３節 整数の性質の活用

❶ 記数法

記数法の仕組み

（教科書 p.91）

数量を 10，10^2，10^3，10^4，･･･ずつにまとめて数える方法を（[1]　　　　　）という。

数量を 12，12^2，12^3，12^4，･･･ずつにまとめて数える方法を（[2]　　　　　）という。

10 進法，12 進法以外にも，コンピュ-タなどでは（[3]　　　　　）が用いられている。

2進法

（教科書 p.92）

2 進法では，数を 0 と 1 の 2 種類の数字を用いて

　　10101，　11011

などと表す。

例1 2 進法で表された 1011 を，10 進法で表してみよう。

$$1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1=$$

よって，2 進法で表した 1011 は，10 進法では（　　　　）である。

これからは，10 進法以外で表した数，たとえば，1011 が 2 進法で表された数であることを示すために，$1011_{(2)}$ のように書くこととする。

問1 次の 2 進法で表された数を，10 進法で表せ。

(1) $10_{(2)}$

(2) $11_{(2)}$

(3) $1100_{(2)}$

(4) $101011_{(2)}$

例2 10 進法で表された 19 を，2 進法で表してみよう。

右の計算より

　　19 =

となる。

```
2) 19        余り
2)  9  ･･･1
2)  4  ･･･1
2)  2  ･･･0
    1  ･･･0
```

問2 次の 10 進法で表された数を，2 進法で表せ。

(1) 15

(2) 57

例3 2 進法で表された小数 $0.101_{(2)}$ を，10 進法で表してみよう。

$0.101_{(2)}=$

したがって　$0.101_{(2)}=$

問3 次の 2 進法で表された小数を，10 進法で表せ。

(1) $0.1_{(2)}$

(2) $0.01_{(2)}$

(3) $0.011_{(2)}$

(4) $1.1_{(2)}$

2進法の計算

（教科書 p.94）

例4 (1) $101_{(2)}+11_{(2)}=1000_{(2)}$　　(2) $101_{(2)}-11_{(2)}=10_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\quad 11 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ -\quad 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

問4 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $10101_{(2)}+111_{(2)}$

(2) $1011_{(2)}-101_{(2)}$

例5 $101_{(2)}\times 101_{(2)}$ を計算してみよう。

右の計算から

$$101_{(2)}\times 101_{(2)}=11001_{(2)}$$

となる。

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11001 \end{array}$$

問5 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $101_{(2)}\times 11_{(2)}$

(2) $111_{(2)}\times 101_{(2)}$

n 進法

（教科書 p.95）

3 進法や 5 進法についても，2 進法と同じように考えることができる。

例6 3 進法や 5 進法で表された数を，10 進法で表してみよう。

(1) 3 進法で表された $211_{(3)}$ は

であるから，10 進法では（　　　　　）

(2) 5 進法で表された $341_{(5)}$ は

であるから，10 進法では（　　　　　）

問6 3 進法や 5 進法で表された次の数を，10 進法で表せ。

(1) $2011_{(3)}$

(2) $324_{(5)}$

(3) $12021_{(3)}$

(4) $20314_{(5)}$

例7 10 進法で表された 71 を，3 進法，5 進法でそれぞれ表してみよう。

右の計算より，3 進法で表すと

となる。

$$
\begin{array}{r@{\,}l@{\quad}l}
 & & \text{余り} \\
3 \big) & \underline{71} & \\
3 \big) & \underline{23} & \cdots 2 \\
3 \big) & \underline{\ \ 7} & \cdots 2 \\
 & \ \ 2 & \cdots 1
\end{array}
$$

右の計算より，5 進法で表すと

となる。

$$
\begin{array}{r@{\,}l@{\quad}l}
 & & \text{余り} \\
5 \big) & \underline{71} & \\
5 \big) & \underline{14} & \cdots 1 \\
 & \ \ 2 & \cdots 4
\end{array}
$$

問7 10 進法で表された次の数を，3 進法，5 進法でそれぞれ表せ。

(1) 101

(2) 172

② 小数と分数

（教科書 p. 96）

整数でない有理数を小数で表すと，$\frac{1}{4}=0.25$ のように（[1]　　　　　　）になる場合と，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$ のように（[2]　　　　　　）になる場合がある。

有限小数となる分数

（教科書 p. 96）

分母の素因数が 2 と 5 だけの分数は，分子と分母に適当な数を掛けることによって，分母を 10^n の形にできるから，有限小数となる。

それ以上約分できない分数を（[3]　　　　　　）という。一般に，既約分数と有限小数について，次のことが知られている。

既約分数が有限小数となる条件
分母の素因数が 2 と 5 だけである既約分数 $\Longleftrightarrow$ 有限小数

例8 (1) $\frac{1}{20}$ は分母が $20=2^2\cdot5$ であるから，有限小数となる。

(2) $\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$ は分母が $15=3\cdot5$ であるから，有限小数とならない。

問8 次の分数は，有限小数となるかどうか答えよ。

(1) $\frac{27}{40}$

(2) $\frac{45}{325}$

循環小数となる分数

（教科書 p.97）

循環小数において，くり返し現れる数字の配列を（[4]　　　　　　）という。

例9 (1) $\frac{5}{9}$ は分母が $9=3^2$ であるから，（　　　　　　）となる。

また，$\frac{5}{9}=0.5555\cdots=0.\dot{5}$ であるから，（　　　　　　）である。

(2) $\frac{7}{22}$ は分母が $22=2\cdot11$ であるから，（　　　　　　）となる。

また，$\frac{7}{22}=0.3181818\cdots=0.3\dot{1}\dot{8}$ であるから，（　　　　　　）である。

問9 次の分数のうち，循環小数となるものを選び，循環節を答えよ。

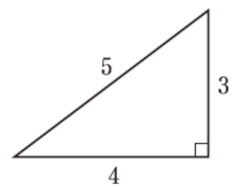
① $\frac{3}{7}$　　② $\frac{18}{45}$　　③ $\frac{30}{72}$

Challenge 例題 ピタゴラス数

（教科書 p.98）

$a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数 a，b，c の組を**ピタゴラス数**という。
ピタゴラス数には，次のようなものがある。

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5, \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=12 \\ c=13, \end{cases} \begin{cases} a=8 \\ b=15 \\ c=17, \end{cases} \begin{cases} a=7 \\ b=24 \\ c=25 \end{cases}$$



これらの例では，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数である。
一般に，このことが成り立つことを示してみよう。

例題 正の整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数であることを示せ。

証明 背理法により示す。
a，b，c のいずれも 2 の倍数でないと仮定すると

$$a=2k+1,\ b=2l+1,\ c=2m+1 \quad（k,\ l,\ m \text{ は整数}）$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &= 2(2k^2+2k+2l^2+2l+1) \end{aligned}$$

$2k^2+2k+2l^2+2l+1$ は整数であるから，a^2+b^2 は 2 の倍数である。一方

$$c^2=(2m+1)^2=2(2m^2+2m)+1$$

$2m^2+2m$ は整数であるから，c^2 は 2 の倍数でない。
これは，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。
よって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数である。

問1 正の整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ。

Training

（教科書 p.99）

16 次の 2 進法で表された数を，10 進法で表せ。

(1) $1010_{(2)}$

(2) $11111_{(2)}$

(3) $1100011_{(2)}$

17 次の 10 進法で表された数を，2 進法で表せ。

(1) 49

(2) 100

(3) 125

18 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $110_{(2)} \times 11_{(2)} + 111_{(2)}$

(2) $100000_{(2)} - 110_{(2)} \times 101_{(2)}$

(3) $10_{(2)} \times 10_{(2)} \times 10_{(2)}$

19 3 進法や 5 進法で表された次の数を，10 進法で表せ。

(1) $1212_{(3)}$

(2) $22222_{(3)}$

(3) $4200_{(5)}$

20 10 進法で表された 1000 を，3 進法，5 進法でそれぞれ表せ。

21 次の分数のうち，循環小数となるものを選び，循環節を答えよ。

① $\frac{123}{256}$　　② $\frac{51}{74}$　　③ $\frac{51}{75}$

数学のパノラマ　記数法と循環小数

（教科書p.99）

3 進法で表された小数 $0.1_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$1\times\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$$

となり，循環小数となる。

このように，1 つの数でも，記数法が異なると有限小数となったり循環小数となったりする。

たとえば，$\frac{7}{9}$ は，10 進法の小数では，次のように循環小数となる。

$$\frac{7}{9}=0.7777\cdots=0.\dot{7}$$

しかし，3 進法の小数では

$$\frac{7}{9}=\frac{2\times3+1}{3^2}=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3^2}$$

より，有限小数 $0.21_{(3)}$ となる。

発展 合同式

（教科書 p.100）

m は正の整数とする。2 つの整数 a，b に対して，$a-b$ が m で割り切れるとき，a と b は **m を法として合同**であるといい，$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$，または，**$m$ を法として $a \equiv b$** と表す。この式を**合同式**という。これは，a を m で割ったときの余りと，b を m で割ったときの余りが等しいことと同じである。

例1 15 と 7 は，$15-7=8$ が 4 で割り切れるから

$15 \equiv 7 \pmod{4}$

問1 次の□の中に 0，1，2，3，4 の中から適する値を入れよ。

(1) $16 \equiv \boxed{} \pmod{5}$

(2) $39 \equiv \boxed{} \pmod{5}$

合同式については，次のような性質が成り立つ。

合同式の性質
$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき [1] $a+c \equiv b+d \pmod{m}$，　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$ [2] $ac \equiv bd \pmod{m}$　　[3] $a^n \equiv b^n \pmod{m}$（ n は正の整数）

例2 (1) 47×53 を 3 で割った余りは，

$47 \equiv 2 \pmod{3}$，$53 \equiv 2 \pmod{3}$ より

$47 \times 53 \equiv 2 \times 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$

よって，余りは 1 である。

(2) 4^8 を 3 で割った余りは，

$4 \equiv 1 \pmod{3}$ より $4^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{3}$

よって，余りは 1 である。

問2 次の数を 4 で割ったときの余りを求めよ。

(1) 67×74

(2) 9^7

例題 2 整数 a，b について，a を 4 で割ると余りが 2，b を 4 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

(1) $a+b$ を 4 で割った余り　　(2) ab を 4 で割った余り

別解 (1) $a \equiv 2 \pmod{4}$，$b \equiv 3 \pmod{4}$ より

$a+b \equiv$

(2) $ab \equiv$

問3 整数 a，b について，a を 5 で割ると余りが 4，b を 5 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を合同式を用いて求めよ。

(1) $a+b$ を 5 で割った余り

(2) ab を 5 で割った余り

例題 3 n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

別解 整数 n は次のいずれかで表すことができる。

$$n \equiv 0 \pmod 3,\ n \equiv 1 \pmod 3,\ n \equiv 2 \pmod 3$$

それぞれの場合について n^2 を 3 で割った余りを求めると

問4 n を整数とするとき，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかであることを合同式を用いて示せ。

3節 整数の性質の活用

❶ 記数法

記数法の仕組み

（教科書 p.91）

数量を 10，10^2，10^3，10^4，･･･ずつにまとめて数える方法を（[1] 10 進法 ）という。

数量を 12，12^2，12^3，12^4，･･･ずつにまとめて数える方法を（[2] 12 進法 ）という。

10 進法，12 進法以外にも，コンピュ-タなどでは（[3] 2 進法 ）が用いられている。

2進法

（教科書 p.92）

2 進法では，数を 0 と 1 の 2 種類の数字を用いて

10101，　11011

などと表す。

例1 2 進法で表された 1011 を，10 進法で表してみよう。

$$1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1=11$$

よって，2 進法で表した 1011 は，10 進法では（ 11 ）である。

これからは，10 進法以外で表した数，たとえば，1011 が 2 進法で表された数であることを示すために，$1011_{(2)}$ のように書くこととする。

問1 次の 2 進法で表された数を，10 進法で表せ。

(1) $10_{(2)}=1\times2+0=2$

(2) $11_{(2)}=1\times2+1=3$

(3) $1100_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2+0=12$

(4) $101011_{(2)}=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1=43$

例2 10 進法で表された 19 を，2 進法で表してみよう。

右の計算より

$19=10011_{(2)}$

となる。

```
2) 19      余り
2)  9  ･･･1
2)  4  ･･･1
2)  2  ･･･0
    1  ･･･0
```

問2 次の 10 進法で表された数を，2 進法で表せ。

(1) $15=1111_{(2)}$

```
2) 15
2)  7 ……1
2)  3 ……1
    1 ……1
```

(2) $57=111001_{(2)}$

```
2) 57
2) 28 ……1
2) 14 ……0
2)  7 ……0
2)  3 ……1
    1 ……1
```

例3 2 進法で表された小数 $0.101_{(2)}$ を，10 進法で表してみよう。

$$0.101_{(2)}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}$$
$$=\frac{5}{8}=0.625$$

したがって　$0.101_{(2)}=0.625$

問3 次の 2 進法で表された小数を，10 進法で表せ。

(1) $0.1_{(2)}$

$0.1_{(2)}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0.5$

(2) $0.01_{(2)}$

$0.01_{(2)}=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=0.25$

(3) $0.011_{(2)}$

$0.011_{(2)}=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^3}$
$=\frac{3}{8}=0.375$

(4) $1.1_{(2)}$

$1.1_{(2)}=1+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1.5$

2進法の計算

（教科書 p.94）

例4 (1) $101_{(2)}+11_{(2)}=1000_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\quad 11 \\ \hline 1000 \end{array}$$

(2) $101_{(2)}-11_{(2)}=10_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ -\quad 11 \\ \hline 10 \end{array}$$

問4 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $10101_{(2)}+111_{(2)}=11100_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10101 \\ +\quad 111 \\ \hline 11100 \end{array}$$

(2) $1011_{(2)}-101_{(2)}=110_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ -\quad 101 \\ \hline 110 \end{array}$$

例5 $101_{(2)}\times 101_{(2)}$ を計算してみよう。

右の計算から

$$101_{(2)}\times 101_{(2)}=11001_{(2)}$$

となる。

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11001 \end{array}$$

問5 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $101_{(2)}\times 11_{(2)}=1111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\quad 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

(2) $111_{(2)}\times 101_{(2)}=100011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\quad 101 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 100011 \end{array}$$

n 進法

（教科書 p.95）

3 進法や 5 進法についても，2 進法と同じように考えることができる。

例6 3 進法や 5 進法で表された数を，10 進法で表してみよう。

(1) 3 進法で表された $211_{(3)}$ は

$211_{(3)}=2\times 3^2+1\times 3+1$

$=22$

であるから，10 進法では（ 22 ）

(2) 5 進法で表された $341_{(5)}$ は

$341_{(5)}=3\times 5^2+4\times 5+1$

$=96$

であるから，10 進法では（ 96 ）

問6 3 進法や 5 進法で表された次の数を，10 進法で表せ。

(1) $2011_{(3)}=2\times 3^3+0\times 3^2+1\times 3+1=58$

(2) $324_{(5)}=3\times 5^2+2\times 5+4=89$

(3) $12021_{(3)}=1\times 3^4+2\times 3^3+0\times 3^2+2\times 3+1=142$

(4) $20314_{(5)}=2\times 5^4+0\times 5^3+3\times 5^2+1\times 5+4=1334$

例7 10 進法で表された 71 を，3 進法，5 進法でそれぞれ表してみよう。

右の計算より，3 進法で表すと

$$71 = 2122_{(3)}$$

となる。

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 71 & \text{余り} \\ \hline 3 & 23 & \cdots 2 \\ \hline 3 & 7 & \cdots 2 \\ \hline & 2 & \cdots 1 \end{array}$$

右の計算より，5 進法で表すと

$$71 = 241_{(5)}$$

となる。

$$\begin{array}{r|rl} 5 & 71 & \text{余り} \\ \hline 5 & 14 & \cdots 1 \\ \hline & 2 & \cdots 4 \end{array}$$

問7 10 進法で表された次の数を，3 進法，5 進法でそれぞれ表せ。

(1) $101 = 10202_{(3)} = 401_{(5)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 101 & \\ \hline 3 & 33 & \cdots\cdots 2 \\ \hline 3 & 11 & \cdots\cdots 0 \\ \hline 3 & 3 & \cdots\cdots 2 \\ \hline & 1 & \cdots\cdots 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl} 5 & 101 & \\ \hline 5 & 20 & \cdots\cdots 1 \\ \hline & 4 & \cdots\cdots 0 \end{array}$$

(2) $172 = 20101_{(3)} = 1142_{(5)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 172 & \\ \hline 3 & 57 & \cdots\cdots 1 \\ \hline 3 & 19 & \cdots\cdots 0 \\ \hline 3 & 6 & \cdots\cdots 1 \\ \hline & 2 & \cdots\cdots 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl} 5 & 172 & \\ \hline 5 & 34 & \cdots\cdots 2 \\ \hline 5 & 6 & \cdots\cdots 4 \\ \hline & 1 & \cdots\cdots 1 \end{array}$$

❷ 小数と分数

（教科書 p. 96）

整数でない有理数を小数で表すと，$\frac{1}{4}=0.25$ のように（[1] 有限小数 ）になる場合と，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$ のように（[2] 循環小数 ）になる場合がある。

有限小数となる分数

（教科書 p. 96）

分母の素因数が 2 と 5 だけの分数は，分子と分母に適当な数を掛けることによって，分母を 10^n の形にできるから，有限小数となる。

それ以上約分できない分数を（[3] 既約分数 ）という。一般に，既約分数と有限小数について，次のことが知られている。

既約分数が有限小数となる条件
分母の素因数が 2 と 5 だけである既約分数 $\Longleftrightarrow$ 有限小数

例8 (1) $\frac{1}{20}$ は分母が $20=2^2\cdot5$ であるから，有限小数となる。

(2) $\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$ は分母が $15=3\cdot5$ であるから，有限小数とならない。

問8 次の分数は，有限小数となるかどうか答えよ。

(1) $\frac{27}{40}$

分母が $40=2^3\cdot5$ であるから，有限小数となる。

(2) $\frac{45}{325}$

$\frac{45}{325}=\frac{9}{65}$ は分母が $65=5\cdot13$ であるから，有限小数とならない。

循環小数となる分数

（教科書 p.97）

循環小数において，くり返し現れる数字の配列を（[4] 循環節 ）という。

例9 (1) $\frac{5}{9}$ は分母が $9=3^2$ であるから，（ 循環小数 ）となる。

また，$\frac{5}{9}=0.5555\cdots=0.\dot{5}$ であるから，（ 循環節は 5 ）である。

(2) $\frac{7}{22}$ は分母が $22=2\cdot11$ であるから，（ 循環小数 ）となる。

また，$\frac{7}{22}=0.3181818\cdots=0.3\dot{1}\dot{8}$ であるから，（ 循環節は 18 ）である。

問9 次の分数のうち，循環小数となるものを選び，循環節を答えよ。

① $\frac{3}{7}$　　② $\frac{18}{45}$　　③ $\frac{30}{72}$

① $\frac{3}{7}$ は分母が 7 であるから，循環小数となる。

また，

$$\frac{3}{7}=0.428571428\cdots=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

であるから，循環節は 428571 である。

② $\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$ は分母が 5 であるから，循環小数とはならない。

③ $\frac{30}{72}=\frac{5}{12}$ は分母が $12=2^2\cdot3$ であるから，循環小数となる。

また，

$$\frac{5}{12}=0.4166\cdots=0.41\dot{6}$$

であるから，循環節は 6 である。

したがって，循環小数となるものは①と③

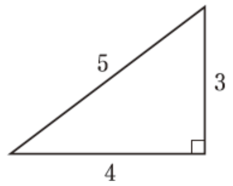
循環節は，① 428571，③ 6　である。

Challenge 例題 ピタゴラス数

（教科書 p.98）

$a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数 a，b，c の組を**ピタゴラス数**という。
ピタゴラス数には，次のようなものがある。

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5, \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=12 \\ c=13, \end{cases} \begin{cases} a=8 \\ b=15 \\ c=17, \end{cases} \begin{cases} a=7 \\ b=24 \\ c=25 \end{cases}$$



これらの例では，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数である。
一般に，このことが成り立つことを示してみよう。

例題 正の整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数であることを示せ。

証明 背理法により示す。
a，b，c のいずれも 2 の倍数でないと仮定すると

$$a=2k+1,\ b=2l+1,\ c=2m+1 \quad （k,\ l,\ m \text{ は整数}）$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &= 2(2k^2+2k+2l^2+2l+1) \end{aligned}$$

$2k^2+2k+2l^2+2l+1$ は整数であるから，a^2+b^2 は 2 の倍数である。一方

$$c^2=(2m+1)^2=2(2m^2+2m)+1$$

$2m^2+2m$ は整数であるから，c^2 は 2 の倍数でない。
これは，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。
よって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 の倍数である。

問1 正の整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ。

3 の倍数でない整数 n は，次のいずれかで表すことができる。

$$n=3k+1,\ n=3k+2 \quad （k \text{ は整数}）$$

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+1)^2 \\ &= 9k^2+6k+1 \\ &= 3(3k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+2)^2 \\ &= 9k^2+12k+4 \\ &= 3(3k^2+4k+1)+1 \end{aligned}$$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，n^2 を 3 で割った余りは 1 である。
すなわち，3 の倍数でない整数の 2 乗は，3 で割ると余りが 1 となる整数である。
したがって，a，b がいずれも 3 の倍数でないと仮定すると，a^2，b^2 はともに 3 で割ると余りが 1 となる整数であるから，a^2+b^2 は 3 で割ると余りが 2 となる整数である。
一方，c が 3 の倍数のときは，c^2 は 3 の倍数である。また，c が 3 の倍数でないときには，c^2 は 3 で割ると余りが 1 となる整数である。これは，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。したがって，a，b がいずれも 3 の倍数でないとした仮定は誤りであり，a，b のうち少なくとも一方は 3 の倍数である。

Training

（教科書 p.99）

16 次の 2 進法で表された数を，10 進法で表せ。

(1) $1010_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 10$

(2) $11111_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 31$

(3) $1100011_{(2)} = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 99$

17 次の 10 進法で表された数を，2 進法で表せ。

(1) $49 = 110001_{(2)}$

$$
\begin{array}{rrl}
2) & 49 & \\
2) & 24 & \cdots\cdots 1 \\
2) & 12 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 6 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 3 & \cdots\cdots 0 \\
 & 1 & \cdots\cdots 1
\end{array}
$$

(2) $100 = 1100100_{(2)}$

$$
\begin{array}{rrl}
2) & 100 & \\
2) & 50 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 25 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 12 & \cdots\cdots 1 \\
2) & 6 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 3 & \cdots\cdots 0 \\
 & 1 & \cdots\cdots 1
\end{array}
$$

(3) $125 = 1111101_{(2)}$

$$
\begin{array}{rrl}
2) & 125 & \\
2) & 62 & \cdots\cdots 1 \\
2) & 31 & \cdots\cdots 0 \\
2) & 15 & \cdots\cdots 1 \\
2) & 7 & \cdots\cdots 1 \\
2) & 3 & \cdots\cdots 1 \\
 & 1 & \cdots\cdots 1
\end{array}
$$

18 2 進法で表された数の次の計算をせよ。

(1) $110_{(2)} \times 11_{(2)} + 111_{(2)} = 11001_{(2)}$

$$
\begin{array}{lr}
 & 110 \\
\times & 11 \\ \hline
 & 110 \\
 & 110 \\ \hline
 & 10010
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 10010 \\
+ & 111 \\ \hline
 & 11001
\end{array}
$$

(2) $100000_{(2)} - 110_{(2)} \times 101_{(2)} = 100000_{(2)} - 11110_{(2)} = 10_{(2)}$

$$
\begin{array}{lr}
 & 110 \\
\times & 101 \\ \hline
 & 110 \\
 & 110 \\ \hline
 & 11110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 100000 \\
- & 11110 \\ \hline
 & 10
\end{array}
$$

(3) $10_{(2)} \times 10_{(2)} \times 10_{(2)} = 1000_{(2)}$

19 3 進法や 5 進法で表された次の数を，10 進法で表せ。

(1) $1212_{(3)} = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2 = 27 + 18 + 3 + 2 = 50$

(2) $22222_{(3)} = 2 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2 = 162 + 54 + 18 + 6 + 2 = 242$

(3) $4200_{(5)} = 4 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5 + 0 = 500 + 50 = 550$

20 10 進法で表された 1000 を，3 進法，5 進法でそれぞれ表せ。

$1101001_{(3)}$，$13000_{(5)}$

$$
\begin{array}{rrl}
3) & 1000 & \\
3) & 333 & \cdots\cdots 1 \\
3) & 111 & \cdots\cdots 0 \\
3) & 37 & \cdots\cdots 0 \\
3) & 12 & \cdots\cdots 1 \\
3) & 4 & \cdots\cdots 0 \\
 & 1 & \cdots\cdots 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrl}
5) & 1000 & \\
5) & 200 & \cdots\cdots 0 \\
5) & 40 & \cdots\cdots 0 \\
5) & 8 & \cdots\cdots 0 \\
 & 1 & \cdots\cdots 3
\end{array}
$$

21 次の分数のうち，循環小数となるものを選び，循環節を答えよ。

① $\frac{123}{256}$　② $\frac{51}{74}$　③ $\frac{51}{75}$

① $\frac{123}{256}$ は分母が $256=2^8$ であるから，循環小数とはならない。

② $\frac{51}{74}$ は分母が $74=2\times37$ であるから，循環小数となる。

また，$\frac{51}{74}=0.6891891\cdots=0.6\dot{8}9\dot{1}$ であるから，循環節は 891 である。

③ $\frac{51}{75}=\frac{17}{25}$ は，分母が $25=5^2$ であるから，循環小数とはならない。

したがって，循環小数となるものは②で，その循環節は 891 である。

数学のパノラマ　記数法と循環小数

（教科書p.99）

3 進法で表された小数 $0.1_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$1\times\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$$

となり，循環小数となる。

このように，1 つの数でも，記数法が異なると有限小数となったり循環小数となったりする。

たとえば，$\frac{7}{9}$ は，10 進法の小数では，次のように循環小数となる。

$$\frac{7}{9}=0.7777\cdots=0.\dot{7}$$

しかし，3 進法の小数では

$$\frac{7}{9}=\frac{2\times3+1}{3^2}=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3^2}$$

より，有限小数 $0.21_{(3)}$ となる。

発展 合同式

（教科書 p.100）

m は正の整数とする。2 つの整数 a，b に対して，$a-b$ が m で割り切れるとき，a と b は **m を法として合同**であるといい，$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$，または，**$m$ を法として $a \equiv b$** と表す。この式を**合同式**という。これは，a を m で割ったときの余りと，b を m で割ったときの余りが等しいことと同じである。

例1 15 と 7 は，$15-7=8$ が 4 で割り切れるから

$15 \equiv 7 \pmod{4}$

問1 次の□の中に 0，1，2，3，4 の中から適する値を入れよ。

(1) $16 \equiv \boxed{} \pmod{5}$

16 を 5 で割ると余りは 1 である。

0，1，2，3，4 のうち，5 で割って 1 余るのは 1 である。よって $16 \equiv 1 \pmod{5}$

(2) $39 \equiv \boxed{} \pmod{5}$

39 を 5 で割ると余りは 4 である。

0，1，2，3，4 のうち，5 で割って 4 余るのは 4 である。よって $39 \equiv 4 \pmod{5}$

合同式については，次のような性質が成り立つ。

合同式の性質

$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき

［1］ $a+c \equiv b+d \pmod{m}$，　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$

［2］ $ac \equiv bd \pmod{m}$　［3］ $a^n \equiv b^n \pmod{m}$（n は正の整数）

例2 (1) 47×53 を 3 で割った余りは，

$47 \equiv 2 \pmod{3}$，$53 \equiv 2 \pmod{3}$ より

$47 \times 53 \equiv 2 \times 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$

よって，余りは 1 である。

(2) 4^8 を 3 で割った余りは，

$4 \equiv 1 \pmod{3}$ より $4^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{3}$

よって，余りは 1 である。

問2 次の数を 4 で割ったときの余りを求めよ。

(1) 67×74

$67 \equiv 3 \pmod{4}$，$74 \equiv 2 \pmod{4}$

より

$67 \times 74 \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \equiv 2 \pmod{4}$

よって余りは 2 である。

(2) 9^7

$9 \equiv 1 \pmod{4}$

より

$9^7 \equiv 1^7 \equiv 1 \pmod{4}$

よって余りは 1 である。

例題 2 整数 a，b について，a を 4 で割ると余りが 2，b を 4 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

(1) $a+b$ を 4 で割った余り　(2) ab を 4 で割った余り

別解 (1) $a \equiv 2 \pmod{4}$，$b \equiv 3 \pmod{4}$ より

$a+b \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv 1 \pmod{4}$

よって，$a+b$ を 4 で割った余りは 1 である。

(2) $ab \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 2 \pmod{4}$

よって，ab を 4 で割った余りは 2 である。

問3 整数 a，b について，a を 5 で割ると余りが 4，b を 5 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を合同式を用いて求めよ。

(1) $a+b$ を 5 で割った余り

$a \equiv 4 \pmod{5}$，$b \equiv 3 \pmod{5}$ である。

$a+b \equiv 4+3 \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5}$

よって，$a+b$ を 5 で割った余りは 2 である。

(2) ab を 5 で割った余り

$ab \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{5}$

よって，ab を 5 で割った余りは 2 である。

例題 3 n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

別解 整数 n は次のいずれかで表すことができる。

$$n \equiv 0 \pmod 3,\ n \equiv 1 \pmod 3,\ n \equiv 2 \pmod 3$$

それぞれの場合について n^2 を 3 で割った余りを求めると

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき　$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき　$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき　$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$

よって，n^2を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかである。

問4 n を整数とするとき，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかであることを合同式を用いて示せ。

整数 n は次のいずれかで表すことができる。

$$n \equiv 0 \pmod 5,\ n \equiv 1 \pmod 5,\ n \equiv 2 \pmod 5,\ n \equiv 3 \pmod 5,\ n \equiv 4 \pmod 5$$

それぞれの場合について n^2 を 5 で割った余りを求めると

$n \equiv 0 \pmod 5$ のとき　$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 5$

$n \equiv 1 \pmod 5$ のとき　$n^2 \equiv 1 \equiv 1 \pmod 5$

$n \equiv 2 \pmod 5$ のとき　$n^2 \equiv 4 \equiv 4 \pmod 5$

$n \equiv 3 \pmod 5$ のとき　$n^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod 5$

$n \equiv 4 \pmod 5$ のとき　$n^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$

よって，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかである。