2節 三角比の応用

1 三角形の面積

（教科書 p.99）

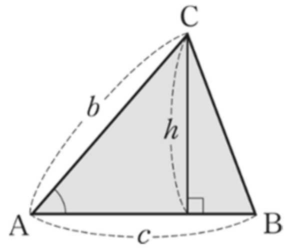
右の図の $\triangle$ ABC で，面積を S，高さを h とすると

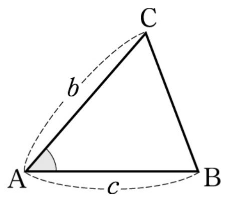
$S=\frac{1}{2}ch$

ここで，$h=b\sin A$ であるから

$S=\frac{1}{2}c\times h=\frac{1}{2}c\times b\sin A$

$=\frac{1}{2}bc\sin A$



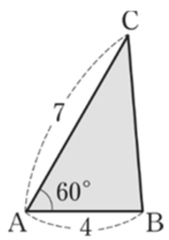
三角形の面積
$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A}$ 

ほかの 2 辺とその間の角からも同様の公式が得られる。

$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ca\sin B}$，$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab\sin C}$

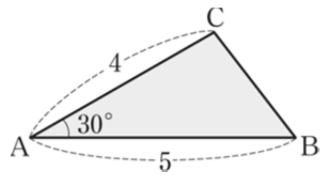
例1 $\triangle$ ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=60°$ のとき，
この三角形の面積 S は

$S=$

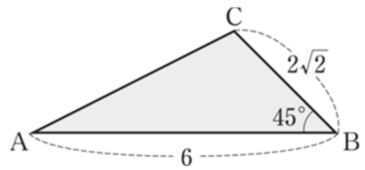


問1 次の $\triangle$ ABC の面積を求めなさい。

(1) $b=4$，$c=5$，$A=30°$



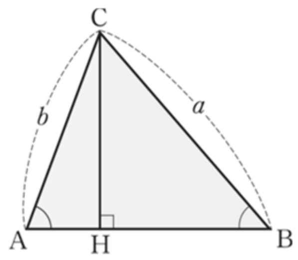
(2) $a=2\sqrt{2}$，$c=6$，$B=45°$



2 正弦定理

（教科書 p.100）

△ABC で，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引くと



△AHC で

$\mathrm{CH} = b\sin A$

△BHC で

$\mathrm{CH} = a\sin B$

であるから

$b\sin A = a\sin B$

が成り立つことがわかる。この両辺を，$\sin A \times \sin B$ でわると

$\dfrac{b\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A}\times\sin B} = \dfrac{a\cancel{\sin B}}{\sin A\times\cancel{\sin B}}$

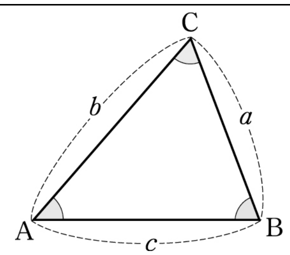
$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$

となる。

同様にして，次の式も成り立つことがわかる。

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$，$\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$

よって，次の関係式が得られる。これを（[1]　　　　　　　　）という。

> **正弦定理**
>
> △ABC で
>
> $\boldsymbol{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}}$
>
> 
>

例題 1 △ABC で，$A = 60°$，$B = 45°$，$b = 4$ のとき，a の値を求めなさい。

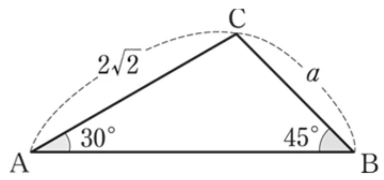
解 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

よって

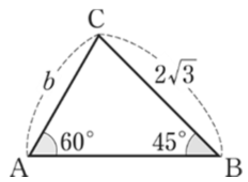
$a =$

問2 次の△ABC で，a，b の値を求めなさい。

(1)



(2)



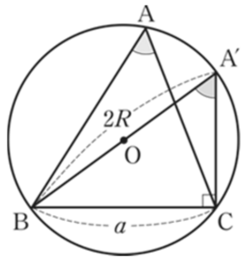
外接円との関係

（教科書 p.101）

$\triangle$ ABC の 3 つの頂点を通る円を $\triangle$ ABC の（[2]　　　　　　　　）という。

外接円の半径 R をとすると，次の関係があることが知られている。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

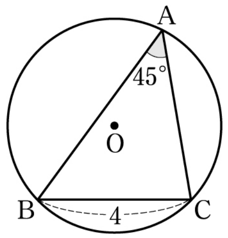


例2 $\triangle$ ABC で，$A=45°$，$a=4$ のとき，この三角形の外接円の半径を R とすると

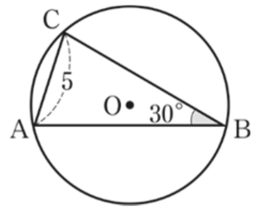
$$\frac{4}{\sin 45°}=2R$$

よって　$2R=$

したがって　$R=$



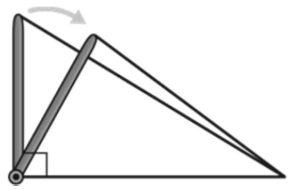
問3 $\triangle$ ABC で，$B=30°$，$b=5$ のとき，この三角形の外接円の半径を求めなさい。



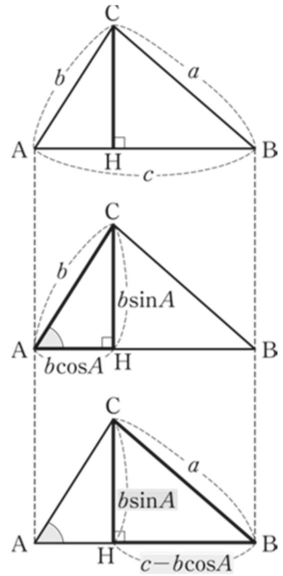
3 余弦定理

（教科書 p.102）

　直角三角形では，3 辺の長さの間には三平方の定理が成り立つ。では，直角三角形でない三角形の 3 辺の長さの間には，どのような関係式が成り立つだろうか。



　右下の図のような三角形 ABC において，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引く。



　直角三角形 CHB で，三平方の定理を用いると

$$a^2 = CH^2 + BH^2 \quad \cdots\cdots①$$

　また，直角三角形 AHC で

$$CH = b\sin A \quad \cdots\cdots②$$

さらに，$AH = b\cos A$ であるから

$$BH = AB - AH = c - b\cos A \quad \cdots\cdots③$$

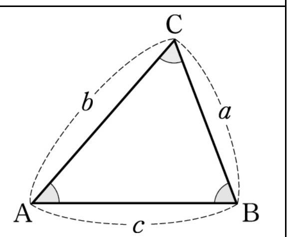
①，②，③より

$$\begin{aligned} a^2 &= CH^2 + BH^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

　同様にして，次の 3 つの関係式が得られる。

　これらをまとめて（[1]　　　　　　　　　　）という。

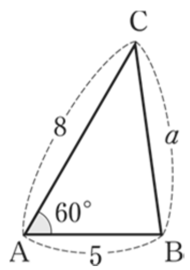
余弦定理
△ABC で $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$ $\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$ $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$



例題 2 △ABC で，$b = 8$，$c = 5$，$A = 60°$ のとき，a の値を求めなさい。

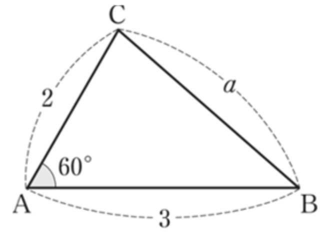
解 余弦定理により

$a^2 =$

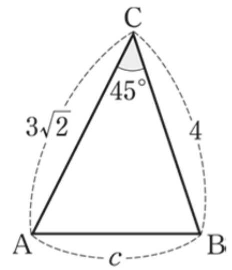


問4 次の △ABC で，a，c の値を求めなさい。

(1)



(2)



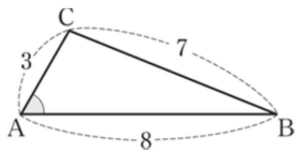
3 辺から内角を求める　（教科書 p.103）

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を変形すると，$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ となるから

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

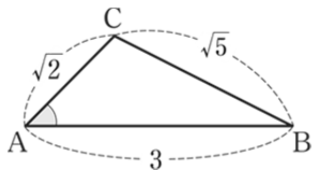
が成り立つ。この式を用いると，a，b，c の値から $\cos A$ の値がわかり，∠A の大きさを求めることができる。

例3 △ABC で，$a = 7$，$b = 3$，$c = 8$ のとき



$\cos A =$

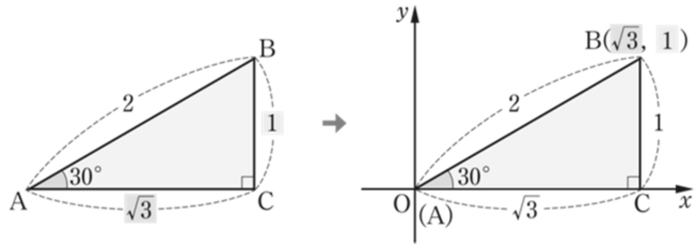
問5 △ABC で，$a = \sqrt{5}$，$b = \sqrt{2}$，$c = 3$ のとき，∠A の大きさを求めなさい。



4 三角比と座標

（教科書 p.104）

左下の図の直角三角形に対し，右下の図のように座標軸を定めると，点 B の座標は $(\sqrt{3},\ 1)$ となる。



このとき，座標を使うと

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

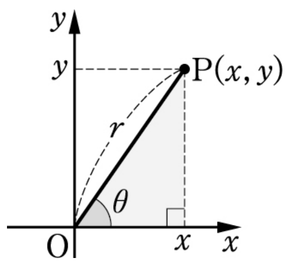
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

とみることができる。

そこで，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲にある角 θ に対して，右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角が θ で，長さが r の線分 OP を考え，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

このとき，角の三角比を次のように定める。

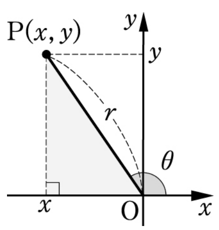


鈍角まで拡張した三角比

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



鈍角の三角比

（教科書 p.105）

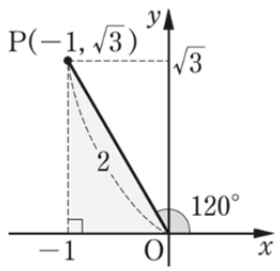
例題 3 $120°$ の三角比の値を求めなさい。

解 下の図のように，$\theta = 120°$，$\mathrm{OP} = 2$ とすると，点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ となるから，$r = 2$，$x = -1$，$y = \sqrt{3}$ である。よって

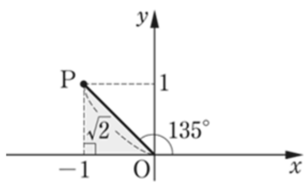
$$\sin 120° = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

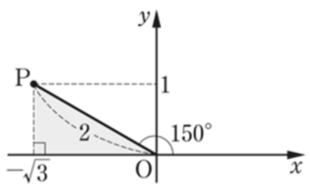
$$\cos 120° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



問6 次の図を用いて，$135°$ と $150°$ の三角比の値を求めなさい。





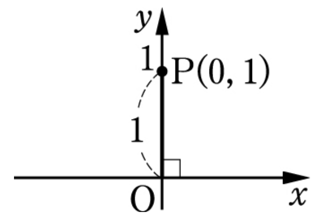
0°，90°，180° の三角比

（教科書 p.105）

$90°$ の三角比の値は，右の図のように，$\mathrm{OP} = 1$ とすると，$r = 1$，$x = 0$，$y = 1$ となるから

$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$，$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 90°$ の値はない。



いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

5 三角比の相互関係

（教科書 p.106）

θ が鈍角の場合も，次の関係式が成り立つ。

$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

例題 4 θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

解 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta =$

θ は鈍角であるから　$\cos\theta < 0$

よって　$\cos\theta =$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$\tan\theta =$

例題４は，鋭角のときと同様に，図を用いて考えてもよい。

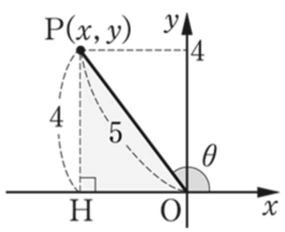
右の図の $\triangle$ OPH で，三平方の定理により

$\mathrm{OH}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\mathrm{OH} > 0$ であるから　$\mathrm{OH} = 3$

よって，点 P の x 座標は　$x = -3$

したがって　$\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\tan\theta = -\frac{4}{3}$

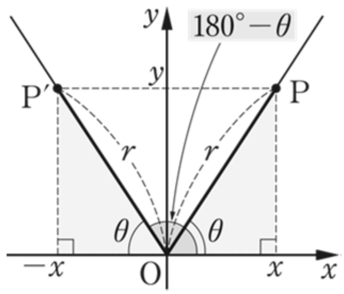


問7 θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

180° −θ の三角比

（教科書 p.107）

θ が鋭角のとき，$180° - \theta$ は鈍角となる。この 2 つの角の三角比の間に，どのような関係が成り立つか考えてみよう。



右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角がそれぞれ θ，$180° - \theta$ である半直線上に，2 点 P と P′ を

$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = r$

となるようにとると，この 2 点は y 軸に関して対称となる。よって，P の座標が $\mathrm{P}(x,\ y)$ ならば，P′ の座標は $\mathrm{P}'(-x,\ y)$ となる。

これにより，$180° - \theta$ の三角比は

$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

したがって，次の関係式が成り立つ。

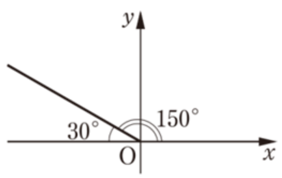
$180° - \theta$ の三角比
$\boldsymbol{\sin(180° - \theta) = \sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(180° - \theta) = -\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(180° - \theta) = -\tan\theta}$

例4 $150° = 180° - 30°$ であるから

$\sin 150° =$

$\cos 150° =$

$\tan 150° =$



問8 次の三角比を，鋭角の三角比で表しなさい。

(1) $\sin 100°$

$\sin 100° =$

(2) $\cos 130°$

$\cos 130° =$

(3) $\tan 170°$

$\tan 170° =$

6 鈍角の三角比と計量

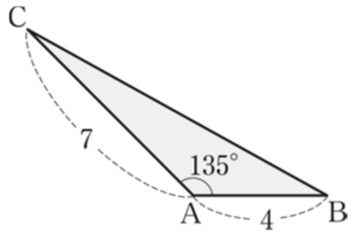
（教科書 p. 108）

角が鈍角の場合も，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理が成り立つ。

例5 △ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=135°$ のとき，

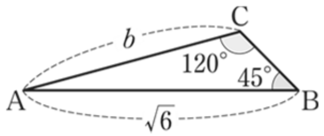
この三角形の面積 S は

$S=$



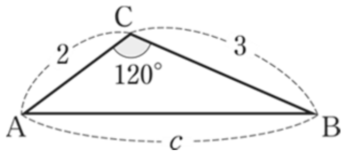
例6 (1) △ABC で，$B=45°$，$C=120°$，$c=\sqrt{6}$ のとき，b の値は，正弦定理により

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$



(2) △ABC で，$a=3$，$b=2$，$C=120°$ のとき，c の値は，余弦定理により

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



問9 次の △ABC について，それぞれの値を求めなさい。

(1) $b=\sqrt{3}$，$c=2$，$A=120°$ のときの △ABC の面積 S

(2) $B=30°$，$C=135°$，$c=2$ のときの b の値

(3) $a=1$，$b=\sqrt{3}$，$C=150°$ のときの c の値

空間図形と三角比

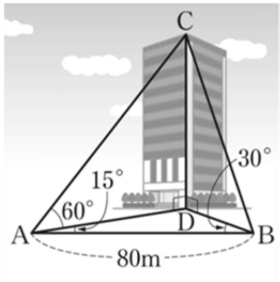
（教科書 p.109）

空間図形に含まれる三角形に着目して三角比を用いると，建物の高さなどを求めることができる。

例題 5 右の図で

$\angle\mathrm{CAD} = 60°$，$\angle\mathrm{DAB} = 15°$，$\angle\mathrm{DBA} = 30°$，$\mathrm{AB} = 80\mathrm{m}$

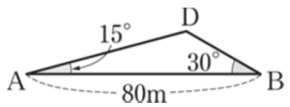
であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。



解 まず，△ABD に着目して AD を求める。

$\angle\mathrm{ADB} = 180° - (15° + 30°) = 135°$

であるから，正弦定理により

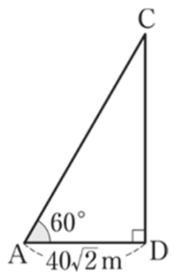


$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin 30°} =$

よって

$\mathrm{AD} =$

次に，△CAD に着目して CD を求める。



$\angle\mathrm{CAD} = 60°$，$\angle\mathrm{CDA} = 90°$

であるから

$\mathrm{CD} =$

問 10 例題５で，$\angle\mathrm{CAD} = 60°$，$\angle\mathrm{DAB} = 15°$，$\angle\mathrm{DBA} = 45°$，$\mathrm{AB} = 100\mathrm{m}$ であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。

復 習 問 題

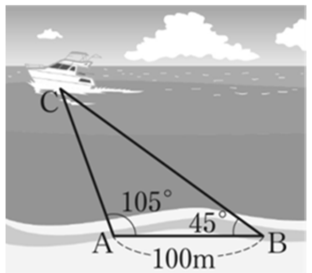
（教科書p.110）

1 次の △ABC の面積を求めなさい。

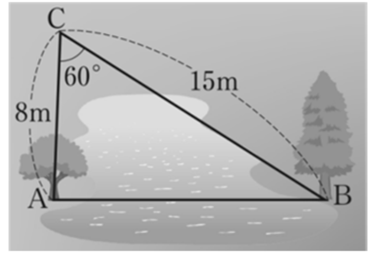
(1)　$a = 5$，$b = 12$，$C = 30°$

(2)　$b = 3$，$c = 8$，$A = 135°$

2 海岸の 100m 離れた 2 地点 A，B から船 C を見ると，$A = 105°$，$B = 45°$ であった。地点 A から船までの距離 AC を求めなさい。



3 C 地点から，池の両側に立つ木 A，B までの距離と，∠ACB を測ると，AC = 8m，BC = 15m，∠ACB = 60° であった。2 本の木の間の距離 AB を求めなさい。



4 θ が鈍角のとき，次の問に答えなさい。

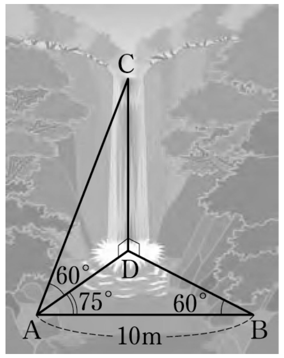
(1) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

5 右の図で，点 A，B，D は同一水平面上にあり，

$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 75°$，$\angle DBA = 60°$，$AB = 10m$

である。



(1)　∠ADB を求めなさい。

(2)　距離 AD を求めなさい。

(3)　滝の高さ CD を求めなさい。

2節 三角比の応用

1 三角形の面積

（教科書 p.99）

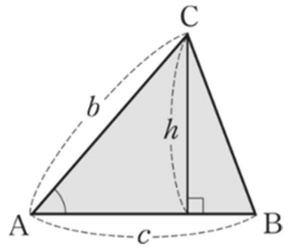
右の図の $\triangle$ ABC で，面積を S，高さを h とすると

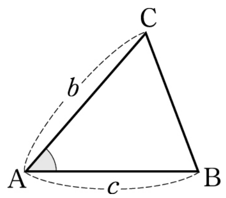
$$S=\frac{1}{2}ch$$

ここで，$h=b\sin A$ であるから

$$S=\frac{1}{2}c\times h=\frac{1}{2}c\times b\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A$$



三角形の面積
$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A}$ 

ほかの 2 辺とその間の角からも同様の公式が得られる。

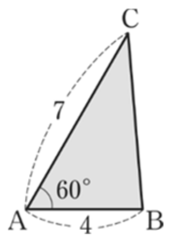
$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ca\sin B},\quad \boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

例1 $\triangle$ ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=60^\circ$ のとき，

この三角形の面積 S は

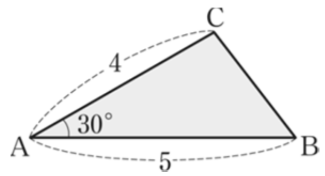
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin 60^\circ$$

$$=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$



問1 次の $\triangle$ ABC の面積を求めなさい。

(1) $b=4$，$c=5$，$A=30^\circ$



この三角形の面積 S は

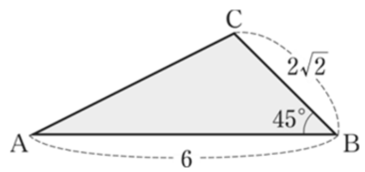
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \sin 30^\circ$$

$$=10\times\frac{1}{2}$$

$$=5$$

(2) $a=2\sqrt{2}$，$c=6$，$B=45^\circ$



この三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{2}\times \sin 45^\circ$$

$$=6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=6$$

2 正弦定理

（教科書 p.100）

$\triangle$ ABC で，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引くと

$\triangle$ AHC で

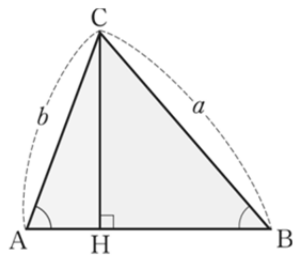
$\mathrm{CH} = b\sin A$

$\triangle$ BHC で

$\mathrm{CH} = a\sin B$

であるから

$b\sin A = a\sin B$



が成り立つことがわかる。この両辺を，$\sin A \times \sin B$ でわると

$$\frac{b\cancel{\sin A}}{\cancel{\sin A}\times\sin B} = \frac{a\cancel{\sin B}}{\sin A\times\cancel{\sin B}}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

となる。

同様にして，次の式も成り立つことがわかる。

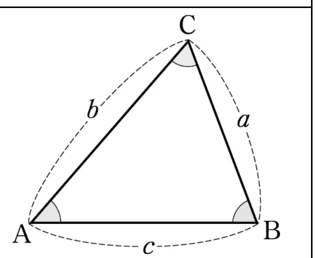
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},\quad \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

よって，次の関係式が得られる。これを（[1] 正弦定理 ）という。

正弦定理

$\triangle$ ABC で

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}$$



例題 1 $\triangle$ ABC で，$A = 60°$，$B = 45°$，$b = 4$ のとき，a の値を求めなさい。

解 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

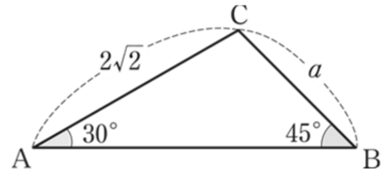
$$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{4}{\sin 45°}$$

よって

$$a = \frac{4}{\sin 45°}\times \sin 60° = 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

問2 次の $\triangle$ ABC で，a，b の値を求めなさい。

(1)



正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}$$

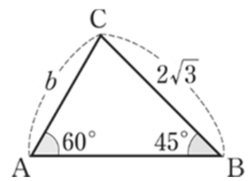
よって

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}\times \sin 30°$$

$$= 2\sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

(2)



正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 45°}$$

よって

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}\times \sin 45°$$

$$= 2\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

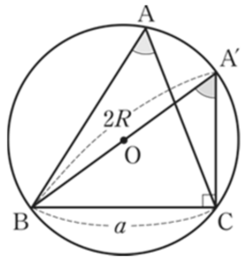
$$= 2\sqrt{2}$$

外接円との関係

（教科書 p.101）

△ABC の 3 つの頂点を通る円を △ABC の（[2] 外接円 ）という。
外接円の半径 R をとすると，次の関係があることが知られている。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

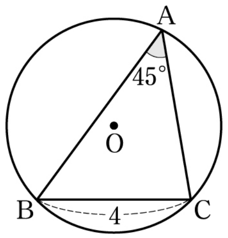


例2 △ABC で，$A = 45°$，$a = 4$ のとき，この三角形の外接円の半径を R とすると

$$\frac{4}{\sin 45°} = 2R$$

よって　$2R = 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

したがって　$R = 2\sqrt{2}$



問3 △ABC で，$B = 30°$，$b = 5$ のとき，この三角形の外接円の半径を求めなさい。

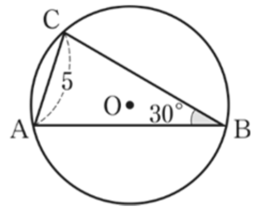
この三角形の外接円の半径を R とすると

$$\frac{5}{\sin 30°} = 2R$$

よって

$$2R = 5 \div \frac{1}{2} = 10$$

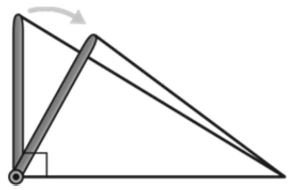
したがって　$R = 5$



3 余弦定理

（教科書 p.102）

直角三角形では，3 辺の長さの間には三平方の定理が成り立つ。では，直角三角形でない三角形の 3 辺の長さの間には，どのような関係式が成り立つだろうか。



右下の図のような三角形 ABC において，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引く。

直角三角形 CHB で，三平方の定理を用いると

$a^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$　　……①

また，直角三角形 AHC で

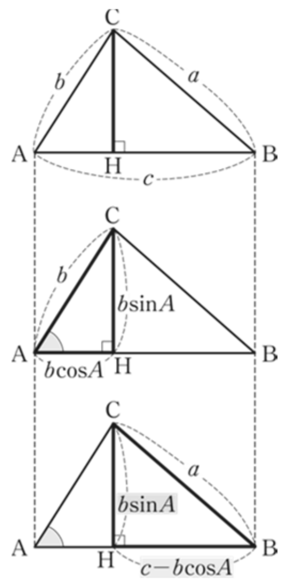
$\mathrm{CH} = b\sin A$　　……②

さらに，$\mathrm{AH} = b\cos A$ であるから

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$　　……③

①，②，③より

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\
&= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\
&= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\
&= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$



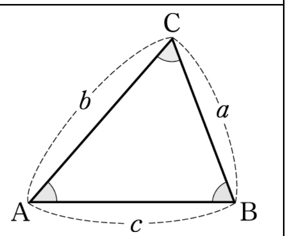
同様にして，次の 3 つの関係式が得られる。

これらをまとめて（[1]　余弦定理　）という。

余弦定理

△ABC で

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

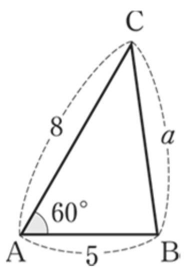


例題 2　△ABC で，$b = 8$，$c = 5$，$A = 60°$ のとき，a の値を求めなさい。

解　余弦定理により

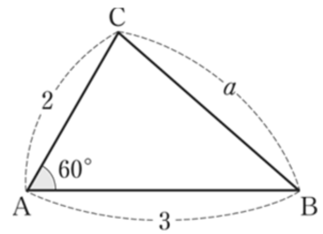
$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
&= 8^2 + 5^2 - 2\times 8\times 5\times\cos 60° \\
&= 64 + 25 - 80\times\tfrac{1}{2} = 49
\end{aligned}
$$

$a > 0$ であるから　$a = 7$



問4　次の △ABC で，a，c の値を求めなさい。

(1)



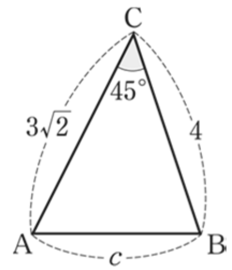
余弦定理により

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
&= 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times\cos 60° \\
&= 4 + 9 - 12\times\tfrac{1}{2} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

$a > 0$ であるから

$a = \sqrt{7}$

(2)



余弦定理により

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
&= 4^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 4\times 3\sqrt{2}\times\cos 45° \\
&= 16 + 18 - 24\sqrt{2}\times\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 10
\end{aligned}
$$

$c > 0$ であるから

$c = \sqrt{10}$

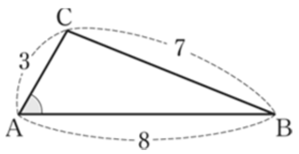
3 辺から内角を求める （教科書 p.103）

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を変形すると，$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ となるから

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

が成り立つ。この式を用いると，a，b，c の値から $\cos A$ の値がわかり，∠A の大きさを求めることができる。

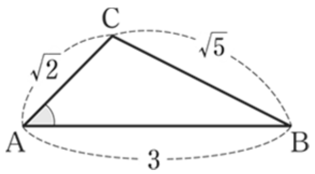
例3 △ABC で，$a = 7$，$b = 3$，$c = 8$ のとき



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8} = \frac{1}{2}$$

よって　∠A = 60°

問5 △ABC で，$a = \sqrt{5}$，$b = \sqrt{2}$，$c = 3$ のとき，∠A の大きさを求めなさい。



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{2}\times3}$$

$$= \frac{6}{6\sqrt{2}}$$

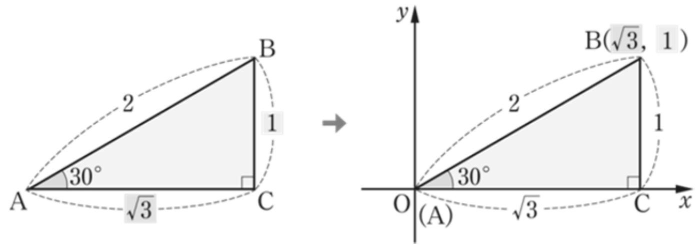
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　∠A = 45°

4 三角比と座標

（教科書 p.104）

左下の図の直角三角形に対し，右下の図のように座標軸を定めると，点 B の座標は $(\sqrt{3},\ 1)$ となる。



このとき，座標を使うと

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

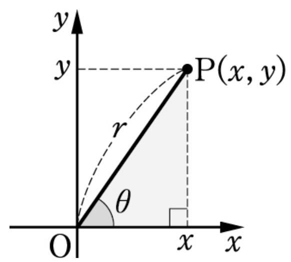
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

とみることができる。

そこで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ に対して，右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角が θ で，長さが r の線分 OP を考え，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

このとき，角の三角比を次のように定める。

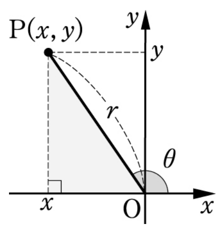


鈍角まで拡張した三角比

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$



鈍角の三角比

（教科書 p.105）

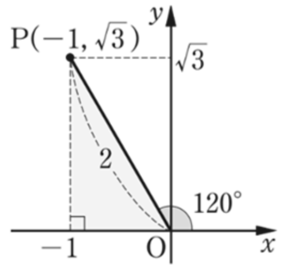
例題 3 120° の三角比の値を求めなさい。

解 下の図のように，$\theta=120°$，$\mathrm{OP}=2$ とすると，点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ となるから，$r=2$，$x=-1$，$y=\sqrt{3}$ である。よって

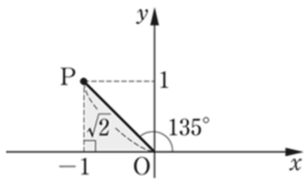
$\sin 120°=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

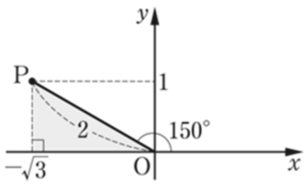
$\cos 120°=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\tan 120°=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$



問6 次の図を用いて，135° と 150° の三角比の値を求めなさい。





$\theta=135°$，$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ とすると，点 P の座標は $(-1,\ 1)$となるから，$r=\sqrt{2}$，$x=-1$，$y=1$ である。

よって

$\sin 135°=\frac{y}{r}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135°=\frac{x}{r}$

$=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135°=\frac{y}{x}$

$=\frac{1}{-1}$

$=-1$

$\theta=150°$，$\mathrm{OP}=2$ とすると，点 P の座標は $(-\sqrt{3},\ 1)$ となるから，$r=2$，$x=-\sqrt{3}$，$y=1$ である。

よって

$\sin 150°=\frac{y}{r}$

$=\frac{1}{2}$

$\cos 150°=\frac{x}{r}$

$=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150°=\frac{y}{x}$

$=\frac{1}{-\sqrt{3}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

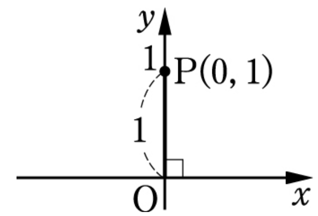
0°，90°，180° の三角比

（教科書 p.105）

90° の三角比の値は，右の図のように，$\mathrm{OP}=1$ とすると，$r=1$，$x=0$，$y=1$ となるから

$\sin 90°=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1$，$\cos 90°=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$

$\tan 90°$ の値はない。



いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

5 三角比の相互関係

（教科書 p.106）

θ が鈍角の場合も，次の関係式が成り立つ。

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

例題 4 θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

解 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

θ は鈍角であるから　$\cos\theta < 0$

よって　$\cos\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

例題４は，鋭角のときと同様に，図を用いて考えてもよい。

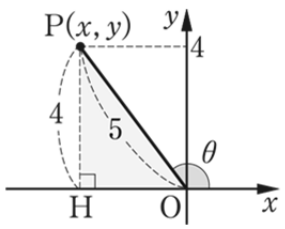
右の図の $\triangle$ OPH で，三平方の定理により

$\mathrm{OH}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\mathrm{OH} > 0$ であるから　$\mathrm{OH} = 3$

よって，点 P の x 座標は　$x = -3$

したがって　$\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\tan\theta = -\frac{4}{3}$



問7 θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

θ は鈍角であるから $\cos\theta < 0$

よって

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$$\tan\theta = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

180° －θ の三角比

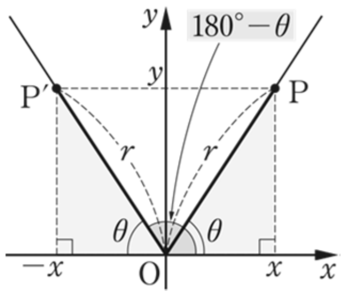
（教科書 p.107）

θ が鋭角のとき，$180° - \theta$ は鈍角となる。この 2 つの角の三角比の間に，どのような関係が成り立つか考えてみよう。

右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角がそれぞれ θ，$180° - \theta$ である半直線上に，2 点 P と P′ を

$\mathrm{OP} = \mathrm{OP'} = r$

となるようにとると，この 2 点は y 軸に関して対称となる。よって，P の座標が $\mathrm{P}(x,\ y)$ ならば，P′ の座標は $\mathrm{P'}(-x,\ y)$ となる。



これにより，$180° - \theta$ の三角比は

$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

したがって，次の関係式が成り立つ。

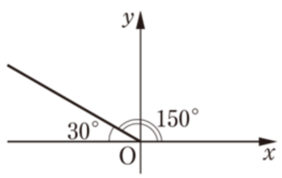
$180° - \theta$ の三角比
$\boldsymbol{\sin(180° - \theta) = \sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(180° - \theta) = -\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(180° - \theta) = -\tan\theta}$

例4 $150° = 180° - 30°$ であるから

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30°$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$

$\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30°$



問8 次の三角比を，鋭角の三角比で表しなさい。

（1） $\sin 100°$

$\sin 100° = \sin(180° - 80°) = \sin 80°$

（2） $\cos 130°$

$\cos 130° = \cos(180° - 50°) = -\cos 50°$

（3） $\tan 170°$

$\tan 170° = \tan(180° - 10°) = -\tan 10°$

6 鈍角の三角比と計量

（教科書 p. 108）

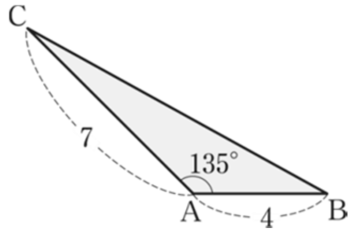
角が鈍角の場合も，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理が成り立つ。

例5 △ABC で，$b = 7$，$c = 4$，$A = 135°$ のとき，

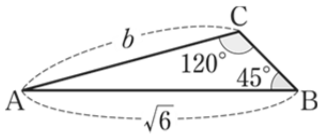
この三角形の面積 S は

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin 135°$

$= 14 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$



例6 (1) △ABC で，$B = 45°$，$C = 120°$，$c = \sqrt{6}$ のとき，b の値は，正弦定理により



$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}$

よって　$b = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120°} \times \sin 45°$

$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

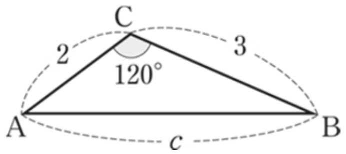
(2) △ABC で，$a = 3$，$b = 2$，$C = 120°$ のとき，c の値は，余弦定理により

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 120°$

$= 9 + 4 - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$

$c > 0$ であるから　$c = \sqrt{19}$



問9 次の △ABC について，それぞれの値を求めなさい。

(1) $b = \sqrt{3}$，$c = 2$，$A = 120°$ のときの △ABC の面積 S

この三角形の面積 S は

$S = \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 120°$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{2}$

(2) $B = 30°$，$C = 135°$，$c = 2$ のときの b の値

正弦定理により

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{b}{\sin 30°} = \frac{2}{\sin 135°}$

よって

$b = \frac{2}{\sin 135°} \times \sin 30°$

$= 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \sqrt{2}$

(3) $a = 1$，$b = \sqrt{3}$，$C = 150°$ のときの c の値

余弦定理により

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \cos 150°$

$= 1 + 3 - 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 7$

$c > 0$ であるから

$c = \sqrt{7}$

空間図形と三角比

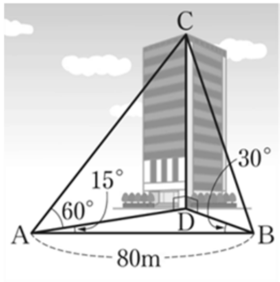
（教科書 p.109）

空間図形に含まれる三角形に着目して三角比を用いると，建物の高さなどを求めることができる。

例題 5 右の図で

$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 15°$，$\angle DBA = 30°$，$AB = 80m$

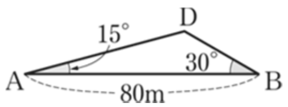
であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。



解 まず，△ABD に着目して AD を求める。

$\angle ADB = 180° - (15° + 30°) = 135°$

であるから，正弦定理により



$$\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{80}{\sin 135°}$$

よって

$$AD = \frac{80}{\sin 135°} \times \sin 30°$$

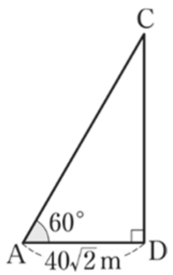
$$= 80 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= 40\sqrt{2}$$

次に，△CAD に着目して CD を求める。

$\angle CAD = 60°$，$\angle CDA = 90°$

であるから



$$CD = AD \tan 60°$$

$$= 40\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 40\sqrt{6}\ (m)$$

問 10 例題５で，$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 15°$，$\angle DBA = 45°$，$AB = 100m$ であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。

まず，△ABD に着目して AD を求める。

$\angle ADB = 180° - (15° + 45°) = 120°$ であるから，正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin 45°} = \frac{100}{\sin 120°}$$

よって

$$AD = \frac{100}{\sin 120°} \times \sin 45°$$

$$= 100 \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{100\sqrt{6}}{3}$$

次に，△CAD に着目して CD を求める。

$\angle CAD = 60°$，$\angle CDA = 90°$

であるから

$$CD = AD \tan 60°$$

$$= \frac{100\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 100\sqrt{2}\ (m)$$

復 習 問 題

（教科書 p.110）

1 次の △ABC の面積を求めなさい。

(1) $a=5$，$b=12$，$C=30°$

この三角形の面積 S は

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 12\times \sin 30°$

$=30\times\frac{1}{2}$

$=15$

(2) $b=3$，$c=8$，$A=135°$

この三角形の面積 S は

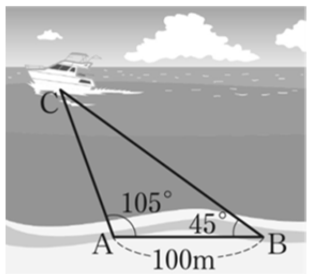
$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times \sin 135°$

$=12\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{2}$

2 海岸の 100m 離れた 2 地点 A，B から船 C を見ると，$A=105°$，$B=45°$ であった。地点 A から船までの距離 AC を求めなさい。



$\angle ACB=180°-(105°+45°)=30°$ であるから，正弦定理により

$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$

$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{100}{\sin 30°}$

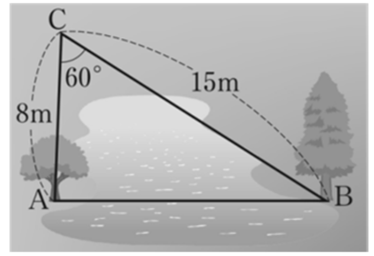
よって

$AC=\frac{100}{\sin 30°}\times\sin 45°$

$=100\div\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=100\sqrt{2}$ (m)

3 C 地点から，池の両側に立つ木 A，B までの距離と，∠ACB を測ると，$AC=8$m，$BC=15$m，$\angle ACB=60°$ であった。2 本の木の間の距離 AB を求めなさい。



余弦定理により

$AB^2=15^2+8^2-2\times 15\times 8\times\cos 60°$

$=225+64-240\times\frac{1}{2}$

$=169$

$AB>0$ であるから

$AB=13$m

4 θ が鈍角のとき，次の問に答えなさい。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

θ は鈍角であるから　$\cos\theta < 0$

よって

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$$\tan\theta = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

θ は鈍角であるから $\sin\theta > 0$

よって

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

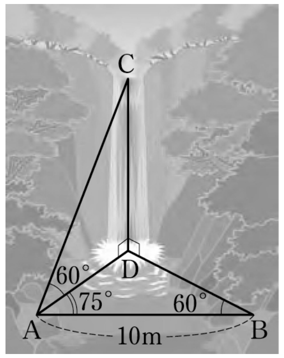
$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\sqrt{5}\right)$$

$$= -2$$

5 右の図で，点 A，B，D は同一水平面上にあり，

$\angle CAD = 60°$，$\angle DAB = 75°$，$\angle DBA = 60°$，$AB = 10m$

である。



(1) ∠ADB を求めなさい。

△ABD に着目すると

$\angle ADB = 180° - (75° + 60°) = 45°$

(2) 距離 AD を求めなさい。

正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin 45°}$$

よって

$$AD = \frac{10}{\sin 45°} \times \sin 60°$$

$$= 10 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 5\sqrt{6}\ (m)$$

(3) 滝の高さ CD を求めなさい。

△CAD に着目すると

$\angle CAD = 60°$，$\angle CDA = 90°$

であるから

$CD = AD \tan 60°$

$= 5\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

$= 15\sqrt{2}\ (m)$