1節　集合と論証

1 集合

集合
（教科書 p.114）

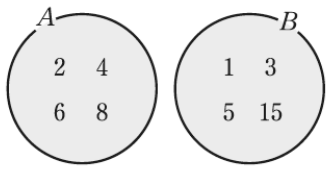
ある高校の生徒の中で

㋐ １年生の集まり
㋑ 自転車で通学している生徒の集まり
㋒ 背の高い生徒の集まり
㋓ 走るのが速い生徒の集まり

を考えると，㋐，㋑は含まれるものがはっきりしている。このように，含まれるものがはっきり定まるものの集まりを（[1]　　　　　）という。

集合をつくっている個々のものを，その集合の（[2]　　　　　）という。

例1 1 桁の正の偶数の集合を A，15 の正の約数の集合を B とすると



$A =$

$B =$

と書き表される。

問1 次の集合を，要素を書き並べて表しなさい。

(1) 1 以上 20 以下の 3 の倍数の集合 A

(2) 16 の正の約数の集合 B

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に（[3]　　　　　）といい，（[4]　　　　　）で表す。

部分集合
（教科書 p.115）

集合 A のすべての要素が集合 B の要素になっているとき，A は B の（[5]　　　　　）であるといい，（[6]　　　　　）で表す。

このとき，A は B に含まれる，または，B は A を含むという。

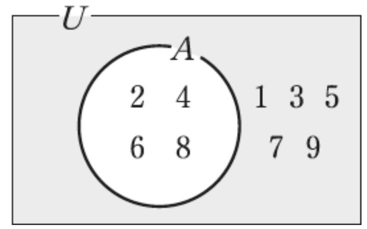
問2 次の集合のうち，$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ の部分集合であるものを選び，記号 $\subset$ を用いて表しなさい。

$B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$C = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$D = \{1,\ 3,\ 7\}$

全体集合と補集合
（教科書 p.115）

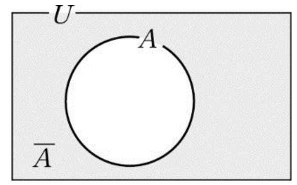
例2 集合 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の要素のうち，U の部分集合 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ の要素でないものの集合は，次のようになる。

$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$



例２の集合 U のように，あらかじめ考えているもの全体の集合を（[7]　　　　　）という。

全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素であって A の要素でないものの集合を A の（[8]　　　　　）といい，$\overline{A}$ で表す。



例２では，$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ である。

問3 全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ とするとき，部分集合 $A = \{3,\ 6,\ 9\}$ の補集合 $\overline{A}$ を，要素を書き並べて表しなさい。

共通部分と和集合 (教科書 p.116)

2 つの集合 A，B のどちらにも含まれる要素全体の集合を，A と B の（[9] ）といい，（[10] ）で表す。

2 つの集合 A，B の要素をすべて集めた集合を，A と B の（[11] ）といい（[12] ）で表す。

例3 集合 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ について

$A\cap B=$

$A\cup B=$

問4 次の集合 A，B について，$A\cap B$，$A\cup B$ を求めなさい。

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2) $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{4,\ 5\}$ については，A と B のどちらにも含まれる要素はない。要素を 1 つも含まない集合を（[13] ）といい，（[14] ）で表す。

2 命題と集合

命題と真偽
（教科書 p.117）

正しいか正しくないかが決まる文や式を（[1]　　　　）という。命題が正しいとき，その命題は（[2]　　　　）であるといい，正しくないとき，（[3]　　　　）であるという。

例4 (1) 「三角形の内角の和は $180°$ である」は命題であり，（　　　　）である。

(2) 「$2 \times (-3) = 6$」は命題であり，（　　　　）である。

(3) 「$3^2 + 4^2 = 5^2$」は命題であり，（　　　　）である。

(4) 「5 は偶数である」は命題であり，（　　　　）である。

問5 次の命題の真偽を調べなさい。

(1) 9 の正の約数は 1，3，9 である。

(2) $5^2 + 12^2 = 13^2$

(3) 8 は奇数である。

(4) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

変数を含む文や式で，その変数に値を代入したときに，初めて真偽が決まる文や式を（[4]　　　　）という。

命題「$p \Rightarrow q$」
（教科書 p.118）

p，q を条件として，「p ならば q である」の形で述べられる命題を，記号を使って「（[5]　　　　）」で表す。

ある命題「$p \Rightarrow q$」が偽であることを示すには「p であるのに q でない」という例を 1 つあげればよい。このような例を，その命題に対する（[6]　　　　）という。

例5 (1) 命題「$5x = -15 \Rightarrow x = -3$」は　　　である。

(2) 命題「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」は　　　である。

(3) 命題「$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$」は，$x = -2$ という反例があるから　　　である。

問6 次の命題の真偽を調べ，偽である場合には反例をあげなさい。

(1) $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

(2) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

(3) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

条件 p に対して，「p でない」という条件を p の（[7]　　　　）といい，$\overline{p}$ で表す。

例6 (1) 条件「自然数 n は偶数である」の否定は「自然数 n は偶数でない」，すなわち，「　　　　」である。

(2) 条件「$x > 2$」の否定は「$x > 2$ でない」，すなわち，「　　　　」である。

問7 次の条件の否定を述べなさい。

(1) 自然数 n は奇数である。

(2) $x \leqq 3$

必要条件と十分条件
（教科書 p.119）

命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき

p は q であるための（[8]　　　　）である

q は p であるための（[9]　　　　）である

という。

例7 命題「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」は真であるから

$x = 2$ は $x^2 = 4$ であるための（　　　　）である。

$x^2 = 4$ は $x = 2$ であるための（　　　　）である。

問8 次の $\boxed{}$ に，「十分」，「必要」のいずれかあてはまるものを答えなさい。

(1) $x = 3$ は $x^2 = 9$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(2) $x^2 = 1$ は $x = -1$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

命題「$p \Rightarrow q$」と命題「$q \Rightarrow p$」がともに真であるとき

p は q であるための（[10]　　　　）である

という。このとき，q は p であるための必要十分条件でもある。このことを，「（[11]　　　　）」と表す。

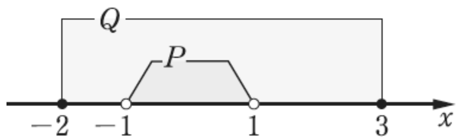
例8 命題「$x=0 \Rightarrow x^2=0$」と「$x^2=0 \Rightarrow x=0$」は，両方とも真である。
したがって
$x=0$ は $x^2=0$ であるための必要十分条件である。

問9 次の p，q について，p が q であるための必要十分条件になっているものはどれか答えなさい。
① $p : x=6$,　　$q : 5x=30$
② $p : x=1$,　　$q : x^2=1$

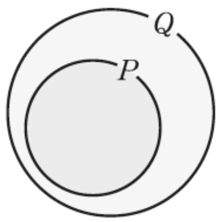
命題と集合

（教科書 p.120）

$-1<x<1$ を満たす x の集合 P と，$-2 \leqq x \leqq 3$ を満たす x の集合 Q は，それぞれ右の図のように数直線上に表すことができる。



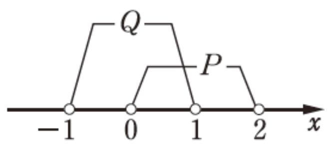
このとき，命題「$-1<x<1 \Rightarrow -2 \leqq x \leqq 3$」は真であり，集合 P，Q については $P \subset Q$ となっている。



一般に，p を満たすものの集合を P，q を満たすものの集合を Q とすると，**命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，$P \subset Q$ となること**と同じである。

このことを利用して，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を調べることができる。

例9 命題「$0<x<2 \Rightarrow -1<x<1$」について
$0<x<2$ を満たす x の集合を P
$-1<x<1$ を満たす x の集合を Q
とすると，右の図のように $P \subset Q$ ではないから

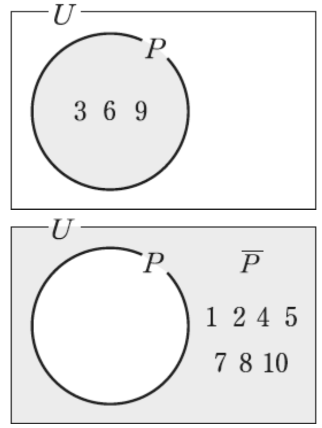


問10 集合を考えて，次の命題の真偽を調べなさい。
(1) $-2<x<1 \Rightarrow -3 \leqq x \leqq 2$

(2) $-1<x<2 \Rightarrow 0<x<3$

n を 1 から 10 までの自然数とするとき，「n は 3 の倍数である」を満たすものの集合 P と，その否定「n は 3 の倍数でない」を満たすものの集合 $\overline{p}$ を図示すると，右のようになる。

このように，p を満たすものの集合を P とすると，$\overline{p}$ を満たすものの集合は，P の補集合 $\overline{P}$ である。



3 命題と証明

逆と対偶

（教科書p.121）

命題「$p \Rightarrow q$」に対して，「$q \Rightarrow p$」をもとの命題の（1　　　　　）という。

命題「$x > 5 \Rightarrow x > 2$」は真であるが，その逆は「$x > 2 \Rightarrow x > 5$」となり，偽である。

この例から，もとの命題が真であっても，その逆は真とはかぎらないことがわかる。

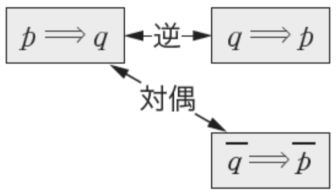
問 11 次の命題の逆をつくり，その真偽を調べなさい。

（1）n が自然数のとき

n は 4 の倍数 $\Rightarrow$ n は 2 の倍数

（2）$x = 3 \Rightarrow 4x - 12 = 0$

命題「$p \Rightarrow q$」に対して，「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」をもとの命題の（2　　　　　）という。



例 10 命題「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」の対偶は，「$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$」である。

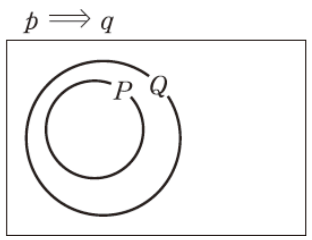
問 12 n が自然数のとき，命題

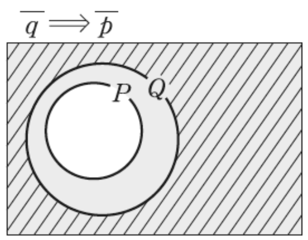
「n は 6 の倍数 $\Rightarrow$ n は 3 の倍数」

の対偶をつくりなさい。

条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q とすると，命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，$P \subset Q$ となることと同じである。このとき，右の図より，$\overline{Q} \subset \overline{P}$ となるから，命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も真である。

命題が真ならば，その対偶も真である。また，対偶が真ならば，もとの命題も真である。





$\overline{P}$（着色部分）　$\overline{Q}$（斜線部分）

対偶を利用した証明

（教科書 p.122）

命題「$p \Rightarrow q$」が真であることを証明するには，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」が真であることを証明してもよい。

例題 1 n が自然数のとき，次の命題を証明しなさい。

命題「n^2 は奇数 $\Rightarrow$ n は奇数」

解 与えられた命題の対偶

「n は偶数 $\Rightarrow$ n^2 は偶数」

が真であることを証明する。

n を正の偶数とすると，m を自然数として

$n =$

と表すことができる。よって

$n^2 =$

$2m^2$ は自然数であるから，n^2 は偶数である。よって

「n は偶数 $\Rightarrow$ n^2 は偶数」

は（　　　　　）である。

したがって，対偶が（　　　　　）であることが証明されたので，

もとの命題　「n^2 は奇数 $\Rightarrow$ n は奇数」

も（　　　　　）である。

問 13 n が自然数のとき，命題

「n^2 は偶数 ⇒ n は偶数」

が真であることを証明する。次の問に答えなさい。

(1) この命題の対偶をつくりなさい。

(2) (1)でつくった対偶を利用して，もとの命題が真であることを証明しなさい。

対偶を利用した証明のほかに次のような証明の方法がある。

ある命題を証明するとき，「その命題が偽であると仮定したら矛盾が生じる。したがって，その仮定は誤りであり，命題は真である」という論法である。この論法を（3　　　　　　）という。

チャレンジ　背理法を用いた証明　（教科書 p.123）

例題 1 $1+\sqrt{2}$ が無理数であることを，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，背理法で証明しなさい。

解 $1+\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定する。

このとき，$1+\sqrt{2}$ は（　　　　　　）である。

$a=1+\sqrt{2}$

として，この式を変形すると

$\sqrt{2}=a-1$

となる。ここで，a，1 はともに（　　　　　　）であるから，

$a-1$ も（　　　　　　）である。よって，$\sqrt{2}$ も（　　　　　　）となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって

$1+\sqrt{2}$ は無理数ではない

とした仮定が誤りであり

$1+\sqrt{2}$ は無理数である

ことが証明された。

問1 $2+3\sqrt{2}$ が無理数であることを，$\sqrt{2}$ が無理数であること用いて，背理法で証明しなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.124）

1 次の集合を，要素を書き並べて表しなさい。

(1) 24 の正の約数の集合 A

(2) 1 以上 50 以下の 7 の倍数の集合 B

2 次の集合のうち，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12\}$ の部分集合であるものを選び，記号 $\subset$ を用いて表しなさい。

$B=\{1,\ 4,\ 6\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$D=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

3 全体集合を $U=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ とするとき，部分集合 $A=\{5,\ 8,\ 11\}$ の補集合 $\overline{A}$ を，要素を書き並べて表しなさい。

4 2 つの集合

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

について，次の問に答えなさい。

(1) $A\cap B$ を求めなさい。

(2) $A\cup B$ を求めなさい。

5 次の $\boxed{}$ に，「十分」，「必要」，「必要十分」のいずれかあてはまるものを答えなさい。

(1) $x=y$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

命題「$x=y\Rightarrow x^2=y^2$」は真であるが，命題「$x^2=y^2\Rightarrow x=y$」は $x=-y$ という反例があり偽であるから，$x=y$ は $x^2=y^2$ であるための十分条件である。

(2) 三角形で，3 つの内角の大きさが等しいことは，正三角形であるための $\boxed{}$ 条件である。

命題「3 つの内角の大きさが等しい三角形は，正三角形である」と「正三角形は，3 つの内角の大きさが等しい」は，両方とも真であるから，三角形で，3 つの内角の大きさが等しいことは，正三角形であるための必要十分条件である。

(3) 自然数 n が偶数であることは，$n=4$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

n が自然数のとき，命題「$n=4\Rightarrow n$ は偶数」は真であるが，命題「n は偶数 $\Rightarrow n=4$」は偽であるから，自然数 n が偶数であることは，$n=4$ であるための必要条件である。

6 n が自然数のとき，命題

「n は偶数 $\Rightarrow n+1$ は奇数」

の逆，対偶をつくりなさい。

1節 集合と論証

1 集合

集合

（教科書 p.114）

ある高校の生徒の中で

㋐ 1 年生の集まり

㋑ 自転車で通学している生徒の集まり

㋒ 背の高い生徒の集まり

㋓ 走るのが速い生徒の集まり

を考えると，㋐，㋑は含まれるものがはっきりしている。このように，含まれるものがはっきり定まるものの集まりを（[1] 集合 ）という。

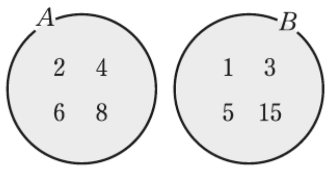
集合をつくっている個々のものを，その集合の（[2] 要素 ）という。

例1 1 桁の正の偶数の集合を A，15 の正の約数の集合を B とすると

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

と書き表される。



問1 次の集合を，要素を書き並べて表しなさい。

(1) 1 以上 20 以下の 3 の倍数の集合 A

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

(2) 16 の正の約数の集合 B

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に（[3] 属する ）といい，（[4] $a\in A$ ）で表す。

部分集合

（教科書 p.115）

集合 A のすべての要素が集合 B の要素になっているとき，A は B の（[5] 部分集合 ）であるといい，（[6] $A\subset B$ ）で表す。

このとき，A は B に含まれる，または，B は A を含むという。

問2 次の集合のうち，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ の部分集合であるものを選び，記号 $\subset$ を用いて表しなさい。

$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$D=\{1,\ 3,\ 7\}$

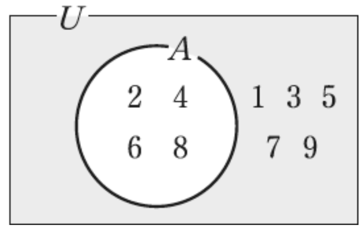
$B\subset A$　　$D\subset A$

全体集合と補集合

（教科書 p.115）

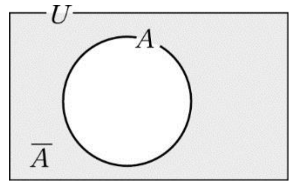
例2 集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の要素のうち，U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ の要素でないものの集合は，次のようになる。

$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$



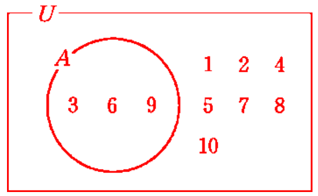
例２の集合 U のように，あらかじめ考えているもの全体の集合を（[7] 全体集合 ）という。

全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素であって A の要素でないものの集合を A の（[8] 補集合 ）といい，$\overline{A}$ で表す。



例２では，$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ である。

問3 全体集合を $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ とするとき，部分集合 $A=\{3,\ 6,\ 9\}$ の補集合 $\overline{A}$ を，要素を書き並べて表しなさい。



$\overline{A}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$

共通部分と和集合
（教科書 p.116）

2 つの集合 A，B のどちらにも含まれる要素全体の集合を，A と B の（[9] 共通部分 ）といい，（[10] $A \cap B$ ）で表す。

2 つの集合 A，B の要素をすべて集めた集合を，A と B の（[11] 和集合 ）といい（[12] $A \cup B$ ）で表す。

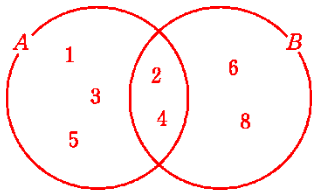
例3 集合 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ について

$A \cap B=\{3,\ 5\}$

$A \cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

問4 次の集合 A，B について，$A \cap B$，$A \cup B$ を求めなさい。

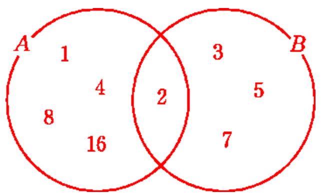
(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$



$A \cap B=\{2,\ 4\}$

$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

(2) $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$



$A \cap B=\{2\}$

$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 16\}$

集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{4,\ 5\}$ については，A と B のどちらにも含まれる要素はない。要素を 1 つも含まない集合を（[13] 空集合 ）といい，（[14] $\emptyset$ ）で表す。

2 命題と集合

命題と真偽

（教科書 p.117）

正しいか正しくないかが決まる文や式を（[1] 命題 ）という。命題が正しいとき，その命題は（[2] 真 ）であるといい，正しくないとき，（[3] 偽 ）であるという。

例4 (1) 「三角形の内角の和は 180° である」は命題であり，（ 真 ）である。

(2) 「$2\times(-3)=6$」は命題であり，（ 偽 ）である。

(3) 「$3^2+4^2=5^2$」は命題であり，（ 真 ）である。

(4) 「5 は偶数である」は命題であり，（ 偽 ）である。

問5 次の命題の真偽を調べなさい。

(1) 9 の正の約数は 1，3，9 である。 真

(2) $5^2+12^2=13^2$ 真

(3) 8 は奇数である。 偽

(4) $\sqrt{(-3)^2}=-3$ 偽

変数を含む文や式で，その変数に値を代入したときに，初めて真偽が決まる文や式を（[4] 条件 ）という。

命題「$p\Rightarrow q$」

（教科書 p.118）

p，q を条件として，「p ならば q である」の形で述べられる命題を，記号を使って「（[5] $p\Rightarrow q$ ）」で表す。

ある命題「$p\Rightarrow q$」が偽であることを示すには「p であるのに q でない」という例を 1 つあげればよい。このような例を，その命題に対する（[6] 反例 ）という。

例5 (1) 命題「$5x=-15\Rightarrow x=-3$」は 真 である。

(2) 命題「$x=2\Rightarrow x^2=4$」は 真 である。

(3) 命題「$x^2=4\Rightarrow x=2$」は，$x=-2$ という反例があるから 偽 である。

問6 次の命題の真偽を調べ，偽である場合には反例をあげなさい。

(1) $3x=6\Rightarrow x=2$ 真

(2) $x=1\Rightarrow x^2=1$ 真

(3) $x^2=9\Rightarrow x=3$ 偽，反例 $x=-3$

条件 p に対して，「p でない」という条件を p の（[7] 否定 ）といい，$\overline{p}$ で表す。

例6 (1) 条件「自然数 n は偶数である」の否定は「自然数 n は偶数でない」，すなわち，「 自然数 n は奇数である 」である。

(2) 条件「$x>2$」の否定は「$x>2$ でない」，すなわち，「 $x\leqq 2$ 」である。

問7 次の条件の否定を述べなさい。

(1) 自然数 n は奇数である。

条件「自然数 n は奇数である。」の否定は「自然数 n は奇数でない。」，すなわち，「自然数 n は偶数である。」である。

(2) $x\leqq 3$

条件「$x\leqq 3$」の否定は「$x\leqq 3$ でない」，すなわち，「$x>3$」である。

必要条件と十分条件

（教科書 p.119）

命題「$p\Rightarrow q$」が真であるとき

p は q であるための（[8] 十分条件 ）である

q は p であるための（[9] 必要条件 ）である

という。

例7 命題「$x=2\Rightarrow x^2=4$」は真であるから

$x=2$ は $x^2=4$ であるための（ 十分条件 ）である。

$x^2=4$ は $x=2$ であるための（ 必要条件 ）である。

問8 次の$\boxed{}$に，「十分」，「必要」のいずれかあてはまるものを答えなさい。

(1) $x=3$ は $x^2=9$ であるための$\boxed{\text{十分}}$条件である。

(2) $x^2=1$ は $x=-1$ であるための$\boxed{\text{必要}}$条件である。

命題「$p\Rightarrow q$」と命題「$q\Rightarrow p$」がともに真であるとき

p は q であるための（[10] 必要十分条件 ）である

という。このとき，q は p であるための必要十分条件でもある。このことを，「（[11] $p\Leftrightarrow q$ ）」と表す。

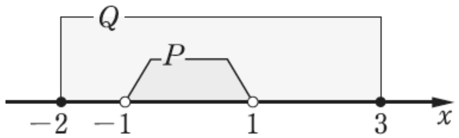
例8 命題「$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$」と「$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$」は，両方とも真である。
したがって
$x = 0$ は $x^2 = 0$ であるための必要十分条件である。

問9 次の p，q について，p が q であるための必要十分条件になっているものはどれか答えなさい。
① $p : x = 6$，　$q : 5x = 30$
② $p : x = 1$，　$q : x^2 = 1$
①は，命題「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」は，両方とも真である。
②は，命題「$p \Rightarrow q$」は真であるが，命題「$q \Rightarrow p$」は $x = -1$ という反例があるから偽である。
したがって，p が q であるための必要十分条件になっているものは　①

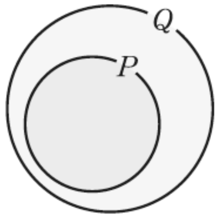
命題と集合

（教科書 p.120）

$-1 < x < 1$ を満たす x の集合 P と，$-2 \leqq x \leqq 3$ を満たす x の集合 Q は，それぞれ右の図のように数直線上に表すことができる。



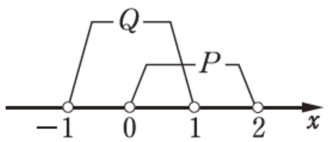
このとき，命題「$-1 < x < 1 \Rightarrow -2 \leqq x \leqq 3$」は真であり，集合 P，Q については $P \subset Q$ となっている。



一般に，p を満たすものの集合を P，q を満たすものの集合を Q とすると，**命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，$P \subset Q$ となること**と同じである。

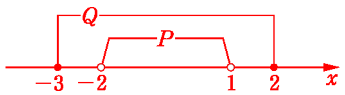
このことを利用して，命題「$p \Rightarrow q$」の真偽を調べることができる。

例9 命題「$0 < x < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$」について
$0 < x < 2$ を満たす x の集合を P
$-1 < x < 1$ を満たす x の集合を Q
とすると，右の図のように $P \subset Q$ ではないから
命題「$0 < x < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$」は偽である。

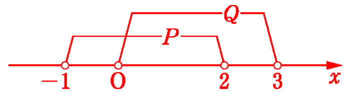


問 10 集合を考えて，次の命題の真偽を調べなさい。

(1) $-2 < x < 1 \Rightarrow -3 \leqq x \leqq 2$
$-2 < x < 1$ を満たす x の集合を P
$-3 \leqq x \leqq 2$ を満たす x の集合を Q
とすると，次の図のように $P \subset Q$ であるから，命題「$-2 < x < 1 \Rightarrow -3 \leqq x \leqq 2$」は真である。

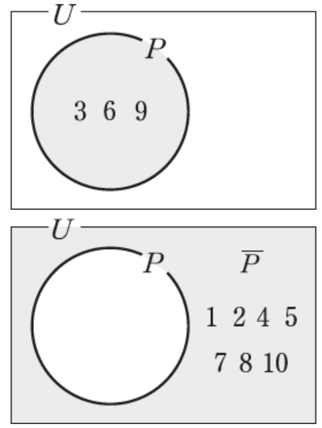


(2) $-1 < x < 2 \Rightarrow 0 < x < 3$
$-1 < x < 2$ を満たす x の集合を P
$0 < x < 3$ を満たす x の集合を Q
とすると，次の図のように $P \subset Q$ ではないから，命題「$-1 < x < 2 \Rightarrow 0 < x < 3$」は偽である。



n を 1 から 10 までの自然数とするとき，「n は 3 の倍数である」を満たすものの集合 P と，その否定「n は 3 の倍数でない」を満たすものの集合 $\overline{P}$ を図示すると，右のようになる。

このように，p を満たすものの集合を P とすると，$\overline{p}$ を満たすものの集合は，P の補集合 $\overline{P}$ である。



3 命題と証明

逆と対偶

（教科書p.121）

命題「$p \Rightarrow q$」に対して，「$q \Rightarrow p$」をもとの命題の（[1] 逆 ）という。

命題「$x > 5 \Rightarrow x > 2$」は真であるが，その逆は「$x > 2 \Rightarrow x > 5$」となり，偽である。

この例から，もとの命題が真であっても，その逆は真とはかぎらないことがわかる。

問 11 次の命題の逆をつくり，その真偽を調べなさい。

（1） n が自然数のとき

n は 4 の倍数 ⇒ n は 2 の倍数

n が自然数のとき n は 2 の倍数 ⇒ n は 4 の倍数

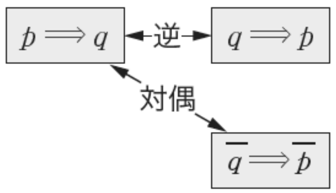
偽

（2） $x = 3 \Rightarrow 4x - 12 = 0$

$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$

真

命題「$p \Rightarrow q$」に対して，「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」をもとの命題の（[2] 対偶 ）という。



例 10 命題「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」の対偶は，「$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$」である。

問 12 n が自然数のとき，命題

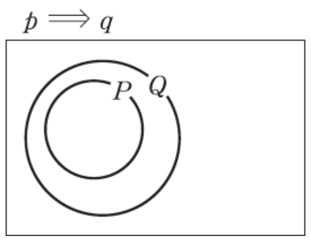
「n は 6 の倍数 ⇒ n は 3 の倍数」

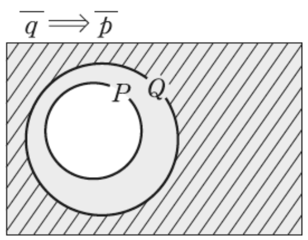
の対偶をつくりなさい。

n は 3 の倍数でない ⇒ n は 6 の倍数でない

条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q とすると，命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，$P \subset Q$ となることと同じである。このとき，右の図より，$\overline{Q} \subset \overline{P}$ となるから，命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も真である。

命題が真ならば，その対偶も真である。また，対偶が真ならば，もとの命題も真である。





$\overline{P}$（着色部分） $\overline{Q}$（斜線部分）

対偶を利用した証明

（教科書 p.122）

命題「$p \Rightarrow q$」が真であることを証明するには，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」が真であることを証明してもよい。

例題 1 n が自然数のとき，次の命題を証明しなさい。

命題「n^2 は奇数 ⇒ n は奇数」

解 与えられた命題の対偶

「n は偶数 ⇒ n^2 は偶数」

が真であることを証明する。

n を正の偶数とすると，m を自然数として

$n = 2m$

と表すことができる。よって

$n^2 = (2m)^2 = 2 \times 2m^2$

$2m^2$ は自然数であるから，n^2 は偶数である。よって

「n は偶数 ⇒ n^2 は偶数」

は（ 真 ）である。

したがって，対偶が（ 真 ）であることが証明されたので，

もとの命題 「n^2 は奇数 ⇒ n は奇数」

も（ 真 ）である。

問 13 n が自然数のとき，命題

「n^2 は偶数 ⇒ n は偶数」

が真であることを証明する。次の問に答えなさい。

(1) この命題の対偶をつくりなさい。

n は奇数 ⇒ n^2 は奇数

(2) (1)でつくった対偶を利用して，もとの命題が真であることを証明しなさい。

与えられた命題の対偶が真であることを証明する。

n を正の奇数とすると，m を自然数として

$n = 2m - 1$

と表すことができる。よって

$$n^2 = (2m-1)^2$$
$$= 4m^2 - 4m + 1$$
$$= 2(2m^2 - 2m) + 1$$

$2m^2 - 2m$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

よって

n は奇数 ⇒ n^2 は奇数

は真である。

したがって，対偶が真であることが証明されたので，もとの命題

n^2 は偶数 ⇒ n は偶数

も真である。

対偶を利用した証明のほかに次のような証明の方法がある。

ある命題を証明するとき，「その命題が偽であると仮定したら矛盾が生じる。したがって，その仮定は誤りであり，命題は真である」という論法である。この論法を（[3]　背理法　）という。

チャレンジ　背理法を用いた証明　（教科書 p.123）

例題 1 $1+\sqrt{2}$ が無理数であることを，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，背理法で証明しなさい。

解 $1+\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定する。

このとき，$1+\sqrt{2}$ は（　有理数　）である。

$a = 1+\sqrt{2}$

として，この式を変形すると

$\sqrt{2} = a - 1$

となる。ここで，a，1 はともに（　有理数　）であるから，

$a-1$ も（　有理数　）である。よって，$\sqrt{2}$ も（　有理数　）となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって

$1+\sqrt{2}$ は無理数ではない

とした仮定が誤りであり

$1+\sqrt{2}$ は無理数である

ことが証明された。

問1 $2+3\sqrt{2}$ が無理数であることを，$\sqrt{2}$ が無理数であること用いて，背理法で証明しなさい。

$2+3\sqrt{2}$ が無理数ではないと仮定する。

このとき，$2+3\sqrt{2}$ は有理数である。

$a = 2+3\sqrt{2}$

として，この式を変形すると

$\sqrt{2} = \frac{a-2}{3}$

となる。ここで，a，2，3 は有理数であるから，$\frac{a-2}{3}$ も有理数である。よって，$\sqrt{2}$ も有理数となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって

$2+3\sqrt{2}$ は無理数ではない

とした仮定が誤りであり

$2+3\sqrt{2}$ は無理数である

ことが証明された。

復 習 問 題

（教科書 p.124）

1 次の集合を，要素を書き並べて表しなさい。

(1) 24 の正の約数の集合 A

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

(2) 1 以上 50 以下の 7 の倍数の集合 B

$B=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49\}$

2 次の集合のうち，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12\}$ の部分集合であるものを選び，記号 $\subset$ を用いて表しなさい。

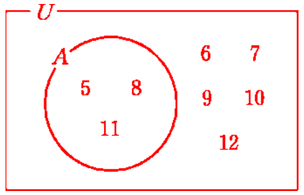
$B=\{1,\ 4,\ 6\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$D=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

$B\subset A$　　$D\subset A$

3 全体集合を $U=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ とするとき，部分集合 $A=\{5,\ 8,\ 11\}$ の補集合 $\overline{A}$ を，要素を書き並べて表しなさい。



$\overline{A}=\{6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12\}$

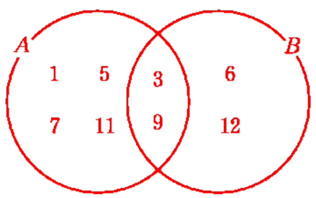
4 2 つの集合

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

について，次の問に答えなさい。

(1) $A\cap B$ を求めなさい。



$A\cap B=\{3,\ 9\}$

(2) $A\cup B$ を求めなさい。

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12\}$

5 次の□に，「十分」，「必要」，「必要十分」のいずれかあてはまるものを答えなさい。

(1) $x=y$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{\text{十分}}$ 条件である。

命題「$x=y\Rightarrow x^2=y^2$」は真であるが，命題「$x^2=y^2\Rightarrow x=y$」は $x=-y$ という反例があり偽であるから，$x=y$ は $x^2=y^2$ であるための十分条件である。

(2) 三角形で，3 つの内角の大きさが等しいことは，正三角形であるための $\boxed{\text{必要十分}}$ 条件である。

命題「3 つの内角の大きさが等しい三角形は，正三角形である」と「正三角形は，3 つの内角の大きさが等しい」は，両方とも真であるから，三角形で，3 つの内角の大きさが等しいことは，正三角形であるための必要十分条件である。

(3) 自然数 n が偶数であることは，$n=4$ であるための $\boxed{\text{必要}}$ 条件である。

n が自然数のとき，命題「$n=4\Rightarrow n$ は偶数」は真であるが，命題「n は偶数 $\Rightarrow n=4$」は偽であるから，自然数 n が偶数であることは，$n=4$ であるための必要条件である。

6 n が自然数のとき，命題

「n は偶数 $\Rightarrow n+1$ は奇数」

の逆，対偶をつくりなさい。

逆　$n+1$ は奇数 $\Rightarrow n$ は偶数

対偶　$n+1$ は偶数 $\Rightarrow n$ は奇数