1 節 微分係数と導関数

1 平均変化率

（教科書 p.126）

関数を表す記号

$y=2x+1$，$y=x^2$ のように，y が x の関数であることを $y=f(x)$ のように表す。
関数 $y=f(x)$ において，$f(x)$ の式に $x=a$ を代入して得られる y の値を，
（① ）で表す。

例1 関数 $f(x)=x^2+2x$ において

$f(3)=$

$f(-1)=$

問1 関数 $f(x)=x^2-3x$ において，次の値を求めなさい。

(1) $f(1)$

(2) $f(2)$

(3) $f(-1)$

(4) $f(-2)$

ここに注意！

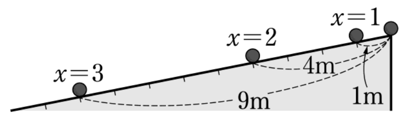
○ $f(-1)$
$=(-1)^2+2\times(-1)$

× $f(-1)$
$=-1^2+2\times-1$

負の数を代入するときは
（ ）をつける。

平均変化率

斜面を転がる球の速さは，時間とともに変化する。
ある斜面では，球が転がり始めてからの時間 x 秒と，転がった距離 ym の間に $y=x^2$ の関係が成り立っている。



この運動で，球が転がり始めて
1 秒後から 2 秒後までの平均の速さは

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3\ \text{(m/s)}$$

2 秒後から 3 秒後までの平均の速さは

$$\frac{3^2-2^2}{3-2}=5\ \text{(m/s)}$$

である。

◀平均の速さ $=\dfrac{距離}{時間}$

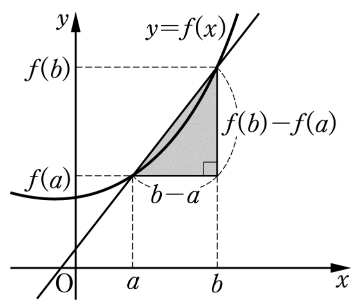
◀3 m/s は秒速 3 m を表している。

問2 126 ページの運動で，球が転がり始めて 2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

一般に，関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき
x の変化量は $b-a$
y の変化量は $f(b)-f(a)$
である。
このとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

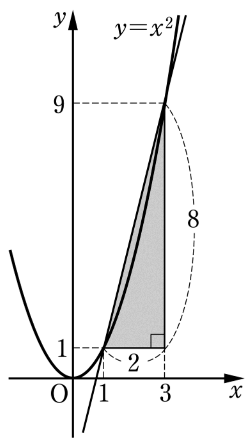
$$\frac{y\,の変化量}{x\,の変化量}=（②\qquad\qquad）$$

を，x の値が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の
（③ ）という。
この値は，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の（④ ）に等しい。



例2 関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から 3 まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=$$



問3 関数 $f(x)=2x^2$ において， x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1)　1 から 3 まで

(2)　3 から 4 まで

(3)　−2 から 6 まで

2 微分係数

（教科書 p.128）

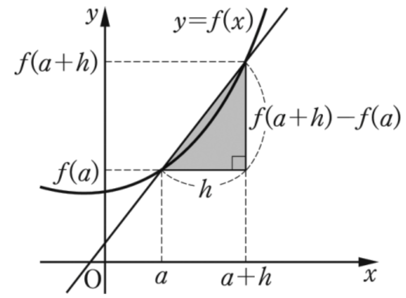
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するとき

　x の変化量は　$(a+h)-a=h$

　y の変化量は　$f(a+h)-f(a)$

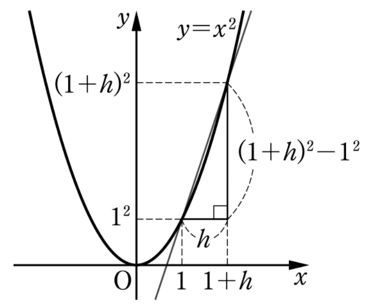
であるから，平均変化率は次のようになる。

（⑤　　　　　　　　）



例3 関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=$$



極限値

例 3 で，h の値を 0.1，0.01，0.001，… のように限りなく 0 に近づけるとき，$2+h$ の値は次のようになる。

$h=0.1$　　のとき　$2+h=2.1$

$h=0.01$　　のとき　$2+h=2.01$

$h=0.001$　のとき　$2+h=2.001$

⋮

このことから，h が限りなく 0 に近づくとき，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づくことがわかる。この値 2 を

h が限りなく 0 に近づくときの $2+h$ の（⑥　　　　　　　　）という。

このことを記号 lim を用いて次のように書く。

（⑦　　　　　　　　）

◀ $h=-0.1$ のとき
$2+h=1.9$
$h=-0.01$ のとき
$2+h=1.99$
⋮
h が負の値をとりながら限りなく 0 に近づくときも，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づく。

◀ 極限値 2 は，126 ページの斜面で，球が転がり始めて 1 秒後の瞬間の速さを表している。

◀ lim は極限を意味する limit の略であり，リミットと読む。

例4 (1) $\lim_{h \to 0}(5+h) =$

(2) $\lim_{h \to 0}(6+5h+h^2) =$

問4 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{h \to 0}(4+h)$

(2) $\lim_{h \to 0}(3+8h+h^2)$

微分係数

関数 $f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である。この式で，h を限りなく 0 に近づけたときの極限値

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における（⑧　　　　　　　　）といい，（⑨　　　　　　　）で表す。

微分係数
$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

例5 関数 $f(x)=x^2$ において，微分係数 $f'(2)$ を求めてみよう。

$f(2+h)-f(2) =$

よって，微分係数 $f'(2)$ は

$f'(2) =$

問5 関数 $f(x)=2x^2$ において，次の微分係数を求めなさい。

(1) $f'(2)$

(2) $f'(-3)$

3 導関数

（教科書 p.130）

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=h(2a+h)$$

◀ $(a+h)^2-a^2$
$=a^2+2ah+h^2-a^2$
$=2ah+h^2$
$=h(2a+h)$

であるから　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

この式を用いれば，いろいろな a の値について $f'(a)$ の値を求めることができる。

例6 関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ は，上の $f'(a)=2a$ の式に $a=3$ を代入すると

$f'(3)=$

$f(x)=x^2$ について，上の $f'(a)=2a$ の式を用いて a の値における微分係数を求めると，次の表のようになる。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$								

すなわち，a の値に対して $f'(a)$ の値が定まり，$f'(a)$ は a の関数になる。このとき，文字a を x でおきかえて得られる関数 $f'(x)=2x$ を，関数 $f(x)=x^2$ の（⑩　　　　　　）という。

一般に，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる。

導関数
$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑪　　　　　　）という。

例7 関数 $f(x)=x$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$=$

例8 関数 $f(x)=x^3$ を微分してみよう。

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3$

$=$

◀ $(x+h)^3-x^3$
$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$
$=3x^2h+3xh^2+h^3$
$=h(3x^2+3xh+h^2)$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

（⑫　　　　），（⑬　　　　　　）

などの記号も用いられる。

◀関数 $y=x^2$ の導関数は $y'=2x$，$(x^2)'=2x$ などと表す。

すでに学んだように，$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$ である。

一般に，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{x^n}$ の導関数
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$

同様にして，c を定数とするとき，関数 $f(x)=c$ の導関数は次のようになる。

関数 $\boldsymbol{f(x)=c}$ の導関数
$\boldsymbol{f'(x)=(c)'=0}$

導関数の計算

（教科書 p.132）

例9 関数 $f(x)=4x^2$ を微分してみよう。

$f(x+h)-f(x)=4(\qquad\qquad)^2-4\quad{}^2$

$=$

◀ $4(x+h)^2-4x^2$
$=4(x^2+2xh+h^2)-4x^2$
$=4x^2+8xh+4h^2-4x^2$
$=8xh+4h^2$
$=4h(2x+h)$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=$

例 10 関数 $f(x)=x^2+x$ を微分してみよう。

$f(x+h)-f(x)=\{(\qquad)^2+(\qquad)\}-(\qquad)$

$=$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=$

◀ $\{(x+h)^2+(x+h)\}$
$-(x^2+x)$
$=x^2+2xh+h^2+x+h$
$-x^2-x$
$=2xh+h^2+h$
$=h(2x+h+1)$

一般に，次のことが成り立つ。

導関数の公式
$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　(k は定数) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

例題 1 関数 $y=x^3-2x^2-3$ を微分しなさい。

解

ここに注意！
○ $(x^3-2x^2-3)'$
$=3x^2-4x$
× $(x^3-2x^2-3)'$
$=3x^2-4x-3$
$(3)'=0$ であることに注意する。

問6 次の関数を微分しなさい。

(1)　$y=3x+2$

(2)　$y=x^2-4x+3$

(3)　$y=2x^3-5x^2$

(4)　$y=-2x^3+3x^2-4x+3$

例題 2 関数 $y=(x-1)(2x+3)$ を微分しなさい。

解

◀まず，展開する。

問7 次の関数を微分しなさい。

(1)　$y = x(3x - 1)$

(2)　$y = (x + 1)(x - 2)$

(3)　$y = (2x + 1)^2$

(4)　$y = (x^2 + 1)(2x - 1)$

微分係数の計算

例 11 関数 $f(x) = x^2 + x - 2$ について，$x = -3$ における微分係数 $f'(-3)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると　$f'(x) =$

よって　$f'(-3) =$

◀**微分係数の求め方**
$f(x)$　(関数)
⬇微分する
$f'(x)$　(導関数)
⬇$x = a$ を代入
$f'(a)$　(微分係数)

問8 関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ について，$x = -2$, $x = 1$ における微分係数をそれぞれ求めなさい。

（教科書 p.134）

4 接線

微分係数と接線の傾き

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，関数 $f(x)$ の a から $a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は，直線 AB の傾きを表している。

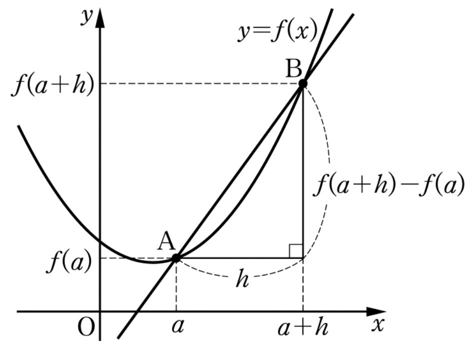
いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。

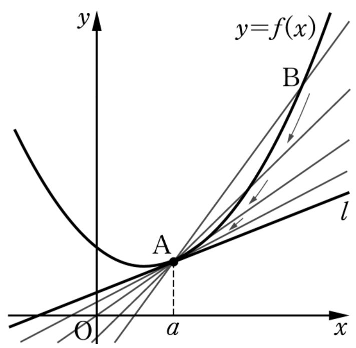
このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は，点 A を通り，傾きが $f'(a)$ の直線 l に限りなく近づく。

この直線 l を，点 A における曲線 $y=f(x)$ の（⑭　　　　　　）といい，点 A を（⑮　　　　　　）という。





微分係数と接線の傾き
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。

例 12 曲線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは

$f(x)=x^2$ とおくと　　$f'(x)=$

$f'(3)=$（　　　　）であるから，（　　　　）である。

問9 曲線 $y=2x^2$ 上の次の点における接線の傾きを求めなさい。

(1)　$(3,\ 18)$

(2)　$(-1,\ 2)$

（教科書 p.135）

接線の方程式

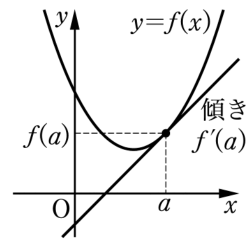
点 $(1,\ 2)$ を通り，傾きが 3 の直線の方程式は

$y-2=3(x-1)$

したがって　　$y=3x-1$

このことを用いると，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における接線の方程式は次のようになる。

◀点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は
$y-y_1=m(x-x_1)$



接線の方程式
$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

例題 3　曲線 $y=x^2+2$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

解

問 10 曲線 $y = -x^2 + 1$ 上の次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $(2,\ -3)$　　(2) $(-1,\ 0)$

(1)

(2)

問 11 曲線 $y = x^2 + 2x$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.136）

1 関数 $f(x)=4x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1) 1 から 3 まで

(2) -2 から $-2+h$ まで

2 次の関数を微分しなさい。

(1) $y=-2x+5$

(2) $y=-3x^2+2x-1$

(3) $y=2x^3-4x^2+1$

(4) $y=(x+3)(x-1)$

(5) $y=(2x-3)^2$

⑹　$y=(x+2)(x^2-3x+1)$

3 次の関数について，かっこの中に示された x の値における微分係数を求めなさい。

⑴　$f(x)=x^2+4x-1\ (x=-3)$

⑵　$f(x)=-x^3+2x^2+2\ (x=2)$

4 次の曲線について，与えられた曲線上の点における接線の方程式を求めなさい。

⑴　$y=3x^2\ (-1,\ 3)$

⑵　$y=2x^2-3x+2\ (2,\ 4)$

1 節 微分係数と導関数

1 平均変化率

（教科書 p.126）

関数を表す記号

$y=2x+1$, $y=x^2$ のように，y が x の関数であることを $y=f(x)$ のように表す。
関数 $y=f(x)$ において，$f(x)$ の式に $x=a$ を代入して得られる y の値を，
（① $f(a)$ ）で表す。

例1 関数 $f(x)=x^2+2x$ において

$f(3)=3^2+2\times3=15$

$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$

問1 関数 $f(x)=x^2-3x$ において，次の値を求めなさい。

(1) $f(1)$
$=1^2-3\times1$
$=-2$

(2) $f(2)$
$=2^2-3\times2$
$=-2$

(3) $f(-1)$
$=(-1)^2-3\times(-1)$
$=4$

(4) $f(-2)$
$=(-2)^2-3\times(-2)$
$=10$

ここに注意！

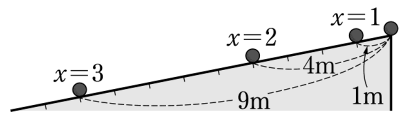
○ $f(-1)$
$=(-1)^2+2\times(-1)$

× $f(-1)$
$=-1^2+2\times-1$

負の数を代入するときは
（ ）をつける。

平均変化率

斜面を転がる球の速さは，時間とともに変化する。
ある斜面では，球が転がり始めてからの時間 x 秒と，転がった距離 ym の間に $y=x^2$ の関係が成り立っている。



この運動で，球が転がり始めて

1 秒後から 2 秒後までの平均の速さは

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3\ \text{(m/s)}$$

◀平均の速さ ＝ $\dfrac{距離}{時間}$

2 秒後から 3 秒後までの平均の速さは

$$\frac{3^2-2^2}{3-2}=5\ \text{(m/s)}$$

◀3 m/s は秒速 3 m を表している。

である。

問2 126 ページの運動で，球が転がり始めて 2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

$$\frac{4^2-2^2}{4-2}=6\ \text{(m/s)}$$

一般に，関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

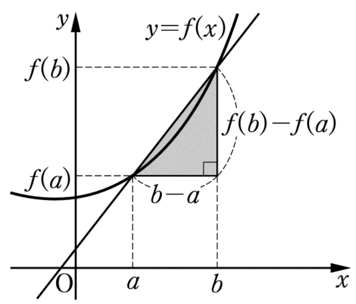
x の変化量は　$b-a$

y の変化量は　$f(b)-f(a)$

である。
このとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

$$\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}=\left(② \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

を，x の値が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の
（③ 平均変化率 ）という。
この値は，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の（④ 傾き ）に等しい。

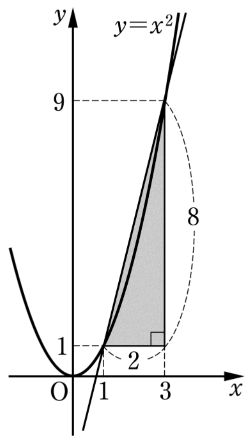


例2 関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から 3 まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{3-1}$$

$$=\frac{8}{2}$$

$$=4$$



問3 関数 $f(x)=2x^2$ において， x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1)　1 から 3 まで

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2\times3^2-2\times1^2}{3-1}$$

$$=\frac{16}{2}$$

$$=8$$

(2)　3 から 4 まで

$$\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{2\times4^2-2\times3^2}{4-3}$$

$$=14$$

(3)　−2 から 6 まで

$$\frac{f(6)-f(-2)}{6-(-2)}=\frac{2\times6^2-2\times(-2)^2}{6-(-2)}$$

$$=\frac{64}{8}$$

$$=8$$

2 微分係数

（教科書 p.128）

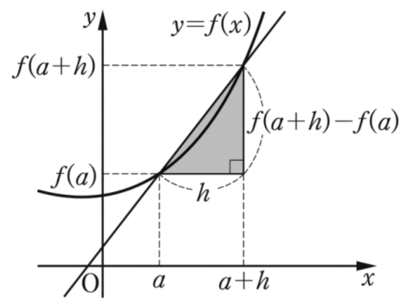
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するとき

　x の変化量は　　$(a+h)-a=h$

　y の変化量は　　$f(a+h)-f(a)$

であるから，平均変化率は次のようになる。

（⑤　$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$　）



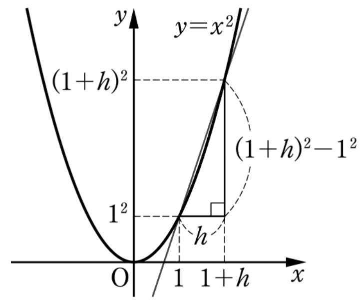
例3 関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$=\frac{h(2+h)}{h}$$

$$=2+h$$



極限値

例 3 で，h の値を 0.1，0.01，0.001，… のように限りなく 0 に近づけるとき，$2+h$ の値は次のようになる。

　$h=0.1$　　のとき　　$2+h=2.1$

　$h=0.01$　　のとき　　$2+h=2.01$

　$h=0.001$　のとき　　$2+h=2.001$

　　　　　　⋮

このことから，h が限りなく 0 に近づくとき，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づくことがわかる。この値 2 を

h が限りなく 0 に近づくときの $2+h$ の（⑥　極限値　）という。

このことを記号 lim を用いて次のように書く。

（⑦　$\displaystyle\lim_{h\to0}(2+h)=2$　）

◀ $h=-0.1$ のとき
$2+h=1.9$
$h=-0.01$ のとき
$2+h=1.99$
⋮
h が負の値をとりながら限りなく 0 に近づくときも，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づく。

◀極限値 2 は，126 ページの斜面で，球が転がり始めて 1 秒後の瞬間の速さを表している。

◀lim は極限を意味する limit の略であり，リミットと読む。

例4 (1) $\lim_{h\to 0}(5+h)=5$

(2) $\lim_{h\to 0}(6+5h+h^2)=6$

問4 次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{h\to 0}(4+h)$

$=4$

(2) $\lim_{h\to 0}(3+8h+h^2)$

$=3$

微分係数

関数 $f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である。この式で，h を限りなく 0 に近づけたときの極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における（⑧　微分係数　）といい，（⑨　$f'(a)$　）で表す。

微分係数
$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

例5 関数 $f(x)=x^2$ において，微分係数 $f'(2)$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= (2+h)^2-2^2 \\ &= 4+4h+h^2-4 \\ &= 4h+h^2=h(4+h) \end{aligned}$$

よって，微分係数 $f'(2)$ は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4 \end{aligned}$$

問5 関数 $f(x)=2x^2$ において，次の微分係数を求めなさい。

(1) $f'(2)$

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= 2(2+h)^2-2\times 2^2 \\ &= 2(4+4h+h^2)-8 \\ &= 8h+2h^2 \\ &= 2h(4+h) \end{aligned}$$

よって，微分係数 $f'(2)$ は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}2(4+h) \\ &= 8 \end{aligned}$$

(2) $f'(-3)$

$$\begin{aligned} f(-3+h)-f(-3) &= 2(-3+h)^2-2\times(-3)^2 \\ &= 2(9-6h+h^2)-18 \\ &= -12h+2h^2 \\ &= -2h(6-h) \end{aligned}$$

よって，微分係数 $f'(-3)$ は

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2h(6-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\{-2(6-h)\} \\ &= -12 \end{aligned}$$

3 導関数

（教科書 p.130）

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=h(2a+h)$$

であるから $f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h(2a+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(2a+h)=2a$$

◀ $(a+h)^2-a^2$
$=a^2+2ah+h^2-a^2$
$=2ah+h^2$
$=h(2a+h)$

この式を用いれば，いろいろな a の値について $f'(a)$ の値を求めることができる。

例6 関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ は，上の $f'(a)=2a$ の式に $a=3$ を代入すると

$f'(3)=2\times3=6$

$f(x)=x^2$ について，上の $f'(a)=2a$ の式を用いて a の値における微分係数を求めると，次の表のようになる。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

すなわち，a の値に対して $f'(a)$ の値が定まり，$f'(a)$ は a の関数になる。このとき，文字 a を x でおきかえて得られる関数 $f'(x)=2x$ を，関数 $f(x)=x^2$ の（⑩ 導関数 ）という。

一般に，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる。

導関数

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑪ 微分する ）という。

例7 関数 $f(x)=x$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}1=1$$

例8 関数 $f(x)=x^3$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3$$

$$=h(3x^2+3xh+h^2)$$

◀ $(x+h)^3-x^3$
$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$
$=3x^2h+3xh^2+h^3$
$=h(3x^2+3xh+h^2)$

よって $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

（⑫ y' ），（⑬ $\{f(x)\}'$ ）

などの記号も用いられる。

◀関数 $y=x^2$ の導関数は $y'=2x$，$(x^2)'=2x$ などと表す。

すでに学んだように，$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$ である。

一般に，次の公式が成り立つ。

x^n の導関数

$n=1, 2, 3, \cdots$ のとき　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$

同様にして，c を定数とするとき，関数 $f(x)=c$ の導関数は次のようになる。

関数 $f(x)=c$ の導関数

$\boldsymbol{f'(x)=(c)'=0}$

導関数の計算

（教科書 p.132）

例9 関数 $f(x)=4x^2$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=4(\ x+h\ )^2-4x^2$$

$$=4h(2x+h)$$

◀ $4(x+h)^2-4x^2$
$=4(x^2+2xh+h^2)-4x^2$
$=4x^2+8xh+4h^2-4x^2$
$=8xh+4h^2$
$=4h(2x+h)$

よって $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{4h(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}4(2x+h)$$

$$=4\times2x=8x$$

例 10 関数 $f(x) = x^2 + x$ を微分してみよう。

$$f(x+h) - f(x) = \{(\ x+h\ )^2 + (\ x+h\ )\} - (\ x^2+x\ )$$
$$= h(2x+h+1)$$

◀ $\{(x+h)^2+(x+h)\} - (x^2+x)$
$= x^2+2xh+h^2+x+h-x^2-x$
$= 2xh+h^2+h$
$= h(2x+h+1)$

よって $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h+1)$$
$$= 2x+1$$

一般に，次のことが成り立つ。

導関数の公式
$\{kf(x)\}' = kf'(x)$　　（k は定数） $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$ $\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)$

例題 1 関数 $y = x^3 - 2x^2 - 3$ を微分しなさい。

解 $y' = (x^3 - 2x^2 - 3)'$
$= (x^3)' - (2x^2)' - (3)'$
$= (x^3)' - 2(x^2)' - (3)'$
$= 3x^2 - 2\times 2x - 0$
$= 3x^2 - 4x$

ここに注意！
○ $(x^3-2x^2-3)' = 3x^2-4x$
× $(x^3-2x^2-3)' = 3x^2-4x-3$
$(3)'=0$ であることに注意する。

問6 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = 3x+2$
$y' = (3x+2)'$
$= (3x)' + (2)'$
$= 3(x)' + (2)'$
$= 3\times 1 + 0$
$= 3$

(2) $y = x^2 - 4x + 3$
$y' = (x^2 - 4x + 3)'$
$= (x^2)' - (4x)' + (3)'$
$= (x^2)' - 4(x)' + (3)'$
$= 2x - 4\times 1 + 0$
$= 2x - 4$

(3) $y = 2x^3 - 5x^2$
$y' = (2x^3 - 5x^2)'$
$= (2x^3)' - (5x^2)'$
$= 2(x^3)' - 5(x^2)'$
$= 2\times 3x^2 - 5\times 2x$
$= 6x^2 - 10x$

(4) $y = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$
$y' = (-2x^3 + 3x^2 - 4x + 3)'$
$= (-2x^3)' + (3x^2)' - (4x)' + (3)'$
$= -2(x^3)' + 3(x^2)' - 4(x)' + (3)'$
$= -2\times 3x^2 + 3\times 2x - 4\times 1 + 0$
$= -6x^2 + 6x - 4$

例題 2 関数 $y = (x-1)(2x+3)$ を微分しなさい。

解 $y = (x-1)(2x+3) = 2x^2 + x - 3$

◀まず，展開する。

であるから
$y' = (2x^2 + x - 3)'$
$= (2x^2)' + (x)' - (3)'$
$= 2(x^2)' + (x)' - (3)'$
$= 2\times 2x + 1 - 0 = 4x + 1$

問7 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = x(3x-1)$

$y = x(3x-1) = 3x^2 - x$

であるから

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - x)' \\ &= (3x^2)' - (x)' \\ &= 3(x^2)' - (x)' \\ &= 3 \times 2x - 1 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

(2) $y = (x+1)(x-2)$

$y = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

であるから

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - x - 2)' \\ &= (x^2)' - (x)' - (2) \\ &= 2x - 1 - 0 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

(3) $y = (2x+1)^2$

$y = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

であるから

$$\begin{aligned} y' &= (4x^2 + 4x + 1)' \\ &= (4x^2)' + (4x)' + (1)' \\ &= 4(x^2)' + 4(x)' + (1)' \\ &= 4 \times 2x + 4 \times 1 + 0 \\ &= 8x + 4 \end{aligned}$$

(4) $y = (x^2+1)(2x-1)$

$$\begin{aligned} y &= (x^2+1)(2x-1) \\ &= 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3 - x^2 + 2x - 1)' \\ &= (2x^3)' - (x^2)' + (2x)' - (1)' \\ &= 2(x^3)' - (x^2)' + 2(x)' - (1)' \\ &= 2 \times 3x^2 - 2x + 2 \times 1 - 0 \\ &= 6x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

微分係数の計算

例 11 関数 $f(x) = x^2 + x - 2$ について，$x = -3$ における微分係数 $f'(-3)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 2x + 1$

よって　$f'(-3) = 2 \times (-3) + 1 = -5$

◀**微分係数の求め方**

$f(x)$ （関数）

⬇微分する

$f'(x)$ （導関数）

⬇$x = a$ を代入

$f'(a)$ （微分係数）

問8 関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ について，$x = -2$, $x = 1$ における微分係数をそれぞれ求めなさい。

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 2x + 3)' \\ &= (3x^2)' - (2x)' + (3)' \\ &= 3(x^2)' - 2(x)' + (3)' \\ &= 3 \times 2x - 2 \times 1 + 0 \\ &= 6x - 2 \end{aligned}$$

よって

$f'(-2) = 6 \times (-2) - 2 = -14$

$f'(1) = 6 \times 1 - 2 = 4$

（教科書 p.134）

4 接線

微分係数と接線の傾き

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，関数 $f(x)$ の a から $a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は，直線 AB の傾きを表している。

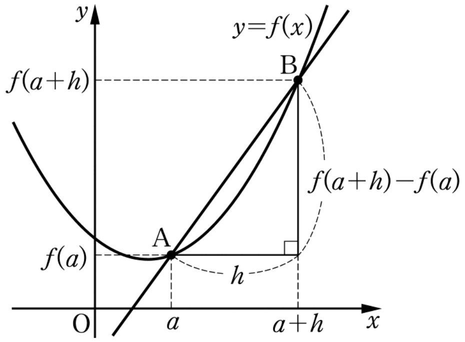
いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。

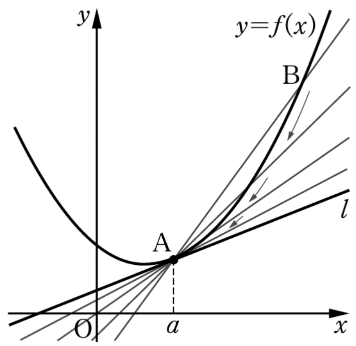
このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は，点 A を通り，傾きが $f'(a)$ の直線 l に限りなく近づく。

この直線 l を，点 A における曲線 $y=f(x)$ の（⑭　接線　）といい，点 A を（⑮　接点　）という。





微分係数と接線の傾き
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。

例 12 曲線 $y=x^2$ 上の点 (3，9) における接線の傾きは

$f(x)=x^2$ とおくと　　$f'(x)=2x$

$f'(3)=$（　6　）であるから，（　6　）である。

問9 曲線 $y=2x^2$ 上の次の点における接線の傾きを求めなさい。

(1)　(3，18)

(2)　(−1，2)

$f(x)=2x^2$ とおくと　　$f'(x)=4x$

(1)　$f'(3)=4\times3=12$ であるから，接線の傾きは 12

(2)　$f'(-1)=4\times(-1)=-4$ であるから，接線の傾きは −4

（教科書 p.135）

接線の方程式

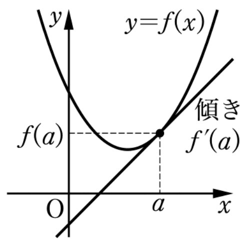
点 (1，2) を通り，傾きが 3 の直線の方程式は

$y-2=3(x-1)$

したがって　$y=3x-1$

このことを用いると，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は次のようになる。

◀点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は $y-y_1=m(x-x_1)$



接線の方程式
$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

例題 3 曲線 $y=x^2+2$ 上の点 (1，3) における接線の方程式を求めなさい。

解 $f(x)=x^2+2$ とおくと，$f'(x)=2x$ であるから，

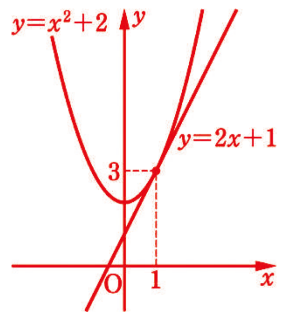
点 (1，3) における接線の傾きは

$f'(1)=2\times1=2$

よって，接線の方程式は　$y-3=2(x-1)$

すなわち

$y=2x+1$



問 10 曲線 $y=-x^2+1$ 上の次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $(2,\ -3)$　　(2) $(-1,\ 0)$

$f(x)=-x^2+1$ とおくと　$f'(x)=-2x$

(1) 点 $(2,\ -3)$ における接線の傾きは

$f'(2)=-2\times 2=-4$

よって，接線の方程式は

$y-(-3)=-4(x-2)$

すなわち

$y=-4x+5$

(2) 点 $(-1,\ 0)$ における接線の傾きは

$f'(-1)=-2\times(-1)=2$

よって，接線の方程式は

$y-0=2\{x-(-1)\}$

すなわち

$y=2x+2$

問 11 曲線 $y=x^2+2x$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

$f(x)=x^2+2x$ とおくと，$f'(x)=2x+2$ であるから，点 $(1,\ 3)$ における接線の傾きは

$f'(1)=2\times 1+2=4$

よって，接線の方程式は　$y-3=4(x-1)$

すなわち

$\boldsymbol{y=4x-1}$

復 習 問 題

（教科書 p.136）

1 関数 $f(x)=4x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1) 1 から 3 まで

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{4\times3^2-4\times1^2}{3-1}$$
$$=\frac{32}{2}$$
$$=16$$

(2) -2 から $-2+h$ まで

$$f(-2+h)-f(-2)=4(-2+h)^2-4\times(-2)^2$$
$$=4(4-4h+h^2)-16$$
$$=-16h+4h^2$$
$$=4h(-4+h)$$

であるから

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{4h(-4+h)}{h}$$
$$=4(-4+h)$$
$$=-16+4h$$

2 次の関数を微分しなさい。

(1) $y=-2x+5$

$$y'=(-2x+5)'$$
$$=(-2x)'+(5)'$$
$$=-2(x)'+(5)'$$
$$=-2\times1+0$$
$$=-2$$

(2) $y=-3x^2+2x-1$

$$y'=(-3x^2+2x-1)'$$
$$=(-3x^2)'+(2x)'-(1)'$$
$$=-3(x^2)'+2(x)'-(1)'$$
$$=-3\times2x+2\times1-0$$
$$=-6x+2$$

(3) $y=2x^3-4x^2+1$

$$y'=(2x^3-4x^2+1)'$$
$$=(2x^3)'-(4x^2)'+(1)'$$
$$=2(x^3)'-4(x^2)'+(1)'$$
$$=2\times3x^2-4\times2x+0$$
$$=6x^2-8x$$

(4) $y=(x+3)(x-1)$

$$y=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

であるから

$$y'=(x^2+2x-3)'$$
$$=(x^2)'+(2x)'-(3)'$$
$$=(x^2)'+2(x)'-(3)'$$
$$=2x+2\times1-0$$
$$=2x+2$$

(5) $y=(2x-3)^2$

$$y=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$$

であるから

$$y'=(4x^2-12x+9)'$$
$$=(4x^2)'-(12x)'+(9)'$$
$$=4(x^2)'-12(x)'+(9)'$$
$$=4\times2x-12\times1+0$$
$$=8x-12$$

⑹ $y=(x+2)(x^2-3x+1)$

$y=(x+2)(x^2-3x+1)$

$\quad=x^3-x^2-5x+2$

であるから

$y'=(x^3-x^2-5x+2)'$

$\quad=(x^3)'-(x^2)'-(5x)'+(2)'$

$\quad=(x^3)'-(x^2)'-5(x)'+(2)'$

$\quad=3x^2-2x-5\times1+0$

$\quad=3x^2-2x-5$

3 次の関数について，かっこの中に示された x の値における微分係数を求めなさい。

⑴ $f(x)=x^2+4x-1 \ (x=-3)$

$f(x)$ を微分すると

$f'(x)=(x^2+4x-1)'$

$\quad=(x^2)'+(4x)'-(1)'$

$\quad=(x^2)'+4(x)'-(1)'$

$\quad=2x+4\times1-0$

$\quad=2x+4$

よって

$f'(-3)=2\times(-3)+4=-2$

⑵ $f(x)=-x^3+2x^2+2 \ (x=2)$

$f(x)$ を微分すると

$f'(x)=(-x^3+2x^2+2)'$

$\quad=(-x^3)'+(2x^2)'+(2)'$

$\quad=-(x^3)'+2(x^2)'+(2)'$

$\quad=-3x^2+2\times2x+0$

$\quad=-3x^2+4x$

よって

$f'(2)=-3\times2^2+4\times2=-4$

4 次の曲線について，与えられた曲線上の点における接線の方程式を求めなさい。

⑴ $y=3x^2 \ (-1, 3)$

$f(x)=3x^2$ とおくと，$f'(x)=6x$ であるから，点 $(-1, 3)$ における接線の傾きは

$f'(-1)=6\times(-1)=-6$

よって，接線の方程式は

$y-3=-6\{x-(-1)\}$

すなわち

$y=-6x-3$

⑵ $y=2x^2-3x+2 \ (2, 4)$

$f(x)=2x^2-3x+2$とおくと，$f'(x)=4x-3$ であるから，点 $(2, 4)$ における接線の傾きは

$f'(2)=4\times2-3=5$

よって，接線の方程式は

$y-4=5(x-2)$

すなわち

$y=5x-6$