1 節 指数関数

1 指数の拡張

（教科書 p.103）

$a\times a\times a=a^3$ のように，a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，a^n で表す。このとき，n を a^n の（①　　　　）という。また，a, a^2, a^3, $\cdots$ をまとめて a の（②　　　　）という。

一般に，m, n が正の整数のとき，次の（③　　　　）が成り立つ。

$\boldsymbol{a^m\times a^n}=$（④　　　　），　$\boldsymbol{(a^m)^n}=$（⑤　　　　），　$\boldsymbol{(ab)^n}=$（⑤　　　　）

＋解説

$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}}=a^n$

a^n ←指数

例1 (1) $a^3\times a^5=$

◀ $a^3\times a^5$
$=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

(2) $(a^2)^3=$

(3) $(a^2b)^4=$

問1 次の計算をしなさい。

(1) $a^6\times a^2$

(2) $(a^5)^4$

(3) $(a^3b)^5$

a^0,　a^{-n}

一般に，0 や負の整数の指数について，次のように定める。

$\boldsymbol{a^0}$,　$\boldsymbol{a^{-n}}$
$a\neq0$ で，n が正の整数のとき　$\boldsymbol{a^0=1}$, $\boldsymbol{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$

例2 (1) $3^0=$

(2) $2^{-4}=$

問2 次の$\square$にあてはまる数を入れなさい。

(1) $4^{\square}=1$

(2) $5^{-3}=\dfrac{1}{5^{\square}}$

(3) $a^{\square}=\dfrac{1}{a^7}$

一般に，m, n がどのような整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

$\boldsymbol{a^m\times a^n}=$（⑦　　　　），　$\boldsymbol{a^m\div a^n}=$,（⑧　　　　）

$\boldsymbol{(a^m)^n}=$（⑨　　　　），　$\boldsymbol{(ab)^n}=$（⑩　　　　）

例3 (1) $10^{-2}\times10^5=$

◀ $a^3\times a^5$
$=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

(2) $2^{-3}\div2^{-7}=$

(3) $(3^{-3})^2=$

問3 次の計算をしなさい。

(1) $2^{-2}\times2^{-3}$

(2) $3^{-3} \div 3^{-2}$

(3) $(2^{-2})^3$

2 累乗根

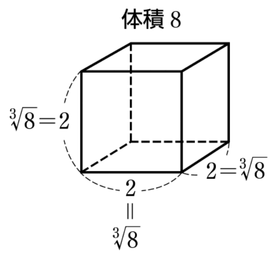
（教科書 p.104）

2 を 3 乗すると 8 になる。この数 2 を 8 の（⑪　　　　　）という。
一般に，n を正の整数とするとき， n 乗すると a になる数を
a の（⑫　　　　　）という。また，2 乗根，3 乗根，4 乗根，…を
まとめて（⑬　　　　　）という。

◀ 2 乗根を平方根， 3 乗根を立方根ともいう。

与えられた正の数 a に対して，3 乗すると a になる
正の数を（⑭　　　　　）で表す。たとえば
$\sqrt[3]{8}=$（⑮　　　　　）
である。$\sqrt[3]{a}$ は，a の 3 乗根である。

◀ 体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは $\sqrt[3]{8}$ である。



例4 (1)　$3^3=$　　であるから　　$\sqrt[3]{27}=$
(2)　$6^3=$　　であるから　　$\sqrt[3]{216}=$

◀
$$\begin{array}{r|l} 2 & 216 \\ 2 & 108 \\ 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$

問4 次の値を求めなさい。
(1)　$\sqrt[3]{64}$

(2)　$\sqrt[3]{125}$

一般に，n が正の整数で，$a>0$ のとき，n 乗して a となる
正の数を（⑯　　　　　）で表す。このとき，次のことが成り立つ。
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=$（⑰　　　　　）
$\sqrt[n]{a^n}=$（⑱　　　　　）

◀ $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く。

例5 (1)　$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=$
(2)　$\sqrt[5]{32}=$

問5 次の値を求めなさい。
(1)　$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4$

(2)　$\sqrt[5]{100000}$

（教科書 p.105）

累乗根の性質

累乗根の積と商
$a>0$，$b>0$ で，n が正の整数のとき ［1］　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　［2］　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

例6 (1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=$

(2)　$\sqrt[4]{12}\div\sqrt[4]{4}=$

問6 次の計算をしなさい。
(1)　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}$

(2)　$\sqrt[4]{32}\div\sqrt[4]{2}$

一般に，次の公式が成り立つ。

累乗根の累乗
$a>0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき　$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$

＋解説
$(\sqrt[■]{a})^{●}=\sqrt[■]{a^{●}}$

例7 (1) $\left(\sqrt[7]{a}\right)^3=$

(2) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2=$

問7 次の計算をしなさい。

(1) $\left(\sqrt[5]{a}\right)^4$

(2) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$

（教科書 p.106）

分数の指数

指数が分数のときにも指数法則

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

が成り立つように，指数の意味を拡張しよう。

上の指数法則が，$m=\frac{1}{3}$，$n=3$ のときも成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a^1=a$$

これは，$a^{\frac{1}{3}}$ が a の 3 乗根であることを表しているから

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$$

であることがわかる。

そこで，$a>0$ で，n が正の整数のとき

$$\boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}}=(⑲\qquad\qquad)$$

◀$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$

と定めると

$$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}\times 2}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=(⑳\qquad\qquad)$$

一般に，次のように定める。

分数の指数
$a>0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき $\boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}},\qquad \boldsymbol{a}^{-\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}}}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}}$

＋解説
$a^{\frac{●}{■}}=\sqrt[■]{a^{●}}$
$a^{-\frac{●}{■}}=\dfrac{1}{\sqrt[■]{a^{●}}}$

例8 (1) $5^{\frac{1}{4}}=$

(2) $5^{\frac{1}{2}}=$

(3) $8^{\frac{2}{3}}=$

(4) $5^{-\frac{2}{3}}=$

問8 次の値を求めなさい。

(1) $7^{\frac{1}{5}}$

(2) $4^{\frac{3}{2}}$

(3) $3^{-\frac{2}{5}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

問9 次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表しなさい。ただし，$a>0$ とする。

(1) $\sqrt[5]{a}$

(2) $\sqrt[3]{a^4}$

(3) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$

（教科書 p.107）

分数の指数を 106 ページのように定めると，指数がどのような分数や整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

指数法則
$a>0$，$b>0$ で，p，q が分数や整数のとき ［1］ $\boldsymbol{a^p \times a^q = a^{p+q}}$　［2］ $\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$ ［3］ $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$　［4］ $\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$

例9 (1) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} =$

(2) $5^{\frac{7}{4}} \div 5^{\frac{3}{4}} =$

(3) $\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^{10} =$

問10 次の計算をしなさい。ただし，$a>0$ とする。

(1) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{4}}$

(2) $a^{\frac{8}{3}} \div a^{\frac{2}{3}}$

(3) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

例題 1 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}$　　(2) $\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8}$

解

◀$\sqrt[n]{a^m}$ は，$a^{\frac{m}{n}}$ の形になおしてから計算する。

◀$2^{●}$ の形にそろえる。

問 11 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[6]{25}$

(2) $\sqrt[4]{2^9} \div \sqrt[8]{2^2}$

(3) $\sqrt{27} \times \sqrt[4]{3^2}$

(4) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[6]{4}$

3 指数関数とそのグラフ

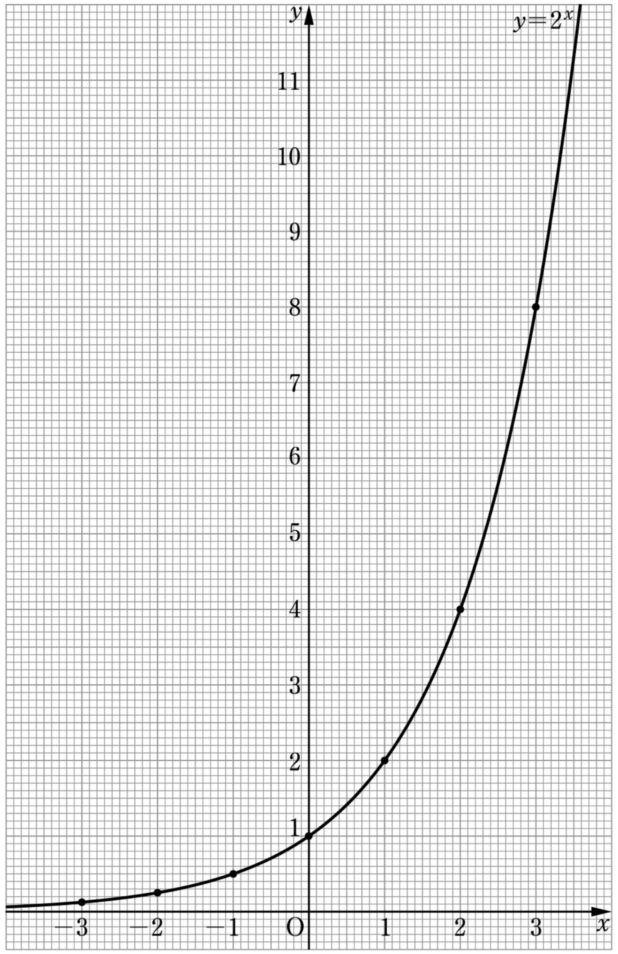
（教科書 p.108）

関数 $y=2^x$ のグラフはどのように表されるかを調べてみよう。
x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	…

この表をもとに，$y=2^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になる。関数 $y=2^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,$ (㉑　　　)) を通る。
② x 軸より上側にある。
　つまり，$y>$ (㉒　　　)の範囲にある。
③ x の値が減少すると，x 軸に限りなく近づいていくので，x 軸がグラフの
　(㉓　　　　) となる。
④ x の値が増加すると，y の値も
　(㉔　　　　) する。



一般に，a を 1 以外の正の数とするとき
　$\boldsymbol{y}=$ (㉕　　　　)
で表される関数を，a を (㉖　　　　) とする x の
(㉗　　　　) という。

◀上の関数 $y=2^x$ は，2 を底とする指数関数である。

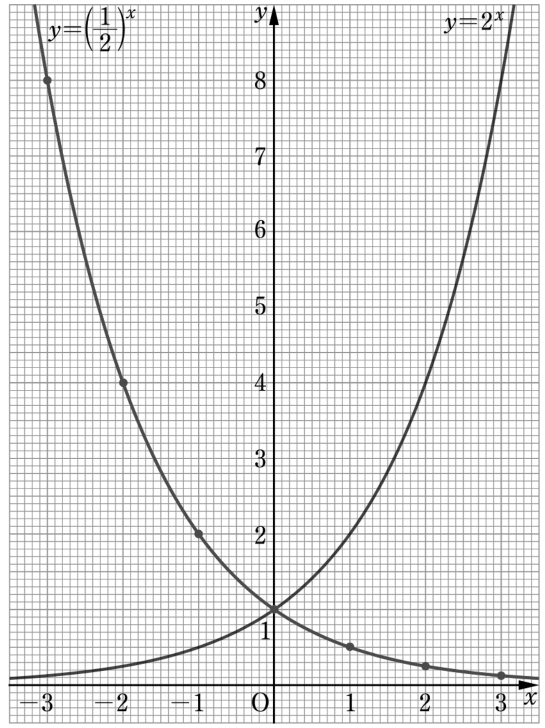
（教科書 p.109）

例 10 指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくために，x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…								…

例 10 の表をもとに，指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になり，このグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,$ (㉘　　　)) を通る。
② $y>$ (㉙　　　) の範囲にある。
③ x 軸がグラフの (㉚　　　　) となる。
④ x の値が増加すると，y の値は
　(㉛　　　　) する。



また，右の図からわかるように，関数 $y=2^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。
一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

指数関数 $\boldsymbol{y=a^x}$ のグラフ
［1］ 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。 ［2］ $y>0$ の範囲にある。 ［3］ x 軸がグラフの漸近線となる。 ［4］ $a>1$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加する。 　$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

問 12 右の表を完成し，指数関数$y = 3^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y = 3^x$	$\cdots$						$\cdots$
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$						$\cdots$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y = 3^x$	$\cdots$						$\cdots$
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$						$\cdots$

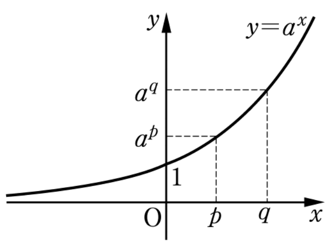
（教科書 p.110）

指数関数の利用

指数関数 $y = a^x$ のグラフから，次のことがわかる。

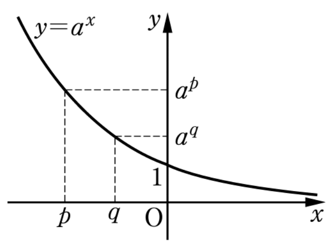
(1) $\boldsymbol{a > 1}$ のとき

$\boldsymbol{p < q \quad \Leftrightarrow \quad a^p \qquad a^q}$



(2) $\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき

$\boldsymbol{p < q \quad \Leftrightarrow \quad a^p \qquad a^q}$



◀ $A \Longleftrightarrow B$ は，A と B が同じ内容であることを表す。

例題 2 $2^{\frac{1}{2}}$，2^{-1}，2^0 を小さい方から順に並べなさい。

解

問 13 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1)　3，3^{-2}，$3^{\frac{2}{3}}$

(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

◀(2)　底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいことに注意する。

例題 3 方程式 $9^x = 27$ を解きなさい。

解

◀両辺の底を同じ数にする。

問 14 次の方程式を解きなさい。

(1) $7^x = 49$

(2) $4^x = 8$

(3) $5^x = 1$

復 習 問 題

（教科書 p.111）

1 次の値を求めなさい。

(1) 5^{-2}

(2) 8^{0}

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

2 次の計算を行い，結果を負の整数の指数を用いないで表しなさい。ただし，$a > 0,\ b > 0$ とする。

(1) $a^{2} \times a^{-4}$

(2) $a^{3} \div a^{-2}$

(3) $(a^{-3})^{2}$

(4) $(a^{-2}b)^{-4}$

3 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{2}$

(2) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$

(3) $\sqrt[6]{6} \div \sqrt[6]{2}$

4 次の値を求めなさい。

(1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3$

(2) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^2$

(3) $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$

5 次の値を求めなさい。

(1) $64^{\frac{1}{3}}$

(2) $3^{\frac{3}{4}}$

(3) $16^{-\frac{1}{2}}$

6 次の計算をしなさい。

(1) $7^{\frac{3}{5}} \times 7^{\frac{2}{5}}$

(2) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^6$

(3) $\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{9}$

(4) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

7 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $2^{\frac{3}{2}},\ 2^2,\ 2^{-\frac{1}{3}}$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

8 次の方程式を解きなさい。

(1)　$2^x = 16$

(2)　$3^x = \frac{1}{27}$

(3)　$8^x = 4$

１節 指数関数

１ 指数の拡張

（教科書 p.103）

$a\times a\times a=a^3$ のように，a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，a^n で表す。このとき，n を a^n の（① 指数 ）という。また，$a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots$ をまとめて a の（② 累乗 ）という。
一般に，$m,\ n$ が正の整数のとき，次の（③ 指数法則 ）が成り立つ。

$$\boldsymbol{a^m\times a^n=(④\ a^{m+n}),\quad (a^m)^n=(⑤\ a^{mn}),\quad (ab)^n=(⑤\ a^nb^n)}$$

＋解説

$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}}=a^n$

a^n ←指数

例1 (1) $a^3\times a^5=a^{3+5}=a^8$

◀ $a^3\times a^5$
$=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

(2) $(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$

(3) $(a^2b)^4=(a^2)^4b^4=a^{2\times4}b^4=a^8b^4$

問1 次の計算をしなさい。

(1) $a^6\times a^2$
$=a^{6+2}$
$=a^8$

(2) $(a^5)^4$
$=a^{5\times4}$
$=a^{20}$

(3) $(a^3b)^5$
$=(a^3)^5b^5$
$=a^{3\times5}b^5$
$=a^{15}b^5$

$a^0,\quad a^{-n}$

一般に，0 や負の整数の指数について，次のように定める。

$\boldsymbol{a^0,\quad a^{-n}}$
$a\neq0$ で，n が正の整数のとき　$\boldsymbol{a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$

例2 (1) $3^0=1$

(2) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

問2 次の□にあてはまる数を入れなさい。

(1) $4^{\square}=1$
$4^{\boxed{0}}=1$

(2) $5^{-3}=\frac{1}{5^{\square}}$
$5^{-3}=\frac{1}{5^{\boxed{3}}}$

(3) $a^{\square}=\frac{1}{a^7}$
$a^{\boxed{-7}}=\frac{1}{a^7}$

一般に，$m,\ n$ がどのような整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

$$\boldsymbol{a^m\times a^n=(⑦\ a^{m+n}),\quad a^m\div a^n=,\ (⑧\ a^{m-n})}$$
$$\boldsymbol{(a^m)^n=(⑨\ a^{mn}),\quad (ab)^n=(⑩\ a^nb^n)}$$

例3 (1) $10^{-2}\times10^5=10^{-2+5}=10^3=1000$

◀ $a^3\times a^5$
$=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

(2) $2^{-3}\div2^{-7}=2^{-3-(-7)}=2^4=16$

(3) $(3^{-3})^2=3^{-3\times2}=3^{-6}=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$

問3 次の計算をしなさい。

(1) $2^{-2}\times2^{-3}$
$=2^{-2+(-3)}$
$=2^{-5}$
$=\frac{1}{2^5}$
$=\frac{1}{32}$

⑵ $3^{-3} \div 3^{-2}$

$= 3^{-3-(-2)}$

$= 3^{-1}$

$= \dfrac{1}{3}$

⑶ $(2^{-2})^3$

$= 2^{-2\times 3}$

$= 2^{-6}$

$= \dfrac{1}{2^6}$

$= \dfrac{1}{64}$

2 累乗根

（教科書 p.104）

2 を 3 乗すると 8 になる。この数 2 を 8 の（⑪　3 乗根　）という。
一般に，n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の（⑫　n 乗根　）という。また，2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて（⑬　累乗根　）という。

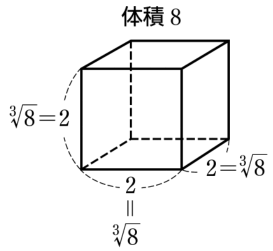
◀ 2 乗根を平方根，3 乗根を立方根ともいう。

与えられた正の数 a に対して，3 乗すると a になる正の数を（⑭　$\sqrt[3]{a}$　）で表す。たとえば

$\sqrt[3]{8}$ =（⑮　2　）

である。$\sqrt[3]{a}$ は，a の 3 乗根である。

◀体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは $\sqrt[3]{8}$ である。



例4 (1)　$3^3 = 27$ であるから　　$\sqrt[3]{27} = 3$

(2)　$6^3 = 216$ であるから　　$\sqrt[3]{216} = 6$

◀
2) 216
2) 108
2)　54
3)　27
3)　 9
　　 3

問4 次の値を求めなさい。

(1)　$\sqrt[3]{64}$

$4^3 = 64$ であるから　　$\sqrt[3]{64} = 4$

(2)　$\sqrt[3]{125}$

$5^3 = 125$ であるから　　$\sqrt[3]{125} = 5$

一般に，n が正の整数で，$a > 0$ のとき，n 乗して a となる正の数を（⑯　$\sqrt[n]{a}$　）で表す。このとき，次のことが成り立つ。

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ =（⑰　a　）

$\sqrt[n]{a^n}$ =（⑱　a　）

◀ $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く。

例5 (1)　$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

(2)　$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

問5 次の値を求めなさい。

(1)　$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4$

$= 3$

(2)　$\sqrt[5]{100000}$

$= \sqrt[5]{10^5}$

$= 10$

（教科書 p.105）

累乗根の性質

累乗根の積と商
$a > 0,\ b > 0$ で，n が正の整数のとき ［1］　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　［2］　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

例6 (1)　$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2)　$\sqrt[4]{12} \div \sqrt[4]{4} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{4}} = \sqrt[4]{3}$

問6 次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$

$= \sqrt[3]{5 \times 7}$

$= \sqrt[3]{35}$

(2)　$\sqrt[4]{32} \div \sqrt[4]{2}$

$= \dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}$

$= \sqrt[4]{16}$

$= \sqrt[4]{2^4}$

$= 2$

一般に，次の公式が成り立つ。

累乗根の累乗

$a>0$ で，m，n が正の整数のとき　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

＋解説
$(\sqrt[■]{a})^{●}=\sqrt[■]{a^{●}}$

例7 (1) $\left(\sqrt[7]{a}\right)^3=\sqrt[7]{a^3}$

(2) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$

問7 次の計算をしなさい。

(1) $\left(\sqrt[5]{a}\right)^4$
$=\sqrt[5]{a^4}$

(2) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$
$=\sqrt[6]{4^3}$
$=\sqrt[6]{(2^2)^3}$
$=\sqrt[6]{2^6}$
$=2$

（教科書 p.106）

分数の指数

指数が分数のときにも指数法則

$(a^m)^n=a^{mn}$

が成り立つように，指数の意味を拡張しよう。

上の指数法則が，$m=\frac{1}{3}$，$n=3$ のときも成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a^1=a$$

これは，$a^{\frac{1}{3}}$ が a の 3 乗根であることを表しているから

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$$

であることがわかる。

そこで，$a>0$ で，n が正の整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}}=(⑲\ \sqrt[n]{a}\ )$$

◀ $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$

と定めると

$$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}\times 2}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=(⑳\ \sqrt[3]{a^2}\ )$$

一般に，次のように定める。

分数の指数

$a>0$ で，m，n が正の整数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\qquad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

＋解説
$a^{\frac{●}{■}}=\sqrt[■]{a^{●}}$
$a^{-\frac{●}{■}}=\frac{1}{\sqrt[■]{a^{●}}}$

例8 (1) $5^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{5}$

(2) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{5}=\sqrt{5}$

(3) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(4) $5^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

問8 次の値を求めなさい。

(1) $7^{\frac{1}{5}}$

$= \sqrt[5]{7}$

(2) $4^{\frac{3}{2}}$

$= \sqrt[2]{4^3}$

$= \sqrt{64}$

$= 8$

〔別解〕

$4^{\frac{3}{2}}$

$= \left(\sqrt[2]{4}\right)^3$

$= \left(\sqrt{4}\right)^3$

$= 2^3$

$= 8$

(3) $3^{-\frac{2}{5}}$

$= \dfrac{1}{3^{\frac{2}{5}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$

問9 次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表しなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1) $\sqrt[5]{a}$

$= a^{\frac{1}{5}}$

(2) $\sqrt[3]{a^4}$

$= a^{\frac{4}{3}}$

(3) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$

$= \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5$

$= a^{\frac{1}{4}\times 5}$

$= a^{\frac{5}{4}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

$= \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$

$= a^{-\frac{2}{3}}$

（教科書 p.107）

分数の指数を 106 ページのように定めると，指数がどのような分数や整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

指数法則
$a > 0$，$b > 0$ で，p，q が分数や整数のとき ［1］ $\boldsymbol{a^p \times a^q = a^{p+q}}$ ［2］ $\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$ ［3］ $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$ ［4］ $\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$

例9 (1) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

(2) $5^{\frac{7}{4}} \div 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$

(3) $\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^{10} = \left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{10} = 3^{\frac{2}{5}\times 10} = 3^4 = 81$

問10 次の計算をしなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{4}}$

$= a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$

$= a^{\frac{8}{4}}$

$= a^2$

(2)　$a^{\frac{8}{3}} \div a^{\frac{2}{3}}$

$= a^{\frac{8}{3}-\frac{2}{3}}$

$= a^{\frac{6}{3}}$

$= a^2$

(3)　$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

$= \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6$

$= a^{\frac{2}{3}\times 6}$

$= a^4$

例題 1　次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}$　　(2)　$\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8}$

解　(1)　$\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{6}{3}}$

$= 3^2$

$= 9$

◀$\sqrt[n]{a^m}$ は，$a^{\frac{m}{n}}$ の形になおしてから計算する。

(2)　$\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8} = \sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{2^3}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{3}{6}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{2}{2}}$

$= 2^1$

$= 2$

◀$2^{\bullet}$ の形にそろえる。

問 11 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[6]{25}$

$= \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5^2}$

$= 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{6}}$

$= 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$

$= 5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$= 5^{\frac{3}{3}}$

$= 5^1$

$= 5$

(2) $\sqrt[4]{2^9} \div \sqrt[8]{2^2}$

$= 2^{\frac{9}{4}} \div 2^{\frac{2}{8}}$

$= 2^{\frac{9}{4}} \div 2^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2$

$= 4$

(3) $\sqrt{27} \times \sqrt[4]{3^2}$

$= \sqrt{3^3} \times \sqrt[4]{3^2}$

$= 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{2}{4}}$

$= 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$

$= 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$

$= 3^{\frac{4}{2}}$

$= 3^2$

$= 9$

(4) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[6]{4}$

$= \sqrt[3]{2^4} \div \sqrt[6]{2^2}$

$= 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{2}{6}}$

$= 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{3}{3}}$

$= 2^1$

$= 2$

3 指数関数とそのグラフ

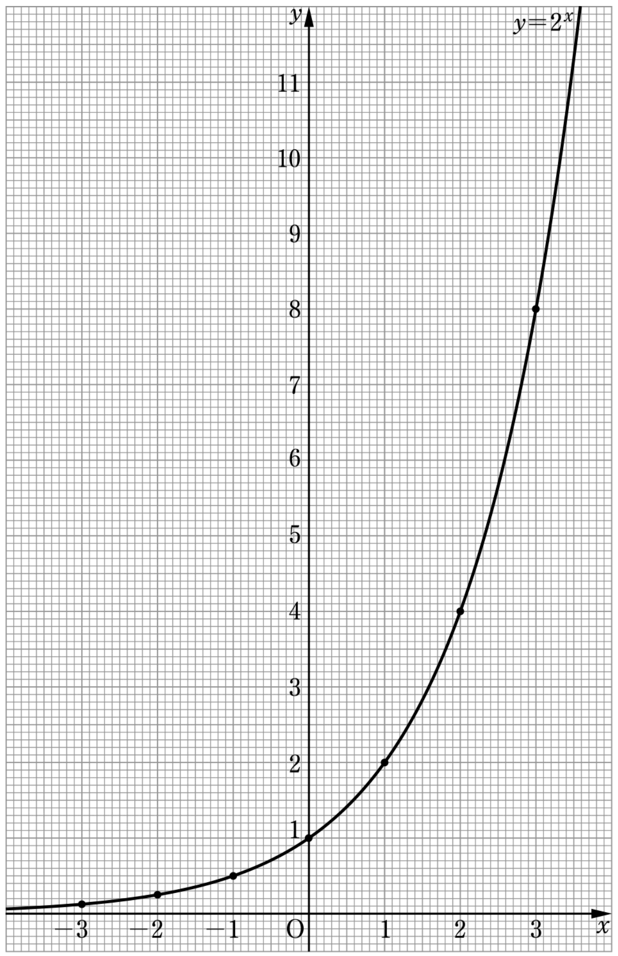
（教科書 p.108）

関数 $y=2^x$ のグラフはどのように表されるかを調べてみよう。
x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$

この表をもとに，$y=2^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になる。関数 $y=2^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,$（㉑　2　））を通る。
② x 軸より上側にある。
　つまり，$y>$（㉒　0　）の範囲にある。
③ x の値が減少すると，x 軸に限りなく近づいていくので，x 軸がグラフの
　（㉓　漸近線　）となる。
④ x の値が増加すると，y の値も
　（㉔　増加　）する。



一般に，a を 1 以外の正の数とするとき
　　$y=$（㉕　a^x　）
で表される関数を，a を（㉖　底　）とする x の
（㉗　指数関数　）という。

◀上の関数 $y=2^x$ は，2 を底とする指数関数である。

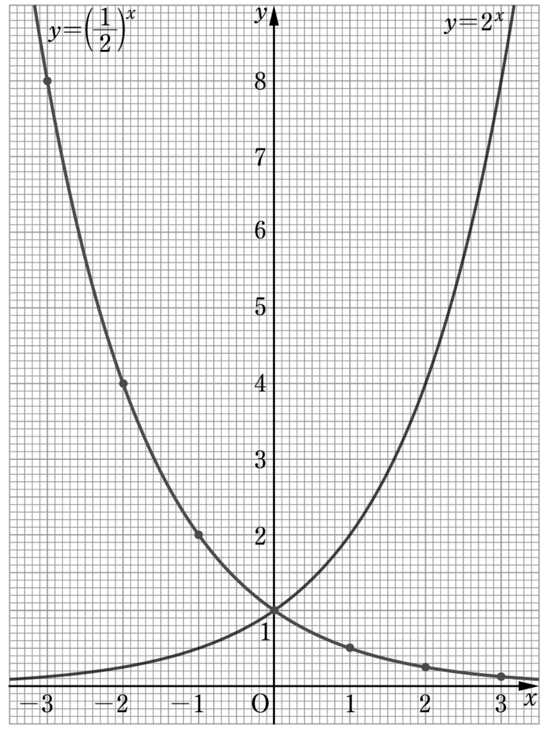
（教科書 p.109）

例 10 指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくために，x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$

例 10 の表をもとに，指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になり，このグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,$（㉘　$\frac{1}{2}$　））を通る。
② $y>$（㉙　0　）の範囲にある。
③ x 軸がグラフの（㉚　漸近線　）となる。
④ x の値が増加すると，y の値は
　（㉛　減少　）する。



また，右の図からわかるように，関数 $y=2^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。

一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

指数関数 $y=a^x$ のグラフ

［1］ 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

［2］ $y>0$ の範囲にある。

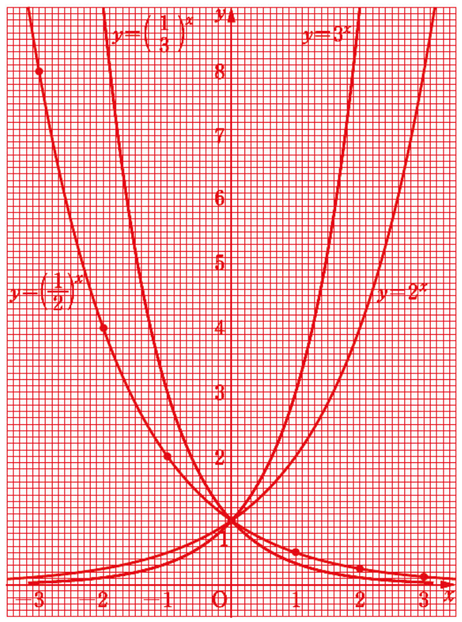
［3］ x 軸がグラフの漸近線となる。

［4］ $a>1$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加する。
　　$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

問 12 右の表を完成し，指数関数 $y = 3^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y = 3^x$	$\cdots$						$\cdots$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$						$\cdots$

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y = 3^x$	$\cdots$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	$\cdots$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\cdots$



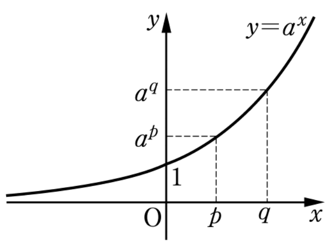
（教科書 p.110）

指数関数の利用

指数関数 $y = a^x$ のグラフから，次のことがわかる。

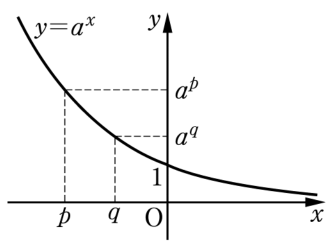
(1)　$a > 1$ のとき

$p < q \iff a^p < a^q$



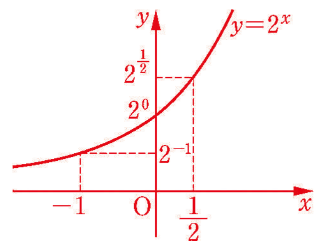
(2)　$0 < a < 1$ のとき

$p < q \iff a^p > a^q$



◀ $A \Longleftrightarrow B$ は，A と B が同じ内容であることを表す。

例題 2 $2^{\frac{1}{2}}$，2^{-1}，2^0 を小さい方から順に並べなさい。



解 指数を小さい順に並べると，-1，0，$\frac{1}{2}$

底 2 は 1 より大きいから

$$2^{-1} < 2^0 < 2^{\frac{1}{2}}$$

よって　2^{-1}，2^0，$2^{\frac{1}{2}}$

問 13 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1)　3，3^{-2}，$3^{\frac{2}{3}}$

指数を小さい順に並べると

$$-2,\ \frac{2}{3},\ 1$$

底 3 は 1 より大きいから

$$3^{-2} < 3^{\frac{2}{3}} < 3^1$$

よって　3^{-2}，$3^{\frac{2}{3}}$，3

(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

◀(2)　底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいことに注意する。

指数を小さい順に並べると

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$$

底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$$

よって　$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

例題 3 方程式 $9^x = 27$ を解きなさい。

解 $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$，$27 = 3^3$ より

$$3^{2x} = 3^3$$

◀両辺の底を同じ数にする。

よって　$2x = 3$

したがって　$x = \frac{3}{2}$

問 14 次の方程式を解きなさい。

(1) $7^x = 49$

$49 = 7^2$ より

$7^x = 7^2$

よって　$x = 2$

(2) $4^x = 8$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$，$8 = 2^3$ より

$2^{2x} = 2^3$

よって　$2x = 3$

したがって　$x = \frac{3}{2}$

(3) $5^x = 1$

$1 = 5^0$ より

$5^x = 5^0$

よって　$x = 0$

復 習 問 題

（教科書 p.111）

1 次の値を求めなさい。

(1) 5^{-2}

$= \dfrac{1}{5^2}$

$= \dfrac{1}{25}$

(2) 8^0

$= 1$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$= (2^{-1})^{-3}$

$= 2^{-1\times(-3)}$

$= 2^3$

$= 8$

2 次の計算を行い，結果を負の整数の指数を用いないで表しなさい。ただし，$a>0,\ b>0$ とする。

(1) $a^2 \times a^{-4}$

$= a^{2+(-4)}$

$= a^{-2}$

$= \dfrac{1}{a^2}$

(2) $a^3 \div a^{-2}$

$= a^{3-(-2)}$

$= a^5$

(3) $(a^{-3})^2$

$= a^{-3\times2}$

$= a^{-6}$

$= \dfrac{1}{a^6}$

(4) $(a^{-2}b)^{-4}$

$= (a^{-2})^{-4}b^{-4}$

$= a^{-2\times(-4)}b^{-4}$

$= a^8b^{-4}$

$= \dfrac{a^8}{b^4}$

3 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{2}$

$= \sqrt[5]{9\times2}$

$= \sqrt[5]{18}$

(2) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$

$= \sqrt[3]{3\times9}$

$= \sqrt[3]{3^3}$

$= 3$

(3) $\sqrt[6]{6}\div\sqrt[6]{2}$

$= \dfrac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{2}}$

$= \sqrt[6]{\dfrac{6}{2}}$

$= \sqrt[6]{3}$

4 次の値を求めなさい。

(1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3$

$=\sqrt[6]{25^3}$

$=\sqrt[6]{(5^2)^3}$

$=\sqrt[6]{5^6}$

$=5$

(2) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^2$

$=\sqrt[4]{9^2}$

$=\sqrt[4]{(3^2)^2}$

$=\sqrt[4]{3^4}$

$=3$

(3) $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$

$=\sqrt[6]{8^2}$

$=\sqrt[6]{(2^3)^2}$

$=\sqrt[6]{2^6}$

$=2$

5 次の値を求めなさい。

(1) $64^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{64}$

$=\sqrt[3]{4^3}$

$=4$

(2) $3^{\frac{3}{4}}$

$=\sqrt[4]{3^3}$

$=\sqrt[4]{27}$

(3) $16^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{16^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[2]{16}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{16}}$

$=\dfrac{1}{4}$

6 次の計算をしなさい。

(1) $7^{\frac{3}{5}}\times 7^{\frac{2}{5}}$

$=7^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}$

$=7^{\frac{5}{5}}$

$=7^1$

$=7$

(2) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^6$

$=\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^6$

$=\left(3^{\frac{2}{4}}\right)^6$

$=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6$

$=3^{\frac{1}{2}\times 6}$

$=3^3$

$=27$

(3) $\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{9}$

$= \sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{3^2}$

$= 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{2}{6}}$

$= 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{6}{3}}$

$= 3^2$

$= 9$

(4) $\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

$= \sqrt[3]{3^4} \div \sqrt[6]{3^2}$

$= 3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{2}{6}}$

$= 3^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{3}{3}}$

$= 3^1$

$= 3$

7 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1) $2^{\frac{3}{2}},\ 2^2,\ 2^{-\frac{1}{3}}$

指数を小さい順に並べると

$$-\frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ 2$$

底 2 は 1 より大きいから

$$2^{-\frac{1}{3}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^2$$

よって　$2^{-\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{3}{2}},\ 2^2$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

指数を小さい順に並べると

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}$$

底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいから

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$$

よって　$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

8 次の方程式を解きなさい。

(1) $2^x = 16$

$16 = 2^4$より

$2^x = 2^4$

よって　$x = 4$

(2) $3^x = \frac{1}{27}$

$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$より

$3^x = 3^{-3}$

よって　$x = -3$

(3) $8^x = 4$

$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$，$4 = 2^2$より

$2^{3x} = 2^2$

よって　$3x = 2$

したがって　$x = \frac{2}{3}$