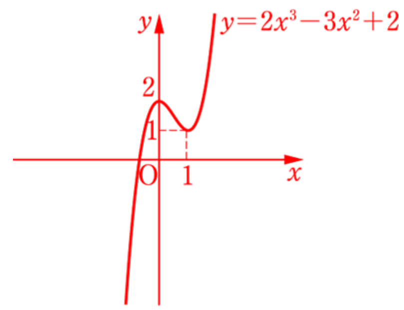
よって，この関数は

$x = 0$ のとき　極大値 2

$x = 1$ のとき　極小値 1

をとる。

したがって，グラフは次の図のようになる。



(2) $y=-x^3+6x^2-9x$

$y'=-3x^2+12x-9$

$=-3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ の解は　$x=1,\ 3$

$x=1$ のとき

$y=-1^3+6\times1^2-9\times1=-4$

$x=3$ のとき

$y=-3^3+6\times3^2-9\times3=0$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

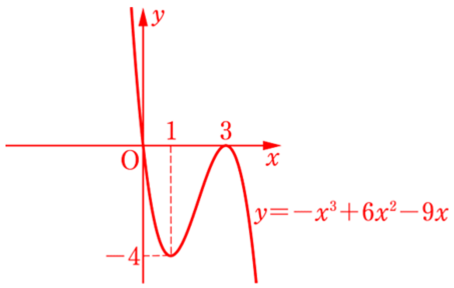
よって，この関数は

$x=3$ のとき　極大値 0

$x=1$ のとき　極小値 -4

をとる。また，$x=0$ のとき $y=0$ である。

したがって，グラフは次の図のようになる。



(3) $y=-2x^3+6x+1$

$y'=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$y'=0$ の解は　$x=-1,\ 1$

$x=-1$ のとき

$y=-2\times(-1)^3+6\times(-1)+1$

$=-3$

$x=1$ のとき

$y=-2\times1^3+6\times1+1=5$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘

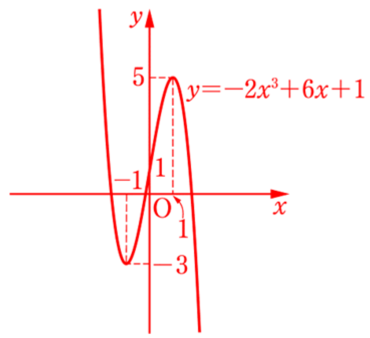
よって，この関数は

$x=1$ のとき　極大値 5

$x=-1$ のとき　極小値 -3

をとる。また，$x=0$ のとき$y=1$ である。

したがって，グラフは次の図のようになる。



4 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = x^3 - 3x - 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ の解は $\quad x = -1,\ 1$

$x = -2$ のとき

$y = (-2)^3 - 3 \times (-2) - 3 = -5$

$x = -1$ のとき

$y = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$

$x = 1$ のとき

$y = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$

$x = 3$ のとき

$y = 3^3 - 3 \times 3 - 3 = 15$

$-2 \leqq x \leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	極大 -1	↘	極小 -5	↗	15

よって，この関数の最大値と最小値は

$x = 3$ のとき　最大値 15

$x = -2,\ 1$ のとき　最小値 -5

(2) $y = -x^3 + 6x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

$y' = -3x^2 + 12x = -3x(x-4)$

$y' = 0$ の解は $\quad x = 0,\ 4$

$x = -1$ のとき

$y = -(-1)^3 + 6 \times (-1)^2 = 7$

$x = 0$ のとき

$y = -0^3 + 6 \times 0^2 = 0$

$x = 2$ のとき

$y = -2^3 + 6 \times 2^2 = 16$

$-1 \leqq x \leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

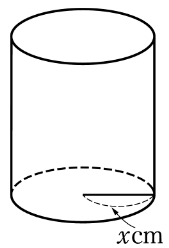
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	7	↘	極小 0	↗	16

よって，この関数の最大値と最小値は

$x = 2$ のとき　最大値 16

$x = 0$ のとき　最小値 0

5 底面の半径と高さの和が 12cm の円柱がある。この円柱について，次の問に答えなさい。



(1) 底面の半径を $x$cm とするとき，円柱の高さを x で表しなさい。

底面の半径 x cm と高さの和が 12 cmであるから，円柱の高さは

$(12 - x)$ cm

(2) 円柱の体積を $y\mathrm{cm}^3$ とするとき，y を x で表しなさい。

(円柱の体積) = (底面積) × (高さ)であるから

$y = \pi x^2(12 - x)$

すなわち

$y = -\pi x^3 + 12\pi x^2$

⑶　円柱の体積 y の最大値を求めなさい。

底面の半径と高さは正であるから

$0 < x < 12$　　……①

$y' = -3\pi x^2 + 24\pi x = -3\pi x(x-8)$

$y' = 0$ の解は　　$x = 0$，　8

$x = 8$ のとき

$y = -\pi \times 8^3 + 12\pi \times 8^2 = 256\pi$

①の範囲で y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	8	$\cdots$	12
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 256π	↘	

よって，円柱の体積 y が最大値をとるのは $x = 8$ のときで

$y = 256\pi\ (\mathrm{cm}^3)$