2 節 対数関数

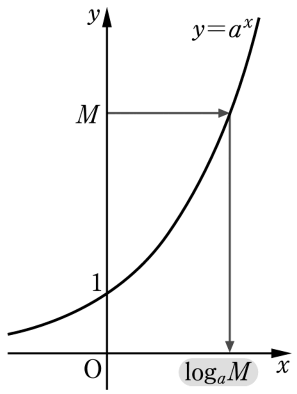
1 対数

（教科書 p.112）

一般に，a を 1 以外の正の数とするとき，
指数関数 $y = a^x$ のグラフからわかるように，
与えられた正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる p の値がただ 1 つ定まる。
この p を（① 　　　　　）で表し，
a を（② 　　　　　）とする M の
（③ 　　　　　）という。
また，M を $\log_a M$ の（④ 　　　　　）という。



指数と対数
a を 1 以外の正の数，M を正の数とするとき $\boldsymbol{a^p = M \iff \log_a M = p}$

例1 (1)　$2^3 = 8$ であるから　　$\log_2 8 =$

(2)　$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ であるから　　$\log_2 \frac{1}{8} =$

問1 次の等式を $\log_a M = p$ の形に表しなさい。

(1)　$10^2 = 100$

(2)　$3^4 = 81$

(3)　$5^{-2} = \frac{1}{25}$

◀ log は logarithm の略であり，ログと読む。

◀ $2^x = 3 \iff x = \log_2 3$

＋解説
■● ＝ ▲
⇕
log■▲ ＝ ●

◀ $\log_a M$ は，a を何乗したら M になるかという値を表している。

問2 次の等式を $a^p = M$ の形に表しなさい。

(1)　$\log_2 16 = 4$

(2)　$\log_3 \frac{1}{9} = -2$

例2 (1)　$\log_3 M = 2 \Leftrightarrow 3^{(\quad\quad)} = M$
であるから，$\log_3 M = 2$ を満たす M の値は
$M = 3^{(\quad\quad)} =$

(2)　$\log_a 27 = 3 \Leftrightarrow a^{(\quad\quad)} = 27$
であるから，$\log_a 27 = 3$ を満たす a の値は
$a =$

問3 次の等式を満たす M，a の値を求めなさい。

(1)　$\log_2 M = 4$

(2)　$\log_5 M = 3$

(3)　$\log_a 81 = 2$

(4) $\log_a 64 = 3$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

例題 1 $\log_4 8$ の値を求めなさい。

解

問4 次の値を求めなさい。

(1) $\log_5 25$

(2) $\log_9 3$

(3) $\log_2 \sqrt{2}$

◀(3) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

(4) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

2 対数の性質

（教科書 p.114）

$a^0 = 1$，$a^1 = a$ より

（⑤　　　　　　　　），（⑥　　　　　　　　）

が成り立つことがわかる。

対数には，このほかにどのような性質があるか調べてみよう。

たとえば

$\log_2(4 \times 8) = \log_2 32 = 5$

$\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

であるから

$\log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8$

が成り立つ。また

$\log_2 4^3 = \log_2 64 = 6$

$3\log_2 4 = 3 \times 2 = 6$

であるから

$\log_2 4^3 = 3\log_2 4$

が成り立つ。

◀ $2^5 = 32 \iff \log_2 32 = 5$

$2^2 = 4 \iff \log_2 4 = 2$

$2^3 = 8 \iff \log_2 8 = 3$

◀ $2^6 = 64 \iff \log_2 64 = 6$

問5 上にならって，$\log_2 \frac{32}{8} = \log_2 32 - \log_2 8$ が成り立つことを確かめなさい。

一般に，正の数 M，N と実数 k に対して，次の公式が成り立つ。

対数の性質
a を 1 以外の正の数とするとき ［1］　$\boldsymbol{\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N}$ ［2］　$\boldsymbol{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$ ［3］　$\boldsymbol{\log_a M^k = k\log_a M}$

（教科書 p.115）

例3

(1)　$\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5(\qquad \times \qquad)$

◀ $\log_a M + \log_a N = \log_a(M \times N)$

(2)　$\log_5 14 - \log_5 2 = \log_5 \frac{(\qquad)}{(\qquad)}$

$=$

◀ $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

(3)　$\log_3 16 = \log_3 2^{(\qquad)}$

$=$

◀ $\log_a M^k = k\log_a M$

(4)　$\log_3 27 = \log_3 3^{(\qquad)}$

$= (\qquad)\log_3 3$

$= 3 \times (\qquad) =$

◀ $\log_a a = 1$

問6 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れなさい。

(1)　$\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 \boxed{}$

(2)　$\log_7 2 + \log_7 5 = \log_7 \boxed{}$

(3)　$\log_{10} 18 - \log_{10} 3 = \log_{10} \boxed{}$

(4)　$\log_2 9 - \log_2 3 = \log_2 \boxed{}$

⑸　$\log_4 9 = \boxed{}\log_4 3$

⑹　$\log_6 36 = \boxed{}$

例題 2 次の計算をしなさい。

(1)　$\log_6 3 + \log_6 12$　　⑵　$\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$

解

問7 次の計算をしなさい。

(1)　$\log_4 2 + \log_4 32$

⑵　$\log_6 \frac{9}{2} + \log_6 8$

⑶　$\log_3 54 - \log_3 2$

(4) $\log_5 \sqrt{30} - \log_5 \sqrt{6}$

3 対数関数とそのグラフ

（教科書 p.116）

x を正の数，a を 1 以外の正の数とするとき

$\boldsymbol{y} =$（⑦　　　　　　）

で表される関数を，a を（⑧　　　　　）とする

x の（⑨　　　　　　　）という。

＋解説

$y = \log_a x$

↑

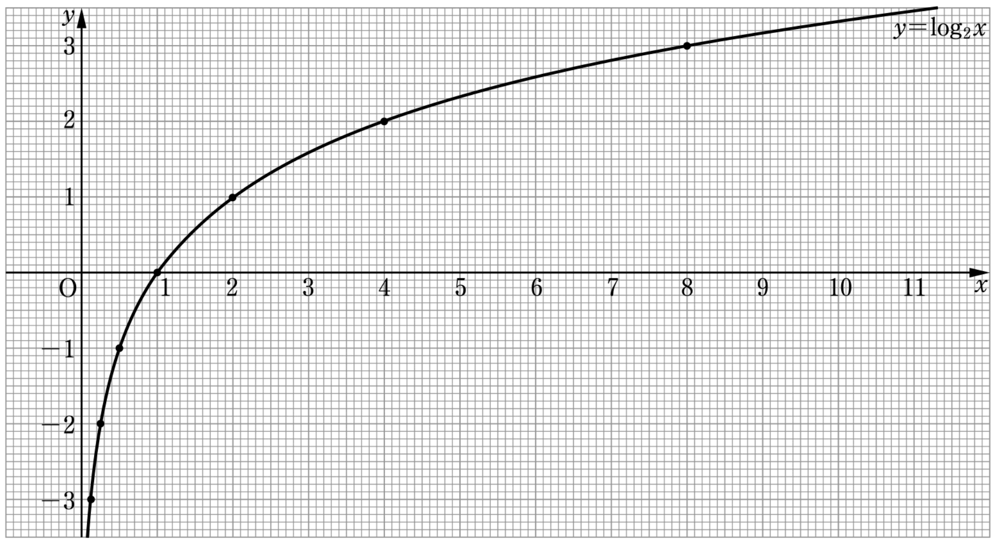
底

対数関数のグラフとその性質

例4 対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフをかくために，$x > 0$ の範囲での x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y = \log_2 x$	…								…

$y = \log_2 x$ のグラフをかくと，下の図のような曲線になる。



問8 右の表を完成し，対数関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	…								…

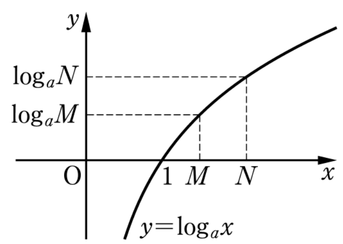
一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，次の性質をもっている。

対数関数 $\boldsymbol{y = \log_a x}$ のグラフ
［1］　2 点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。 ［2］　$x > 0$ の範囲にある。 ［3］　y 軸がグラフの漸近線となる。 ［4］　$a > 1$ のとき，　x の値が増加すると y の値も増加する。 　　　$0 < a < 1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフから，次のことがわかる。

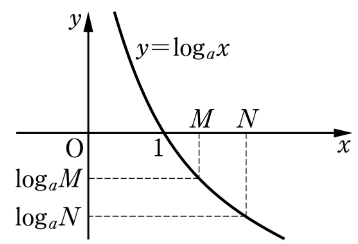
（1）　$\boldsymbol{a > 1}$ のとき

$\boldsymbol{0 < M < N \Leftrightarrow \log_a M \quad \log_a N}$



（2）　$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき

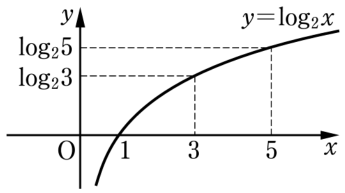
$\boldsymbol{0 < M < N \Leftrightarrow \log_a M \quad \log_a N}$



例5 (1) $\log_2 3$，$\log_2 5$ の大小を調べてみよう。

真数の大小を比べると　(　　　　)＜(　　　　)

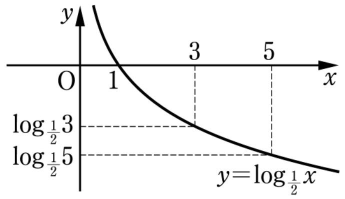
底 2 は 1 より (　　　　　) から



(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$，$\log_{\frac{1}{2}} 5$ の大小を調べてみよう。

真数の大小を比べると　(　　　　)＜(　　　　)

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より (　　　　　) から



問9 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $\log_2 2$，$\log_2 7$，$\log_2 4$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 1$，$\log_{\frac{1}{3}} 5$，$\log_{\frac{1}{3}} 2$

◀底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいことに注意する。

4 常用対数

(教科書 p.118)

10 を底とする対数 $\log_{10} M$ を (⑩　　　　　　) という。

190，191 ページには，1.00 から 9.99 までの数 M の小数第 4 位までの常用対数 $\log_{10} M$ の表がある。

常用対数表

数	0	1	2	3	4
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584

たとえば，$\log_{10} 1.13$ の値は，常用対数表を用いて調べると

$\log_{10} 1.13 =$ (⑪　　　　　)

であることがわかる。

問 10 次の値を常用対数表を用いて求めなさい。

(1) $\log_{10} 3.00$

(2) $\log_{10} 6.31$

(3) $\log_{10} 7.08$

例6

(1) $\log_{10} 122 = \log_{10}\left(\qquad \times 10^{(\quad)}\right)$

$= \log_{10} \qquad + \log_{10}$

$=$

◀$\log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10$
$= 2$

(2) $\log_{10} 0.143 = \log_{10}\left(\qquad \times 10^{(\quad)}\right)$

$= \log_{10} \qquad + \log_{10}$

$=$

◀$\log_{10} 10^{-1} = -\log_{10} 10$
$= -1$

問 11 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めなさい。

(1) $\log_{10} 429$　　　　(2) $\log_{10} 0.0563$

◀(1) $429 = 4.29 \times 10^2$
(2) 0.0563
$= 5.63 \times 10^{-2}$

（教科書 p.119）

整数の桁数

一般に，n 桁の正の整数 M は　$10^{n-1} \leqq M < 10^n$ を満たす。

このことを利用して，累乗を用いて表された正の整数の桁数を調べてみよう。

例題 3 2^{30} の桁数を求めなさい。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解

$10^1 = 10$ …… 2 桁
$10^2 = 100$ …… 3 桁
$10^3 = 1000$ …… 4 桁
⋮
10^n …… $(n+1)$ 桁

問 12 次の数の桁数を求めなさい。

ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　2^{20}

(2)　3^{10}

チャレンジ 底の変換公式

（教科書 p.120）

一般に，a，c を 1 以外の正の数，b を正の数とするとき

$$\log_a b = \frac{\log_c（⑫\qquad）}{\log_c（⑬\qquad）}$$

が成り立つ。これを（⑭　　　　　　）という。

＋解説

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例1 (1)　$\log_8 4 = \dfrac{\log_2}{\log_2}$

(2)　$\log_2 3 \times \log_3 2 = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2}{\log_2}$

問1 次の値を求めなさい。

(1)　$\log_8 16$

(2)　$\log_9 3$

⑶ $\log_2 3 \times \log_3 8$

復 習 問 題

（教科書 p.121）

1 次の等式を $\log_a M = p$ の形に表しなさい。

(1) $10^3 = 1000$

(2) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

(3) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

2 次の等式を満たす M の値を求めなさい。

(1) $\log_3 M = 4$

(2) $\log_4 M = 0$

(3) $\log_2 M = -3$

3 次の等式を満たす a の値を求めなさい。

(1) $\log_a 9 = 2$

(2) $\log_a 32 = 5$

(3) $\log_a \frac{1}{81} = 4$

4 次の値を求めなさい。

(1) $\log_4 64$

(2) $\log_{25} 5$

⑶ $\log_{27} 3$

⑷ $\log_4 \sqrt{2}$

5 次の計算をしなさい。

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20$

⑵ $\log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$

⑶ $\log_3 108 - \log_3 4$

⑷ $\log_6 \sqrt{30} - \log_6 \sqrt{5}$

6 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $\log_3 2$，$\log_3 5$，$\log_3 4$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}} 6$，$\log_{\frac{1}{2}} 7$，$\log_{\frac{1}{2}} 5$

7　$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めなさい。

(1)　$\log_{10} 9$

(2)　$\log_{10} 0.3$

8　3^{20} の桁数を求めなさい。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 節 対数関数

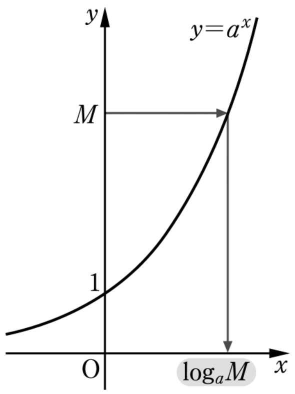
1 対数

（教科書 p.112）

一般に，a を 1 以外の正の数とするとき，
指数関数 $y = a^x$ のグラフからわかるように，
与えられた正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる p の値がただ 1 つ定まる。
この p を（① $\log_a M$ ）で表し，
a を（② 底 ）とする M の
（③ 対数 ）という。
また，M を $\log_a M$ の（④ 真数 ）という。



◀log は logarithm の略であり，ログと読む。

◀$2^x = 3 \iff x = \log_2 3$

＋解説
■$^●$ ＝ ▲
⇕
$\log_■$ ▲ ＝ ●

◀$\log_a M$ は，a を何乗したら M になるかという値を表している。

指数と対数
a を 1 以外の正の数，M を正の数とするとき $\boldsymbol{a^p = M \iff \log_a M = p}$

例1 (1) $2^3 = 8$ であるから　$\log_2 8 = 3$

(2) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ であるから　$\log_2 \frac{1}{8} = -3$

問1 次の等式を $\log_a M = p$ の形に表しなさい。

(1) $10^2 = 100$

$\log_{10} 100 = 2$

(2) $3^4 = 81$

$\log_3 81 = 4$

(3) $5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

問2 次の等式を $a^p = M$ の形に表しなさい。

(1) $\log_2 16 = 4$

$2^4 = 16$

(2) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

$3^{-2} = \frac{1}{9}$

例2 (1) $\log_3 M = 2 \Leftrightarrow 3^{(\ 2\ )} = M$
であるから，$\log_3 M = 2$ を満たす M の値は
$M = 3^{(\ 2\ )} = 9$

(2) $\log_a 27 = 3 \Leftrightarrow a^{(\ 3\ )} = 27$
であるから，$\log_a 27 = 3$ を満たす a の値は
$a = 3$

問3 次の等式を満たす M，a の値を求めなさい。

(1) $\log_2 M = 4$

$\log_2 M = 4 \Leftrightarrow 2^4 = M$
であるから，$\log_2 M = 4$ を満たす M の値は
$M = 2^4 = 16$

(2) $\log_5 M = 3$

$\log_5 M = 3 \Leftrightarrow 5^3 = M$
であるから，$\log_5 M = 3$を満たす M の値は
$M = 5^3 = 125$

(3) $\log_a 81 = 2$

$\log_a 81 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 81$
であるから，$\log_a 81 = 2$を満たす a の値は
$a = 9$

（4） $\log_a 64 = 3$

$\log_a 64 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 64$

であるから，$\log_a 64 = 3$ を満たす a の値は

$a = 4$

例題 1 $\log_4 8$ の値を求めなさい。

解 $\log_4 8 = x$ とおくと　$4^x = 8$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$，$8 = 2^3$より　$2^{2x} = 2^3$

よって　$2x = 3$

したがって　$x = \frac{3}{2}$

すなわち　$\log_4 8 = \frac{3}{2}$

問4 次の値を求めなさい。

（1） $\log_5 25$

$\log_5 25 = x$ とおくと　$5^x = 25$

$25 = 5^2$より　$5^x = 5^2$

よって　$x = 2$

すなわち　$\log_5 25 = 2$

（2） $\log_9 3$

$\log_9 3 = x$ とおくと　$9^x = 3$

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ より　$3^{2x} = 3^1$

よって　$2x = 1$

したがって　$x = \frac{1}{2}$

すなわち　$\log_9 3 = \frac{1}{2}$

（3） $\log_2 \sqrt{2}$

$\log_2 \sqrt{2} = x$ とおくと　$2^x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ より　$2^x = 2^{\frac{1}{2}}$

よって　$x = \frac{1}{2}$

すなわち　$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

◀(3)　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

(4)　$\frac{1}{2} = 2^{-1}$

（4） $\log_{\frac{1}{2}} 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$ とおくと　$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$，$8 = 2^3$より

$2^{-x} = 2^3$

よって　$-x = 3$

したがって　$x = -3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

2 対数の性質

（教科書 p.114）

$a^0=1$, $a^1=a$ より

（⑤ $\log_a 1=0$ ），（⑥ $\log_a a=1$ ）

が成り立つことがわかる。

対数には，このほかにどのような性質があるか調べてみよう。

たとえば

$\log_2(4\times 8)=\log_2 32=5$

$\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$

であるから

$\log_2(4\times 8)=\log_2 4+\log_2 8$

が成り立つ。また

$\log_2 4^3=\log_2 64=6$

$3\log_2 4=3\times 2=6$

であるから

$\log_2 4^3=3\log_2 4$

が成り立つ。

◀ $2^5=32 \iff \log_2 32=5$
$2^2=4 \iff \log_2 4=2$
$2^3=8 \iff \log_2 8=3$

◀ $2^6=64 \iff \log_2 64=6$

問5 上にならって，$\log_2\frac{32}{8}=\log_2 32-\log_2 8$ が成り立つことを確かめなさい。

$\log_2\dfrac{32}{8}=\log_2 4=2$

$\log_2 32-\log_2 8=5-3=2$

であるから

$\log_2\dfrac{32}{8}=\log_2 32-\log_2 8$

が成り立つ。

一般に，正の数 M, N と実数 k に対して，次の公式が成り立つ。

対数の性質
a を 1 以外の正の数とするとき ［1］ $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$ ［2］ $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ ［3］ $\log_a M^k=k\log_a M$

（教科書 p.115）

例3 (1) $\log_5 2+\log_5 3=\log_5($ 2 $\times$ 3 $)$

$=\log_5 6$

◀ $\log_a M+\log_a N=\log_a(M\times N)$

(2) $\log_5 14-\log_5 2=\log_5\dfrac{(\ 14\ )}{(\ 2\ )}$

$=\log_5 7$

◀ $\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

(3) $\log_3 16=\log_3 2^{(\ 4\ )}$

$=4\log_3 2$

◀ $\log_a M^k=k\log_a M$

(4) $\log_3 27=\log_3 3^{(\ 3\ )}$

$=($ 3 $)\log_3 3$

$=3\times($ 1 $)=3$

◀ $\log_a a=1$

問6 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れなさい。

(1) $\log_2 5+\log_2 3=\log_2\boxed{}$

$=\log_2(5\times 3)$

$=\log_2\boxed{15}$

(2) $\log_7 2+\log_7 5=\log_7\boxed{}$

$=\log_7(2\times 5)$

$=\log_7\boxed{10}$

(3) $\log_{10}18-\log_{10}3=\log_{10}\boxed{}$

$=\log_{10}\dfrac{18}{3}$

$=\log_{10}\boxed{6}$

(4) $\log_2 9-\log_2 3=\log_2\boxed{}$

$=\log_2\dfrac{9}{3}$

$=\log_2\boxed{3}$

(5) $\log_4 9 = \boxed{}\log_4 3$

$= \log_4 3^2$

$= \boxed{2}\log_4 3$

(6) $\log_6 36 = \boxed{}$

$= \log_6 6^2$

$= 2\log_6 6$

$= 2 \times 1$

$= \boxed{2}$

例題 2 次の計算をしなさい。

(1) $\log_6 3 + \log_6 12$　　(2) $\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$

解 (1) $\log_6 3 + \log_6 12$

$= \log_6(3 \times 12)$

$= \log_6 36$

$= \log_6 6^2$

$= 2\log_6 6$

$= 2 \times 1$

$= 2$

(2) $\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}$

$= \log_3 \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$= \log_3 \sqrt{3}$

$= \log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 3$

$= \dfrac{1}{2} \times 1$

$= \dfrac{1}{2}$

問7 次の計算をしなさい。

(1) $\log_4 2 + \log_4 32$

$= \log_4(2 \times 32)$

$= \log_4 64$

$= \log_4 4^3$

$= 3\log_4 4$

$= 3 \times 1$

$= 3$

(2) $\log_6 \frac{9}{2} + \log_6 8$

$= \log_6 \left(\dfrac{9}{2} \times 8\right)$

$= \log_6 36$

$= \log_6 6^2$

$= 2\log_6 6$

$= 2 \times 1$

$= 2$

(3) $\log_3 54 - \log_3 2$

$= \log_3 \dfrac{54}{2}$

$= \log_3 27$

$= \log_3 3^3$

$= 3\log_3 3$

$= 3 \times 1$

$= 3$

(4) $\log_5 \sqrt{30} - \log_5 \sqrt{6}$

$= \log_5 \dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

$= \log_5 \sqrt{5}$

$= \log_5 5^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2} \log_5 5$

$= \dfrac{1}{2} \times 1$

$= \dfrac{1}{2}$

3 対数関数とそのグラフ

（教科書 p.116）

x を正の数，a を 1 以外の正の数とするとき

y =（⑦ $\log_a x$ ）

で表される関数を，a を（⑧ 底 ）とする

x の（⑨ 対数関数 ）という。

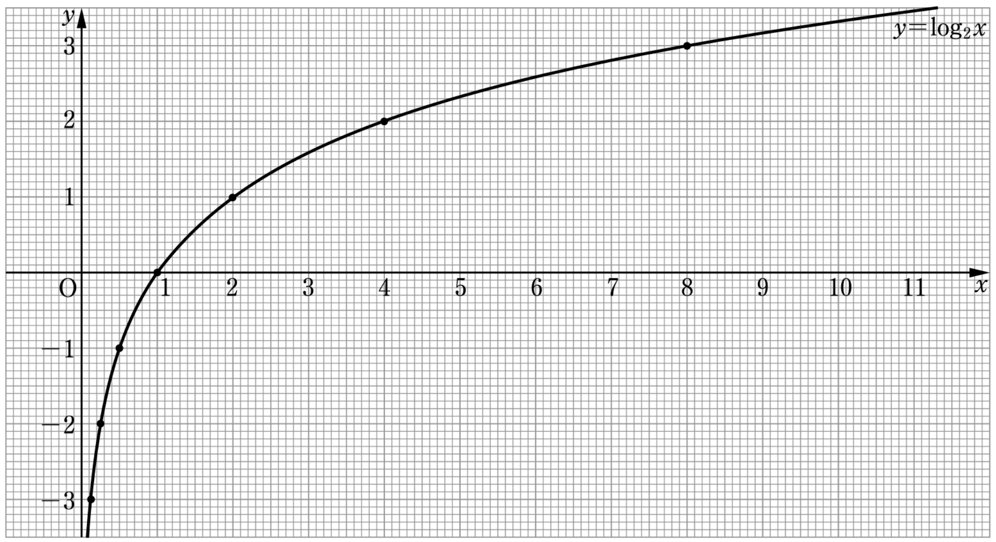
＋解説
$y = \log_a x$
↑
底

対数関数のグラフとその性質

例4 対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフをかくために，$x > 0$ の範囲での x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

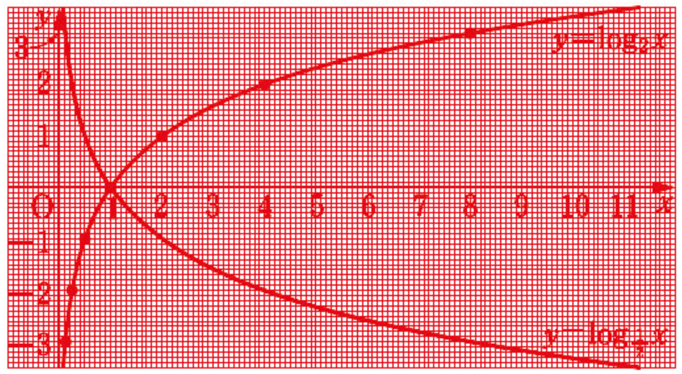
x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y = \log_2 x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

$y = \log_2 x$ のグラフをかくと，下の図のような曲線になる。



問8 右の表を完成し，対数関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	…	**3**	**2**	**1**	**0**	**−1**	**−2**	**−3**	…



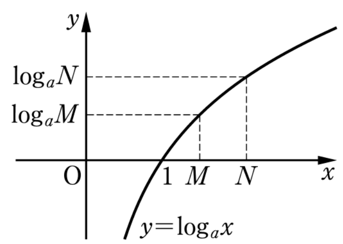
一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，次の性質をもっている。

対数関数 $\boldsymbol{y = \log_a x}$ のグラフ
［1］ 2 点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。 ［2］ $x > 0$ の範囲にある。 ［3］ y 軸がグラフの漸近線となる。 ［4］ $a > 1$ のとき， x の値が増加すると y の値も増加する。 $0 < a < 1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフから，次のことがわかる。

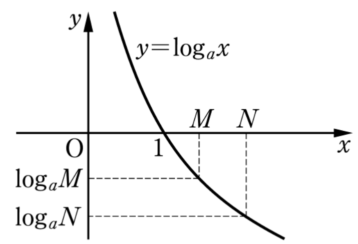
(1) $\boldsymbol{a > 1}$ のとき

$\boldsymbol{0 < M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N}$



(2) $\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき

$\boldsymbol{0 < M < N \Leftrightarrow \log_a M > \log_a N}$

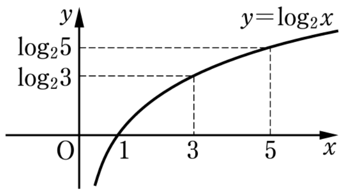


例5 (1) $\log_2 3$，$\log_2 5$ の大小を調べてみよう。

真数の大小を比べると （ 3 ）＜（ 5 ）

底 2 は 1 より（ 大きい ）から

$\log_2 3 < \log_2 5$

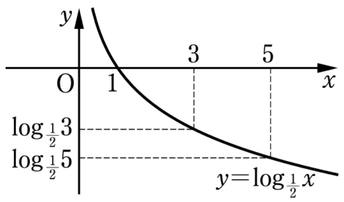


(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$，$\log_{\frac{1}{2}} 5$ の大小を調べてみよう。

真数の大小を比べると （ 3 ）＜（ 5 ）

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より（ 小さい ）から

$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$



問9 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $\log_2 2$，$\log_2 7$，$\log_2 4$

真数を小さい順に並べると 2，4，7

底 2 は 1 より大きいから

$\log_2 2 < \log_2 4 < \log_2 7$

よって $\log_2 2$，$\log_2 4$，$\log_2 7$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 1$，$\log_{\frac{1}{3}} 5$，$\log_{\frac{1}{3}} 2$

◀底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいことに注意する。

真数を小さい順に並べると 1，2，5

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$\log_{\frac{1}{3}} 1 > \log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 5$

よって $\log_{\frac{1}{3}} 5$，$\log_{\frac{1}{3}} 2$，$\log_{\frac{1}{3}} 1$

4 常用対数

（教科書 p.118）

10 を底とする対数 $\log_{10} M$ を（⑩ 常用対数 ）という。

190，191 ページには，1.00 から 9.99 までの数 M の小数第 4 位までの常用対数 $\log_{10} M$ の表がある。

常用対数表

数	0	1	2	3	4
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584

たとえば，$\log_{10} 1.13$ の値は，常用対数表を用いて調べると

$\log_{10} 1.13 =$（⑪ 0.0531 ）

であることがわかる。

問 10 次の値を常用対数表を用いて求めなさい。

(1) $\log_{10} 3.00$

$= 0.4771$

(2) $\log_{10} 6.31$

$= 0.8000$

(3) $\log_{10} 7.08$

$= 0.8500$

例6

(1) $\log_{10} 122 = \log_{10}\left(1.22 \times 10^{(2)} \right)$

$= \log_{10} 1.22 + \log_{10} 10^2$

$= 0.0864 + 2$

$= 2.0864$

◀$\log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$

(2) $\log_{10} 0.143 = \log_{10}\left(1.43 \times 10^{(-1)} \right)$

$= \log_{10} 1.43 + \log_{10} 10^{-1}$

$= 0.1553 - 1$

$= -0.8447$

◀$\log_{10} 10^{-1} = -\log_{10} 10 = -1$

問 11 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めなさい。

◀(1) $429 = 4.29 \times 10^2$
(2) $0.0563 = 5.63 \times 10^{-2}$

(1) $\log_{10} 429$

$= \log_{10}(4.29 \times 10^2)$

$= \log_{10} 4.29 + \log_{10} 10^2$

$= 0.6325 + 2$

$= \mathbf{2.6325}$

(2) $\log_{10} 0.0563$

$= \log_{10}(5.63 \times 10^{-2})$

$= \log_{10} 5.63 + \log_{10} 10^{-2}$

$= 0.7505 - 2$

$= \mathbf{-1.2495}$

（教科書 p.119）

整数の桁数

一般に，n 桁の正の整数 M は　$10^{n-1} \leqq M < 10^n$ を満たす。
このことを利用して，累乗を用いて表された正の整数の桁数を調べてみよう。

例題 3 2^{30} の桁数を求めなさい。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解 $\log_{10} 2 = 0.3010$ より

$2 = 10^{0.3010}$

したがって

$$2^{30} = (10^{0.3010})^{30} = 10^{0.3010\times30} = 10^{9.03}$$

$10^9 < 2^{30} < 10^{10}$ となるから，2^{30} の桁数は 10 桁である。

◀ $10^1 = 10$ …… 2 桁
$10^2 = 100$ …… 3 桁
$10^3 = 1000$ …… 4 桁
⋮
10^n …… $(n+1)$ 桁

問 12 次の数の桁数を求めなさい。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　2^{20}

$\log_{10} 2 = 0.3010$より

$2 = 10^{0.3010}$

したがって

$$2^{20} = (10^{0.3010})^{20} = 10^{0.3010\times20} = 10^{6.02}$$

$10^6 < 2^{20} < 10^7$ となるから，2^{20} の桁数は 7 桁である。

(2)　3^{10}

$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$3 = 10^{0.4771}$

したがって

$$3^{10} = (10^{0.4771})^{10} = 10^{0.4771\times10} = 10^{4.771}$$

$10^4 < 3^{10} < 10^5$ となるから，3^{10} の桁数は 5 桁である。

チャレンジ　底の変換公式

（教科書 p.120）

一般に，a，c を 1 以外の正の数，b を正の数とするとき

$$\log_a b = \frac{\log_c (⑫\ b\ )}{\log_c (⑬\ a\ )}$$

が成り立つ。これを（⑭　底の変換公式　）という。

＋解説

$$\log_{\boxed{a}} \boxed{b} = \frac{\log_c \boxed{b}}{\log_c \boxed{a}}$$

例1 (1)　$\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \dfrac{2\log_2 2}{3\log_2 2} = \dfrac{2}{3}$

(2)　$\log_2 3 \times \log_3 2 = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \log_2 2 = 1$

問1 次の値を求めなさい。

(1)　$\log_8 16$

$$= \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4\log_2 2}{3\log_2 2} = \frac{4}{3}$$

(2)　$\log_9 3$

$$= \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{1}{2}$$

(3) $\log_2 3 \times \log_3 8$

$= \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}$

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3$

$= 3\log_2 2$

$= 3$

復 習 問 題

（教科書 p.121）

1 次の等式を $\log_a M = p$ の形に表しなさい。

(1) $10^3 = 1000$

$\log_{10} 1000 = 3$

(2) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

$\log_7 \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}$

(3) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

$\log_2 \dfrac{1}{32} = -5$

2 次の等式を満たす M の値を求めなさい。

(1) $\log_3 M = 4$

$\log_3 M = 4 \Leftrightarrow 3^4 = M$

であるから，$\log_3 M = 4$ を満たす M の値は

$M = 3^4 = 81$

(2) $\log_4 M = 0$

$\log_4 M = 0 \Leftrightarrow 4^0 = M$

であるから，$\log_4 M = 0$ を満たす M の値は

$M = 4^0 = 1$

(3) $\log_2 M = -3$

$\log_2 M = -3 \Leftrightarrow 2^{-3} = M$

であるから，$\log_2 M = -3$ を満たす M の値は

$M = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

3 次の等式を満たす a の値を求めなさい。

(1) $\log_a 9 = 2$

$\log_a 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9$

であるから，$\log_a 9 = 2$ を満たす a の値は

$a = 3$

(2) $\log_a 32 = 5$

$\log_a 32 = 5 \Leftrightarrow a^5 = 32$

であるから，$\log_a 32 = 5$ を満たす a の値は

$a = 2$

(3) $\log_a \frac{1}{81} = 4$

$\log_a \dfrac{1}{81} = 4 \Leftrightarrow a^4 = \dfrac{1}{81}$

であるから，$\log_a \frac{1}{81} = 4$ を満たす a の値は

$a = \dfrac{1}{3}$

4 次の値を求めなさい。

(1) $\log_4 64$

$\log_4 64 = x$ とおくと　$4^x = 64$

$64 = 4^3$ より　$4^x = 4^3$

よって　$x = 3$

すなわち　$\log_4 64 = 3$

(2) $\log_{25} 5$

$\log_{25} 5 = x$ とおくと　$25^x = 5$

$25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$ より　$5^{2x} = 5^1$

よって　$2x = 1$

したがって　$x = \frac{1}{2}$

すなわち　$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

(3) $\log_{27} 3$

$\log_{27} 3 = x$ とおくと　$27^x = 3$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ より　$3^{3x} = 3^1$

よって　$3x = 1$

したがって　$x = \frac{1}{3}$

すなわち　$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

(4) $\log_4 \sqrt{2}$

$\log_4 \sqrt{2} = x$ とおくと　$4^x = \sqrt{2}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$，$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ より

$2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}}$

よって　$2x = \frac{1}{2}$

したがって　$x = \frac{1}{4}$

すなわち　$\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

5 次の計算をしなさい。

(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20$

$= \log_{10}(5 \times 20)$

$= \log_{10} 100$

$= \log_{10} 10^2$

$= 2\log_{10} 10$

$= 2 \times 1$

$= 2$

(2) $\log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6$

$= \log_2 \left(\frac{8}{3} \times 6\right)$

$= \log_2 16$

$= \log_2 2^4$

$= 4\log_2 2$

$= 4 \times 1$

$= 4$

(3) $\log_3 108 - \log_3 4$

$= \log_3 \frac{108}{4}$

$= \log_3 27$

$= \log_3 3^3$

$= 3\log_3 3$

$= 3 \times 1$

$= 3$

(4) $\log_6 \sqrt{30} - \log_6 \sqrt{5}$

$= \log_6 \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$

$= \log_6 \sqrt{6}$

$= \log_6 6^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_6 6$

$= \frac{1}{2} \times 1$

$= \frac{1}{2}$

6 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $\log_3 2$，$\log_3 5$，$\log_3 4$

真数を小さい順に並べると　2，4，5

底 3 は 1 より大きいから

$\log_3 2 < \log_3 4 < \log_3 5$

よって　$\log_3 2$，$\log_3 4$，$\log_3 5$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 6$, $\log_{\frac{1}{2}} 7$, $\log_{\frac{1}{2}} 5$

真数を小さい順に並べると　5，6，7

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 7$$

よって　$\log_{\frac{1}{2}} 7$，$\log_{\frac{1}{2}} 6$，$\log_{\frac{1}{2}} 5$

7 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めなさい。

(1) $\log_{10} 9$

$= \log_{10} 3^2$

$= 2\log_{10} 3$

$= 2 \times 0.4771$

$= 0.9542$

(2) $\log_{10} 0.3$

$= \log_{10}(3 \times 10^{-1})$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} 10^{-1}$

$= 0.4771 - 1$

$= -0.5229$

8 3^{20} の桁数を求めなさい。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$3 = 10^{0.4771}$

したがって

$3^{20} = (10^{0.4771})^{20}$

$= 10^{0.4771 \times 20}$

$= 10^{9.542}$

$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$ となるから，3^{20} の桁数は 10 桁である。