２節 ユークリッドの互除法と不定方程式

❶ 除法の性質と整数の分類

除法の性質

（教科書 p.76）

一般に，次の（[1] ）が成り立つ。

除法の性質
aを整数，b を正の整数とし，a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると $a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b$

例1 150 を 16 で割ると，商が 9，余りが 6 であるから

$150 =$

問1 次の a, b について，a を b で割った商 q と余り r を求め，$a = bq + r$ の形で表せ。

（1）$a = 41$，$b = 9$

⑵ $a = 120$，$b = 13$

例題 1 整数 a を 10 で割ると余りが 8 となる。a を 5 で割ったときの余りを求めよ。

解 a を 10 で割ったときの商を q とすると，除法の性質より

$$a = 10q + 8$$

この式を変形すると　$a =$

（　　　　　）は整数であるから, a を 5 で割った余りは(　　　　)

である。

問2 整数 a を 8 で割ると余りが 6 となる。a を 4 で割ったときの余りを求めよ。

例題 2 整数 a, b について，a を 4 で割ると余りが 2，b を 4 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

（1）$a+b$ を 4 で割った余り　　⑵ ab を 4 で割った余り

解 a を 4 で割った商を k, b を 4 で割った商を l とすると，余りはそれぞれ 2, 3 であるから，次のように表すことができる。

$$a = 4k + 2,\quad b = 4l + 3$$

（1）$a + b =$

⑵ $ab =$

問3 整数 a, b について，a を 5 で割ると余りが 4，b を 5 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

(1) ab を 5 で割った余り　　(2) $a+2b$ を 5 で割った余り

整数の分類

（教科書 p.78）

一般に，整数を正の整数 m で割った余りによって分類すると，次のように表すことができる。

$\boldsymbol{mk,\ mk+1,\ mk+2, \cdot\cdot\cdot, mk+(m-1)}$　（k は整数）

例2 整数 n を 4 で割った余りによって分類すると，次のいずれかで表すことができる。

$n=4k$，$n=4k+1$，$n=4k+2$，$n=4k+3$　（k は整数）

問4 整数 n を 5 で割った余りによって分類すると，どのように表すことができるか。

例題 3 n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

証明 整数 n は，次のいずれかで表すことができる。

$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$　（k は整数）

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n=3k$ のとき

$n=3k+1$ のとき

$n=3k+2$ のとき

問5 n を整数とするとき，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかであることを示せ。

❷ ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法

（教科書 p.80）

2 つの正の整数 a，b $(a > b)$ の最大公約数について，次のことが成り立つ。

互除法の原理
a を b で割った商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数と， b と r の最大公約数は等しい。 $r = 0$ のとき a と b の最大公約数は b である。 ［a と b の最大公約数］ $a = bq + r$　等しい ［b と r の最大公約数］

互除法の原理をくり返し用いると，2 つの数の最大公約数を求めることができる。余りが 0 になるまで割り算をくり返すことによって最大公約数を求める方法を，

（[1]　　　　　　　　　　　）または（[2]　　　　　　）という。

例題 4　ユークリッドの互除法を用いて，754 と 273 の最大公約数を求めよ。

解　$754 = 273 \times 2 + 208$

$273 =$

（745 と 273 の最大公約数）

＝（273 と 208 の最大公約数）

＝（208 と 65 の最大公約数）

＝（65 と 13 の最大公約数）

＝ 13

よって，754 と 273 の最大公約数は（　　　　）である。

問6　ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

（1）255，315

⑵ 696，899

例3 ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{114}{437}$ を約分してみよう。

$437 = 114 \times 3 + 95$

$114 =$

よって，95 と 19 の最大公約数は（　　　　　）である。
ゆえに，437 と 114 の最大公約数は（　　　　　）である。
ここで
したがって

問7 ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{391}{667}$ を約分せよ。

参考 互除法の原理の証明

（教科書 p.83）

2 つの正の整数 a, b $(a > b)$ について，次の互除法の原理を証明してみよう。

互除法の原理
a を b で割った商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数と，b と r の最大公約数は等しい。

証明 a と b の最大公約数を m, b と r の最大公約数を n とする。除法の性質より

$$a = bq + r \qquad \cdots\cdots ①$$

①より

$$r = a - bq \qquad \cdots\cdots ②$$

②より，a と b の公約数は r の約数である。
すなわち，a と b の公約数は，b と r の公約数でもある。とくに，a と b の最大公約数 m は，b と r の公約数となるから

$$m \leqq n \qquad \cdots\cdots ③$$

逆に，①より b と r の公約数は，a の約数である。
すなわち，b と r の公約数は，a と b の公約数でもある。とくに，b と r の最大公約数 n は，a と b の公約数となるから

$$n \leqq m \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④ より　　$m = n$

したがって
　a と b の最大公約数 m は，b と r の最大公約数 n に等しい。

③ 不定方程式

不定方程式とその解

（教科書 p.84）

一般に，a，b，c を整数とするとき，x，y に関する方程式

$$\boldsymbol{ax+by=c}$$

を,（1　　　　　　　　　　　　）という。また，2 元 1 次不定方程式を満たす整数 x，y の組を 2 元 1 次不定方程式の（2　　　　　　　　　）という。

整数解の求め方

（教科書 p.85）

一般に，互いに素である 2 つの整数について，次のような性質がある。

> a と b が互いに素であり，$ax=by$ が成り立つとき，整数 x は b の倍数であり，整数 y は a の倍数である。

例4 不定方程式 $5x-4y=0$ のすべての整数解を求めてみよう。

式を変形すると　$5x=4y$　　　　　……①

ここで，5 と 4 は互いに素であるから，x は 4 の倍数である。

よって　　　　　　　　　　　　　……②

と表すことができる。

②を①に代入すると

y について解くと

すなわち，求めるすべての整数解は次のように表すことができる。

$\begin{cases} \\ \end{cases}$　　　　　　　　　　　……③

③の n に整数を代入したときにできる整数の組が，求める整数解である。

問8 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $7x-5y=0$

(2) $5x+6y=0$

例題 5 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

$5x+3y=2$ ……①

解 $x=1$，$y=-1$ の組は，①の整数解の 1 つである。

すなわち $5\cdot1+3\cdot(-1)=2$ ……②

①，② の両辺の差をとると

よって ……③

5 と 3 は互いに素であるから，$x-1$ は 3 の倍数である。

よって （n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

したがって，求めるすべての整数解は

（n は整数）

問9 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $2x+3y=10$

(2) $5x-7y=1$

ユークリッドの互除法と不定方程式の整数解

（教科書 p.87）

例題 6 不定方程式 $93x + 40y = 1$ の整数解を 1 つ求めよ。

解 ユークリッドの互除法により，93 と 40 の最大公約数を調べる。

$93 =$ ……①

$40 =$ ……②

よって，93 と 40 は，最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

ここで，①，②の余り以外の項を移項すると

①より ……③

②より ……④

③の 13 を④に代入すると

93 と 40 の項について整理すると

したがって，求める整数解の 1 つは $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

問 10 不定方程式 $163x + 78y = 1$ の整数解を 1 つ求めよ。

Challenge 例題 不定方程式の応用

（教科書 p.88）

例題 3 で割ると 1 余り，5 で割ると 2 余るような 2 桁の整数のうち，最大のものを求めよ。

解 求める整数を k とし，整数 x, y を用いて

$$k = 3x + 1,\quad k = 5y + 2$$

と表すと

よって ……①

$x = 2$，$y = 1$ は①の整数解の 1 つであるから

……②

①，②の両辺の差をとると

3 と 5 は互いに素であるから，$x - 2$ は5 の倍数である。

よって　$x - 2 = 5n$　（n は整数）

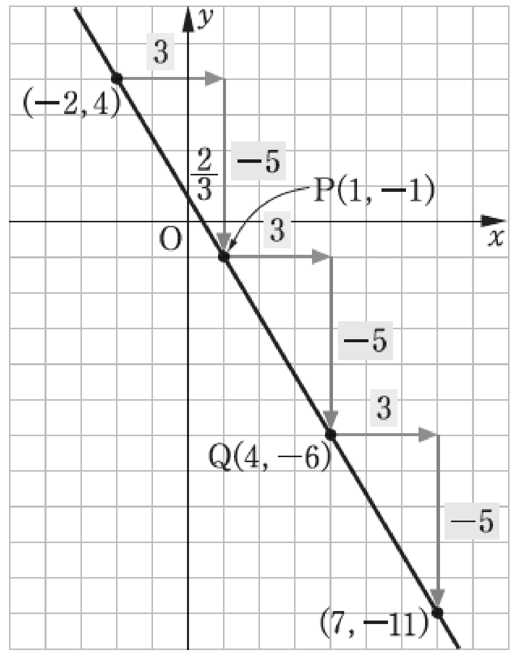
とおける。

ゆえに

問1 5 で割ると 2 余り，7 で割ると 3 余るような 3 桁の整数のうち，最小のものを求めよ。

参考 1次関数のグラフと不定方程式の整数解

（教科書 p.89）



不定方程式の整数解の意味を 1 次関数のグラフを用いて考えてみよう。

$5x+3y=2$ ……①

は $y=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$

と変形されるから，傾き $-\frac{5}{3}$ の直線を表す。ここで，点 P$(1,\ -1)$ は①の表す直線上の点であり，

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

の組は，不定方程式①の整数解の 1 つである。このように，①の表す直線上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点と，不定方程式①の整数解が対応している。

右上の図において，P$(1,\ -1)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -5 だけ移動した点 Q$(4,\ -6)$ もこの直線上にある。さらに $(-2,\ 4)$，$(7,\ -11)$ なども，この直線上の点である。

したがって，次のような x，y の組が，不定方程式①の整数解となる。

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases},\quad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases},\quad \begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases},\quad \begin{cases} x=7 \\ y=-11 \end{cases}$$

一般に，n 任意の整数として，P の座標を用いて次のように表される点は，すべて①の表す直線上にある。

$(1+3n,\ -1-5n)$

このことは，不定方程式①のすべての整数解が

$$\begin{cases} x=3n+1 \\ y=-5n-1 \end{cases}$$

と表されることに対応している。

Training

（教科書 p. 90）

10 18 で割ると余りが 15 となる整数を 6 で割ったときの余りを求めよ。

11 整数 a，b について，a は 7 で割ると 2 余り，b は 7 で割ると 5 余る。このとき，次の数を求めよ。

(1) ab を 7 で割った余り　　(2) a^2+b^2 を 7 で割った余り

12 n を整数とするとき，n^2 を 4 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

13 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 4741，7327

(2) 8580，6292

14 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $8x+5y=1$

(2) $5x-12y=6$

15 不定方程式 $223x+105y=1$ のすべての整数解を求めよ。

数学のパノラマ　連続する整数の積

（教科書p.90）

連続する 2 個の整数 n，$n+1$ の一方は 2 の倍数であるから，積 $n(n+1)$ は 2 の倍数となる。

また，連続する 3 個の整数 n，$n+1$，$n+2$ のうち，少なくとも 1 つは 2 の倍数であり，さらにどれか 1 つは 3 の倍数である。よって，積 $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である。

一般に，連続する m 個の整数の積

$$n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m-1)$$

は，$m!$ の倍数であることが知られている。

２節 ユークリッドの互除法と不定方程式

1 除法の性質と整数の分類

除法の性質

（教科書 p.76）

一般に，次の（1 除法の性質 ）が成り立つ。

> 除法の性質
>
> aを整数，b を正の整数とし，a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると
>
> $$a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b$$

例1 150 を 16 で割ると，商が 9，余りが 6 であるから

$150 = 16 \times 9 + 6$

問1 次の a, b について，a を b で割った商 q と余り r を求め，$a = bq + r$ の形で表せ。

(1) $a = 41$，$b = 9$

41 を 9 で割ると，商が 4，余りが 5 であるから

$41 = 9 \times 4 + 5$

(2) $a = 120$，$b = 13$

120 を 13 で割ると，商が 9，余りが 3 であるから

$120 = 13 \times 9 + 3$

例題 1 整数 a を 10 で割ると余りが 8 となる。a を 5 で割ったときの余りを求めよ。

解 a を 10 で割ったときの商を q とすると，除法の性質より

$a = 10q + 8$

この式を変形すると $a = 5 \times 2q + 5 \times 1 + 3$

$= 5 \times (2q + 1) + 3$

（ $2q + 1$ ）は整数であるから，a を 5 で割った余りは（ 3 ）である。

問2 整数 a を 8 で割ると余りが 6 となる。a を 4 で割ったときの余りを求めよ。

a を 8 で割ったときの商を q とすると，除法の性質より

$a = 8q + 6$

この式を変形すると $a = 4 \times 2q + 4 \times 1 + 2$

$= 4 \times (2q + 1) + 2$

$2q + 1$ は整数であるから，a を 5 で割った余りは 2 である。

例題 2 整数 a, b について，a を 4 で割ると余りが 2，b を 4 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

(1) $a + b$ を 4 で割った余り　　(2) ab を 4 で割った余り

解 a を 4 で割った商を k, b を 4 で割った商を l とすると，余りはそれぞれ 2, 3 であるから，次のように表すことができる。

$a = 4k + 2$，$b = 4l + 3$

(1) $a + b = (4k + 2) + (4l + 3)$

$= 4(k + l) + 5$

$= 4(k + l) + 4 + 1$

$= 4(k + l + 1) + 1$

k, l は整数であるから，$k + l + 1$ は整数である。

よって，$a + b$ を 4 で割った余りは 1 である。

(2) $ab = (4k + 2)(4l + 3)$

$= 4k \cdot 4l + 4k \cdot 3 + 2 \cdot 4l + 2 \cdot 3$

$= 4(4kl + 3k + 2l) + 6$

$= 4(4kl + 3k + 2l) + 4 + 2$

$= 4(4kl + 3k + 2l + 1) + 2$

k, l は整数であるから，$4kl + 3k + 2l + 1$ は整数である。よって，ab を 4 で割った余りは 2 である。

問3 整数 a, b について，a を 5 で割ると余りが 4，b を 5 で割ると余りが 3 である。このとき，次の数を求めよ。

(1) ab を 5 で割った余り　　(2) $a+2b$ を 5 で割った余り

a を 5 で割った商を k，b を 5 で割った商を l とすると，余りはそれぞれ 4，3 であるから，次のように表すことができる。

$$a = 5k+4,\ b = 5l+3$$

(1) $ab = (5k+4)(5l+3)$
$= 5k\cdot 5l + 5k\cdot 3 + 4\cdot 5l + 4\cdot 3$
$= 5(5kl+3k+4l)+12$
$= 5(5kl+3k+4l)+5\cdot 2+2$
$= 5(5kl+3k+4l+2)+2$

k，l は整数であるから，$5kl+3k+4l+2$ は整数である。
よって，ab を 5 で割った余りは 2 である。

(2) $a+2b = (5k+4)+2(5l+3)$
$= 5k+2\cdot 5l+4+2\cdot 3$
$= 5\times(k+2l)+10$
$= 5\times(k+2l)+5\cdot 2$
$= 5\times(k+2l+2)$

k，l は整数であるから，$k+2l+2$ は整数である。よって，$a+2b$ を 5 で割った余りは 0 である。

整数の分類

（教科書 p.78）

一般に，整数を正の整数 m で割った余りによって分類すると，次のように表すことができる。

$\boldsymbol{mk,\ mk+1,\ mk+2,\cdots,\ mk+(m-1)}$　（k は整数）

例2 整数 n を 4 で割った余りによって分類すると，次のいずれかで表すことができる。

$n=4k$，$n=4k+1$，$n=4k+2$，$n=4k+3$　（k は整数）

問4 整数 n を 5 で割った余りによって分類すると，どのように表すことができるか。

$n=5k$，$n=5k+1$，$n=5k+2$，$n=5k+3$，$n=5k+4$　（k は整数）

例題 3 n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

証明 整数 n は，次のいずれかで表すことができる。

$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$　（k は整数）

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=9k^2=3\times 3k^2$

$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2$
$=9k^2+6k+1$
$=3\times(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2$
$=9k^2+12k+4$
$=9k^2+12k+3+1$
$=3\times(3k^2+4k+1)+1$

$3k^2$，$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，n^2 を 3 で割った余りは，0 か 1 のいずれかである。

問5 n を整数とするとき，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかであることを示せ。

整数 n は，次のいずれかで表すことができる。

$n=5k$，$n=5k+1$，$n=5k+2$，$n=5k+3$，$n=5k+4$　（k は整数）

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n=5k$ のとき　$n^2=(5k)^2=25k^2=5\cdot 5k^2$

$n=5k+1$ のとき　$n^2=(5k+1)^2$
$=25k^2+10k+1$
$=5\times(5k^2+2k)+1$

$n=5k+2$ のとき　$n^2=(5k+2)^2$
$=25k^2+20k+4$
$=5\times(5k^2+4k)+4$

$n=5k+3$ のとき　$n^2=(5k+3)^2$
$=25k^2+30k+9$
$=5\times(5k^2+6k+1)+4$

$n=5k+4$ のとき　$n^2=(5k+4)^2$
$=25k^2+40k+16$
$=5\times(5k^2+8k+3)+1$

$5k^2$，$5k^2+2k$，$5k^2+4k$，$5k^2+6k+1$，$5k^2+8k+3$ は整数であるから，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4 のいずれかである。

❷ ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法

（教科書 p.80）

2 つの正の整数 a, b $(a > b)$ の最大公約数について，次のことが成り立つ。

互除法の原理

a を b で割った商を q，余りを r とすると

$r \neq 0$ のとき

a と b の最大公約数と，

b と r の最大公約数は等しい。

$r = 0$ のとき

a と b の最大公約数は b である。

［a と b の最大公約数］

$a = bq + r$　等しい

［b と r の最大公約数］

互除法の原理をくり返し用いると，2 つの数の最大公約数を求めることができる。余りが 0 になるまで割り算をくり返すことによって最大公約数を求める方法を，

（1　ユークリッドの互除法　）または（2　互除法　）という。

例題 4　ユークリッドの互除法を用いて，754 と 273 の最大公約数を求めよ。

解

$754 = 273 \times 2 + 208$

$273 = 208 \times 1 + 65$

$208 = 65 \times 3 + 13$

$65 = 13 \times 5$

（745 と 273 の最大公約数）

＝（273 と 208 の最大公約数）

＝（208 と 65 の最大公約数）

＝（65 と 13 の最大公約数）

＝ 13

よって，754 と 273 の最大公約数は（　13　）である。

問6　ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 255，315

315 ÷ 255 の商は 1，余りは 60

255 ÷ 60 の商は 4，余りは 15

60 ÷ 15 の商は 4 で，割り切れる。

よって，60 と 15 の最大公約数は 15 である。

したがって

255 と 315 の最大公約数は 15

(2) 696，899

899 ÷ 696 の商は 1，余りは 203

696 ÷ 203 の商は 3，余りは 87

203 ÷ 87 の商は 2，余りは 29

87 ÷ 29 の商は 3 で，割り切れる。

よって，87 と 29 の最大公約数は 29 である。

したがって

696 と 899 の最大公約数は 29

例3 ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{114}{437}$ を約分してみよう。

$437 = 114 \times 3 + 95$

$114 = 95 \times 1 + 19$

$95 = 19 \times 5$

よって，95 と 19 の最大公約数は（ 19 ）である。

ゆえに，437 と 114 の最大公約数は（ 19 ）である。

ここで $437 \div 19 = 23$, $114 \div 19 = 6$

したがって $\frac{114}{437} = \frac{6}{23}$

問7 ユークリッドの互除法を用いて，$\frac{391}{667}$ を約分せよ。

$667 \div 391$ の商は 1，余りは 276

$391 \div 276$ の商は 1，余りは 115

$276 \div 115$ の商は 2，余りは 46

$115 \div 46$ の商は 2，余りは 23

$46 \div 23$ の商は 2 で，割り切れる。

よって，46 と 23 の最大公約数は 23 である。

ここで $667 \div 23 = 29$, $391 \div 23 = 17$

したがって

$$\frac{391}{667} = \frac{17}{29}$$

参考 互除法の原理の証明

（教科書 p.83）

2 つの正の整数 a, b $(a > b)$ について，次の互除法の原理を証明してみよう。

互除法の原理
a を b で割った商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数と，b と r の最大公約数は等しい。

証明 a と b の最大公約数を m, b と r の最大公約数を n とする。除法の性質より

$$a = bq + r \quad \cdots\cdots ①$$

①より

$$r = a - bq \quad \cdots\cdots ②$$

②より，a と b の公約数は r の約数である。

すなわち，a と b の公約数は，b と r の公約数でもある。とくに，a と b の最大公約数 m は，b と r の公約数となるから

$$m \leqq n \quad \cdots\cdots ③$$

逆に，①より b と r の公約数は，a の約数である。

すなわち，b と r の公約数は，a と b の公約数でもある。とくに，b と r の最大公約数 n は，a と b の公約数となるから

$$n \leqq m \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ より $m = n$

したがって

a と b の最大公約数 m は，b と r の最大公約数 n に等しい。

③ 不定方程式

不定方程式とその解

（教科書 p.84）

一般に，a，b，c を整数とするとき，x，y に関する方程式

$$\boldsymbol{ax+by=c}$$

を，(1　2 元 1 次不定方程式　)という。また，2 元 1 次不定方程式を満たす整数 x，y の組を 2 元 1 次不定方程式の（2　整数解　）という。

整数解の求め方

（教科書 p.85）

一般に，互いに素である 2 つの整数について，次のような性質がある。

> a と b が互いに素であり，$ax=by$ が成り立つとき，整数 x は b の倍数であり，整数 y は a の倍数である。

例4 不定方程式 $5x-4y=0$ のすべての整数解を求めてみよう。

式を変形すると　$5x=4y$　……①

ここで，5 と 4 は互いに素であるから，x は 4 の倍数である。

よって　$x=4n$　（n は整数）　……②

と表すことができる。

②を①に代入すると $5\cdot 4n=4y$

y について解くと　$y=5n$

すなわち，求めるすべての整数解は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} x=4n \\ y=5n \end{cases} \quad (n\text{ は整数}) \quad \cdots\cdots③$$

③の n に整数を代入したときにできる整数の組が，求める整数解である。

問8 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $7x-5y=0$

$7x=5y$　……①

7 と 5 は互いに素であるから，x は 5 の倍数である。

よって　$x=5n$　（n は整数）

とおける。これを①に代入して変形すると

$y=7n$

すなわち，すべての整数解は

$$\begin{cases} x=5n \\ y=7n \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

(2) $5x+6y=0$

$5x=-6y$　……①

5 と 6 は互いに素であるから，x は 6 の倍数である。

よって　$x=6n$　（n は整数）

とおける。これを①に代入して変形すると

$y=-5n$

すなわち，すべての整数解は

$$\begin{cases} x=6n \\ y=-5n \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

例題 5 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

$5x+3y=2$ ……①

解 $x=1$，$y=-1$ の組は，①の整数解の 1 つである。

すなわち $5\cdot1+3\cdot(-1)=2$ ……②

①，② の両辺の差をとると

$5(x-1)+3(y+1)=0$

よって $5(x-1)=-3(y+1)$ ……③

5 と 3 は互いに素であるから，$x-1$ は 3 の倍数である。

よって $x-1=3n$ （n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

$y+1=-5n$

したがって，求めるすべての整数解は

$\begin{cases} x=3n+1 \\ y=-5n-1 \end{cases}$ （n は整数）

問9 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $2x+3y=10$ ……①

$x=2$，$y=2$ の組は，①の整数解の 1 つである。すなわち

$2\cdot2+3\cdot2=10$ ……②

①，②の両辺の差をとると

$2(x-2)+3(y-2)=0$

よって $2(x-2)=-3(y-2)$ ……③

2 と 3 は互いに素であるから，$x-2$ は 3 の倍数である。

よって $x-2=3n$ （n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

$y-2=-2n$

したがって，すべての整数解は

$\begin{cases} x=3n+2 \\ y=-2n+2 \end{cases}$ （n は整数）

(2) $5x-7y=1$ ……①

$x=3$，$y=2$ の組は，①の整数解の 1 つである。すなわち

$5\cdot3-7\cdot2=1$ ……②

①，②の両辺の差をとると

$5(x-3)-7(y-2)=0$

よって $5(x-3)=7(y-2)$ ……③

5 と 7 は互いに素であるから，$x-3$ は 7 の倍数である。

よって $x-3=7n$ （n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

$y-2=5n$

したがって，すべての整数解は

$\begin{cases} x=7n+3 \\ y=5n+2 \end{cases}$ （n は整数）

ユークリッドの互除法と不定方程式の整数解

（教科書 p.87）

例題 6 不定方程式 $93x+40y=1$ の整数解を 1 つ求めよ。

解 ユークリッドの互除法により，93 と 40 の最大公約数を調べる。

$93=40\times2+13$ ……①

$40=13\times3+1$ ……②

$13=1\times13$

よって，93 と 40 は，最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

ここで，①，②の余り以外の項を移項すると

①より　$93-40\times2=13$ ……③

②より　$40-13\times3=1$ ……④

③の 13 を④に代入すると

$40-(93-40\times2)\times3=1$

93 と 40 の項について整理すると

$40-93\times3+40\times2\times3=1$

$93\cdot(-3)+40\cdot7=1$

したがって，求める整数解の 1 つは $\begin{cases}x=-3\\y=7\end{cases}$

問 10 不定方程式 $163x+78y=1$ の整数解を 1 つ求めよ。

ユークリッドの互除法により，163 と 78 の最大公約数を求めると

$163\div78$ の商は 2，余りは 7 ……①

$78\div7$ の商は 11，余りは 1 ……②

$7\div1$ の商は 7 で，割り切れる。

よって，163 と 78 は，最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

除法の性質を用いて，①，②の関係を表すと

$163=78\times2+7$ ……③

$78=11\times7+1$ ……④

③より　$163-78\times2=7$ ……⑤

④より　$78-11\times7=1$ ……⑥

⑤を⑥に代入すると

$78-11\times(163-78\times2)=1$

163 と 78 の項について整理すると

$163\cdot(-11)+78\cdot23=1$

したがって，求める整数解の 1 つは $\begin{cases}x=-11\\y=23\end{cases}$

Challenge 例題 不定方程式の応用

（教科書 p.88）

例題 3 で割ると 1 余り，5 で割ると 2 余るような 2 桁の整数のうち，最大のものを求めよ。

解 求める整数を k とし，整数 x, y を用いて

$k=3x+1$,　$k=5y+2$

と表すと

$3x+1=5y+2$

よって　$3x-5y=1$ ……①

$x=2$，$y=1$ は①の整数解の 1 つであるから

$3\cdot2-5\cdot1=1$ ……②

①，②の両辺の差をとると　$3(x-2)-5(y-1)=0$

$3(x-2)=5(y-1)$

3 と 5 は互いに素であるから，$x-2$ は5 の倍数である。

よって　$x-2=5n$　（n は整数）

とおける。

ゆえに　$x=5n+2$

よって　$k=3x+1=3(5n+2)+1=15n+7$

$15n+7$ が 2 桁の整数のうち最大となるのは

$15n+7\leqq99$

$n\leqq6.1\cdots$

より，$n=6$ のときである。したがって，2 桁の最大の整数は

$k=15\cdot6+7=97$

問1 5 で割ると 2 余り，7 で割ると 3 余るような 3 桁の整数のうち，最小のものを求めよ。

求める整数を k とし，整数 $x,\ y$ を用いて

$$k = 5x + 2, \qquad k = 7y + 3$$

と表すと

$$5x + 2 = 7y + 3$$

よって　$5x - 7y = 1$

教科書 86 ページの問 9（2）で求めたように

$$x = 7n + 3 \quad (n \text{ は整数})$$

と表すことができる。

よって

$$\begin{aligned} k &= 5(7n + 3) + 2 \\ &= 35n + 15 + 2 \\ &= 35n + 17 \end{aligned}$$

$35n + 17$ が 3 桁の整数のうち最小となるのは

$$35n + 17 \geqq 100$$
$$35n \geqq 83$$
$$n \geqq 2.3\cdots$$

より，$n = 3$ のときである。したがって，3 桁の最小の整数は

$$k = 35 \cdot 3 + 17 = 122$$

参考　1次関数のグラフと不定方程式の整数解

（教科書 p.89）

不定方程式の整数解の意味を 1 次関数のグラフを用いて考えてみよう。

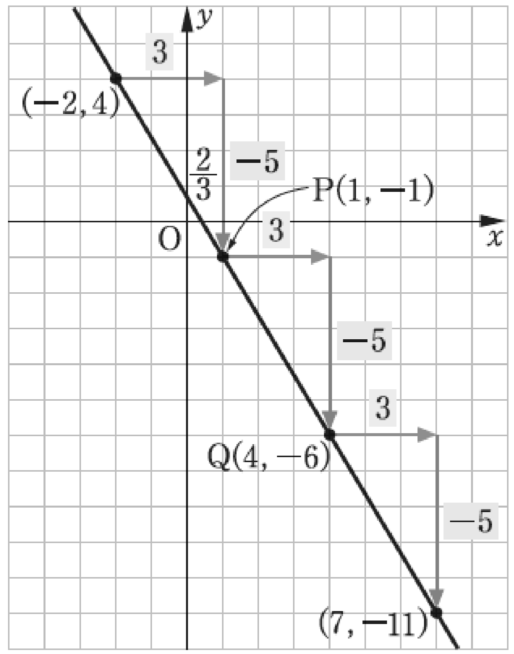
$$5x + 3y = 2 \qquad \cdots\cdots①$$

は　$y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

と変形されるから，傾き $-\frac{5}{3}$ の直線を表す。ここで，点 P(1, −1) は①の表す直線上の点であり，

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

の組は，不定方程式①の整数解の 1 つである。このように，①の表す直線上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点と，不定方程式①の整数解が対応している。



右上の図において，P(1, −1) を x 軸方向に 3，y 軸方向に −5 だけ移動した点 Q(4, −6) もこの直線上にある。さらに (−2, 4)，(7, −11) なども，この直線上の点である。

したがって，次のような $x,\ y$ の組が，不定方程式①の整数解となる。

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 7 \\ y = -11 \end{cases}$$

一般に，n 任意の整数として，P の座標を用いて次のように表される点は，すべて①の表す直線上にある。

$$(1 + 3n,\ -1 - 5n)$$

このことは，不定方程式①のすべての整数解が

$$\begin{cases} x = 3n + 1 \\ y = -5n - 1 \end{cases}$$

と表されることに対応している。

Training

（教科書 p. 90）

10 18 で割ると余りが 15 となる整数を 6 で割ったときの余りを求めよ。

割られる数を a とし，a を 18 で割ったときの商を q とすると，除法の性質より

$a=18q+15$

この式を変形すると $a=6\times 3q+6\times 2+3$

$=6\times(3q+2)+3$

$3q+2$ は整数であるから，a を 6 で割った余りは 3 である。

11 整数 a，b について，a は 7 で割ると 2 余り，b は 7 で割ると 5 余る。このとき，次の数を求めよ。

(1) ab を 7 で割った余り　(2) a^2+b^2 を 7 で割った余り

a を 7 で割った商を k，b を 7 で割った商を l とすると，余りはそれぞれ 2，5 であるから，次のように表すことができる。

$a=7k+2$，$b=7l+5$

(1) $ab=(7k+2)(7l+5)$

$=7k\cdot 7l+7k\cdot 5+2\cdot 7l+2\cdot 5$

$=7(7kl+5k+2l)+10$

$=7(7kl+5k+2l)+7+3$

$=7(7kl+5k+2l+1)+3$

k，l は整数であるから，$7kl+5k+2l+1$ は整数である。

よって，ab を 7 で割った余りは 3 である。

〔別解〕ab を 7 で割った余りは，a，b をそれぞれ 7 で割った余り 2，5 を掛け合わせた値 10 を 7 で割った余りと一致する。10 を 7 で割った余りは 3 であるから，求める余りは　3

(2) $a^2=(7k+2)^2$

$=7^2k^2+2\cdot 7k\cdot 2+2^2$

$=7(7k^2+4k)+4$

$b^2=(7l+5)^2$

$=7^2l^2+2\cdot 7l\cdot 5+5^2$

$=7(7l^2+10l)+25$

よって

$a^2+b^2=7(7k^2+4k+7l^2+10l)+29$

$=7(7k^2+4k+7l^2+10l+4)+1$

k，l は整数であるるから，

$7k^2+4k+7l^2+10l+4$ は整数である。よって，a^2+b^2 を 7 で割った余りは 1 である。

〔別解〕a^2+b^2 を 7 で割った余りは，a，b をそれぞれ 7 で割った余り 2，5 の 2 乗の和 $2^2+5^2=4+25=29$ を 7 で割った余りと一致する。29 を 7 で割ると余りは 1 であるから求める余りは　1

12 n を整数とするとき，n^2 を 4 で割った余りは，0 か 1 のいずれかであることを示せ。

整数 n は，次のいずれかで表すことができる。

$n=4k$，$n=4k+1$，$n=4k+2$，$n=4k+3$　（k は整数）

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n=4k$ のとき　$n^2=(4k)^2=16k^2=4\times 4k^2$

$n=4k+1$ のとき　$n^2=(4k+1)^2$

$=16k^2+8k+1$

$=4\times(4k^2+2k)+1$

$n=4k+2$ のとき　$n^2=(4k+2)^2$

$=16k^2+16k+4$

$=4\times(4k^2+4k+1)$

$n=4k+3$ のとき　$n^2=(4k+3)^2$

$=16k^2+24k+9$

$=4\times(4k^2+6k+2)+1$

$4k^2$，$4k^2+2k$，$4k^2+4k+1$，$4k^2+6k+2$ は整数であるから，n^2 を 4 で割った余りは，0 か 1 のいずれかである。

13 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 4741，7327

7327 ÷ 4741 の商は 1，余りは 2586

4741 ÷ 2586 の商は 1，余りは 2155

2586 ÷ 2155 の商は 1，余りは 431

2155 ÷ 431 の商は 5 で，割り切れる。

よって，2155 と 431 の最大公約数は 431 である。

したがって

7327 と 4741 の最大公約数は 431

(2) 8580，6292

8580 ÷ 6292 の商は 1，余りは 2288

6292 ÷ 2288 の商は 2，余りは 1716

2288 ÷ 1716 の商は 1，余りは 572

1716 ÷ 572 の商は 3 で，割り切れる。

よって，1716 と 572 の最大公約数は 572 である。

したがって

8580 と 6292 の最大公約数は 572

14 次の不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $8x+5y=1$ ……①

$x=2$，$y=-3$ の組は，①の整数解の 1 つである。すなわち

$8\cdot 2+5\cdot(-3)=1$ ……②

①，②の両辺の差をとると

$8(x-2)+5(y+3)=0$

よって　$8(x-2)=-5(y+3)$ ……③

8 と 5 は互いに素であるから，$x-2$ は 5 の倍数である。

よって　$x-2=5n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

$y+3=-8n$

したがって，すべての整数解は

$$\begin{cases} x=5n+2 \\ y=-8n-3 \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

(2) $5x-12y=6$ ……①

$x=6$，$y=2$ の組は，①の整数解の 1 つである。すなわち

$5\cdot 6-12\cdot 2=6$ ……②

①，②の両辺の差をとると

$5(x-6)-12(y-2)=0$

よって　$5(x-6)=12(y-2)$ ……③

5 と 12 は互いに素であるから，$x-6$ は 12 の倍数である。

よって　$x-6=12n$　（n は整数）

とおける。これを③に代入して変形すると

$y-2=5n$

したがって，すべての整数解は

$$\begin{cases} x=12n+6 \\ y=5n+2 \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

15 不定方程式 $223x+105y=1$ のすべての整数解を求めよ。

$223x+105y=1$ ……①

$223\div 105$ の商は 2，余りは 13 ……②

$105\div 13$ の商は 8，余りは 1 ……③

$13\div 1$ の商は 13 で，割り切れる。

よって，223 と 105 は，最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

除法の性質を用いて，②，③の関係を表すと

$223=105\times 2+13$ ……④

$105=13\times 8+1$ ……⑤

④より　$223-105\times 2=13$ ……⑥

⑤より　$105-13\times 8=1$ ……⑦

⑥を⑦に代入すると

$105-(223-105\times 2)\times 8=1$

223 と 105 の項について整理すると

$223\cdot(-8)+105\cdot 17=1$ ……⑧

①，⑧の両辺の差をとると

$223(x+8)+105(y-17)=0$

よって

$223(x+8)=-105(y-17)$ ……⑨

223 と 105 は互いに素であるから，$x+8$ は 105 の倍数である。

よって　$x+8=105n$　（n は整数）

とおける。これを⑨に代入して変形すると

$y-17=-223n$

したがって，すべての整数解は

$$\begin{cases} x=105n-8 \\ y=-223n+17 \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

数学のパノラマ　連続する整数の積

（教科書p.90）

連続する 2 個の整数 n，$n+1$ の一方は 2 の倍数であるから，積 $n(n+1)$ は 2 の倍数となる。

また，連続する 3 個の整数 n，$n+1$，$n+2$ のうち，少なくとも 1 つは 2 の倍数であり，さらにどれか 1 つは 3 の倍数である。よって，積 $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である。

一般に，連続する m 個の整数の積

$$n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+m-1)$$

は，$m!$ の倍数であることが知られている。