1節 約数と倍数

❶ 約数と倍数，素因数分解

（教科書 p.62）

1, 2, 3, …を（[1]　　　　　）または（[2]　　　　　）という。-1, -2, -3, …を（[3]　　　　　）という。正の整数，負の整数，および 0 を合わせて（[4]　　　　　）という。

約数と倍数

（教科書 p.62）

一般に，2 つの整数 a，b に対して

$$a = bc$$

となる整数 c が存在するとき，b を a の（[5]　　　　　），a を b の（[6]　　　　　）という。

例1 $6 = 2 \times 3$ より，2 は 6 の（　　　　　）である。
また，$6 = (-2) \times (-3)$ であるから，-2 も 6 の（　　　　　）である。

例2 $6 = 2 \times 3$ より，6 は 2 の（　　　　　）である。
また，$-6 = 2 \times (-3)$ であるから，-6 も 2 の（　　　　　）である。

例3 (1) 6 の正の約数は，（　　　　　　　　）。
(2) 6 の正の倍数は，（　　　　　　　　　　　　）。

問1 12 の正の約数をすべて求めよ。また，12 の正の倍数で 50 以下であるものをすべて求めよ。

いろいろな数の倍数

（教科書 p.63）

例4 123 は，$1 + 2 + 3 = 6$ より，3 の倍数である。また，124 は，$1 + 2 + 4 = 7$ より，

一般に，整数が 2, 3, 4, 5, 8, 9 の倍数になるかどうかについて，次のような判定法が知られている。

倍数の判定法	
2 の倍数	一の位が　0，2，4，6，8
3 の倍数	各位の数の和が 3 で割り切れる
4 の倍数	下 2 桁が 4 で割り切れる
5 の倍数	一の位が　0，5
8 の倍数	下 3 桁が 8 で割り切れる
9 の倍数	各位の数の和が 9 で割り切れる

例5 5124 は，2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 のうち，どの数の倍数であるか判定してみよう。
一の位が 4 であるから，2 の倍数であり，5 の倍数ではない。$5 + 1 + 2 + 4 = 12$ より，3 の倍数であり，9 の倍数ではない。2 の倍数であり，3 の倍数であるから，6 の倍数である。
下 2 桁の 24 は 4 で割り切れるから，（　　　　　　　　）。
下 3 桁の 124 は 8 で割り切れないから，（　　　　　　　　）。

問2 次の数は，2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 のうち，どの数の倍数であるか答えよ。

(1) 210

(2) 604

(3) 3960

素因数分解

（教科書 p.65）

1 とその数のほかに約数がない 2 以上の整数を（7　　　　　）という。1 でも素数でもない正の整数を（8　　　　　）という。

約数のことを（9　　　　　）ともいう。因数が素数であるとき，これを（10　　　　　）という。すべての合成数は素数の積の形で表すことができ，その表し方はその積の順序の違いを除いて 1 通りである。素数の積の形で表すことを（11　　　　　）という。

正の整数 $\begin{cases} 1 \\ \text{素数}\ (2, 3, 5, 7, \cdots) \\ \text{合成数}\ (4, 6, 8, 9, \cdots) \end{cases}$

例6 90 を素因数分解してみよう。

素因数分解するときには，小さい素数から順に割っていくとよい。

$90 =$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

問3 次の数を素因数分解せよ。

(1) 195

(2) $308 =$

例7 84 に正の整数 n を掛けて，ある整数の 2 乗の数になるようにしたい。このような n のうち最小のものを求めてみよう。

84 を素因数分解すると　$84 =$

よって，$84n$ がある整数の 2 乗になるような最小の n は $n = 3 \cdot 7$ である。このとき

$84n =$

したがって，求める整数は　$n =$

問4 次の数に正の整数 n を掛けて，ある整数の 2 乗の数になるようにしたい。このような n のうち最小のものを求めよ。

(1) 60

(2) 168

素因数分解と約数

（教科書 p.66）

例8 18 の正の約数をすべて求めてみよう。

18 を素因数分解すると

2 の正の約数は

3^2 の正の約数は

2 の約数のおのおのに　　　の約数のそれぞれを掛けると，18 の約数のすべてが得られる。

	1	3	3^2
1	1	3	9
2	2	6	18

よって，18 の正の約数は

問5 素因数分解を用いて，次の数の正の約数をすべて求めよ。

（1）36

⑵ 117

約数の利用

（教科書 p.66）

例9 $ab=6$ を満たす整数 a，b の組をすべて求めてみよう。

a と b はともに 6 の約数であるから，a，b の組は次の 8 つである。

$$\begin{cases}a=1\\b=6,\end{cases}\quad\begin{cases}a=2\\b=3,\end{cases}\quad\begin{cases}a=3\\b=2,\end{cases}\quad\begin{cases}a=6\\b=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-1\\b=-6,\end{cases}\quad\begin{cases}a=-2\\b=-3,\end{cases}\quad\begin{cases}a=-3\\b=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}a=-6\\b=-1,\end{cases}$$

問6 次の等式を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

（1）$ab=7$

⑵ $ab=-4$

$$\begin{cases}a=1\\b=-4,\end{cases}\quad\begin{cases}a=2\\b=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}a=4\\b=-1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-1\\b=4\ ,\end{cases}\quad\begin{cases}a=-2\\b=2\ ,\end{cases}\quad\begin{cases}a=-4\\b=1\end{cases}$$

例題 1 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $(a-2)(b+3)=-5$　　(2) $ab+3a+2b=1$

解 (1) a, b は整数であるから，この等式を満たす $a-2$ と $b+3$ の組を求めると，右の表のようになる。

$a-2$	1	-1	5	-5
$b+3$	-5	5	-1	1

したがって，整数 a, b の組は

$\begin{cases} a=3 \\ b=-8 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=7 \\ b=-4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$

(2) $ab+3a+2b=1$ より

$$a(b+3)+2b=1$$
$$a(b+3)+2b+6=1+6$$
$$a(b+3)+2(b+3)=7$$
$$(a+2)(b+3)=7 \quad \cdots\cdots①$$

a, b は整数であるから，①の等式を満たす $a+2$ と $b+3$ の組を求めると，右の表のようになる。したがって，整数 a, b の組は

$a+2$	1	-1	7	-7
$b+3$	7	-7	1	-1

$\begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-3 \\ b=-10 \end{cases}$, $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-9 \\ b=-4 \end{cases}$

問7 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $(a-3)(b+5)=7$

(2) $ab-2a+b=4$

(3) $ab+2a-4b=3$

② 最大公約数と最小公倍数

公約数と最大公約数

（教科書 p.68）

いくつかの正の整数に共通な約数を，それらの整数の（¹　　　　　　）という。また，公約数のうち最大のものを（²　　　　　　）という。

例 10 素因数分解を用いて， 60 と 280 の最大公約数を求めてみよう。

$$\begin{array}{rcllll} 60 & = & \boxed{2\times 2} & & \times\ 3\ \times & \boxed{5} \\ 280 & = & \boxed{2\times 2} & \times\ 2 & \times & \boxed{5} \times 7 \\ \hline & & 2\times 2 & & \times & 5 \quad = 20 \end{array}$$

60 と 280 を素因数分解すると

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

2 つの数に共通な素因数について，右上の図のように個数の少ないものを取り出して，それらを掛け合わせたものが，公約数のうちで最大となる。

よって，求める最大公約数は

$2^2 \cdot 5 = 20$

問8 135 と 225 の最大公約数を求めよ。

互いに素

（教科書 p.69）

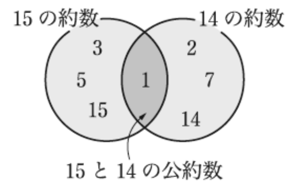
2 つの整数 a, b について，最大公約数が 1 であるとき，a, b は（³　　　　　　）であるという。

例 11 14 と 15 について，

$14 = 2 \cdot 7$,　$15 = 3 \cdot 5$

であり，最大公約数が（　　　　）である。

よって，14 と 15 は（　　　　　　　　）。

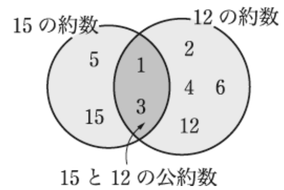


また，12 と 15 について，

$12 = 2^2 \cdot 3$，$15 = 3 \cdot 5$

であり，最大公約数は（　　　　）である。

よって，12 と 15 は（　　　　　　　　）。



問9 次の 2 つの数が互いに素であるかどうか答えよ。

(1) 4, 7

(2) 16, 21

(3) 26, 39

公倍数と最小公倍数

（教科書 p.70）

いくつかの正の整数に共通な倍数を，それらの整数の（4　　　　　　　）という。また，公倍数のうち最小のものを（5　　　　　　　）という。

例12 素因数分解を用いて，36 と 90 の最小公倍数を求めてみよう。

36 と 90 を素因数分解すると

36 =

90 =

2 つの数に共通な素因数については，右上の図のように個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものが，公倍数のうちで最小となる。

$$
\begin{array}{rllll}
36= & 2\times 2 & \times\ 3\times 3 & & \\
90= & 2 & \times\ 3\times 3 & \times\ 5 & \\
\hline
 & 2\times 2 & \times\ 3\times 3 & \times\ 5 & =180
\end{array}
$$

よって，求める最小公倍数は

=

問 10 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 120 と 168

(2) 300 と 630

3つの整数の最大公約数と最小公倍数

（教科書 p.71）

例 13 素因数分解を用いて，48，72，90 の最大公約数，最小公倍数を求めてみよう。48，72，90 をそれぞれ素因数分解すると

48 =　　，　72 =　　，　90 =

まず，最大公約数は，3 つの数に共通な素因数について，右の図のように，個数の少ないものを取り出し，それらを掛け合わせたものであるから

$$
\begin{array}{rlll}
48= & 2 & \times 2\times 2\times 2\times & 3 \\
72= & 2 & \times 2\times 2\quad\times & 3\times 3 \\
90= & 2 & \times & 3\times 3\times 5 \\
\hline
 & 2 & \times & 3 \quad =6
\end{array}
$$

一方，最小公倍数は，3 つの数に共通な素因数については，右の図のように個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものであるから

$$
\begin{array}{rllll}
48= & 2\times 2\times 2\times 2 & \times\ 3 & & \\
72= & 2\times 2\times 2 & \times\ 3\times 3 & & \\
90= & 2 & \times\ 3\times 3 & \times\ 5 & \\
\hline
 & 2\times 2\times 2\times 2 & \times\ 3\times 3 & \times\ 5 & =720
\end{array}
$$

問 11 次の 3 つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 9，12，21

(2) 60，120，150

最大公約数･最小公倍数の関係

（教科書 p.72）

一般に，最大公約数と最小公倍数について，次のことが成り立つ。

最大公約数･最小公倍数の関係
2 つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると [1] $\boldsymbol{a = a'g}$，$\boldsymbol{b = b'g}$ と表される。（ただし，a' と b' は互いに素） [2] $\boldsymbol{l = a'b'g}$ [3] $\boldsymbol{gl = ab}$

例14 100 と 120 の最大公約数が 20 であることを用いて，最小公倍数 l を求めてみよう。

$$20 \cdot l = 100 \cdot 120$$

より　$l =$

問 12 135 と 315 の最大公約数が 45 であることを用いて，最小公倍数を求めよ。

例題 2 最大公約数が 6，最小公倍数が 144 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

解 求める 2 つの正の整数を a，$b(a \leqq b)$ とする。

最大公約数が 6 であるから，互いに素な a'，$b'(a' \leqq b')$を用いて

$$a = 6a', \qquad b = 6b' \quad \cdots\cdots①$$

と表すことができる。

このとき，a，b の最小公倍数 144 は，a'，b'，最大公約数 6 を用いて

よって

これを満たす互いに素である a' と b' の組は

$\begin{cases} a' = \\ b' = \end{cases}$，$\begin{cases} a' = \\ b' = \end{cases}$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

問 13 最大公約数が 8，最小公倍数が 96 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

数学のパノラマ エラトステネスのふるい

（教科書p.74）

素数を求める方法として，**「エラトステネスのふるい」**とよばれるものが知られている。この方法を用いて，50 以下の素数を求めてみよう。

① 1 から 50 までの整数を書き並べる。
② 1 は素数ではないから消す。
③ 最小の数 2 は素数である。
④ 2 より大きい 2 の倍数を消す。それらの数は約数に 2 をもつから合成数である。
⑤ 残った数のうち，最小の数 3 は素数である。
⑥ 3 より大きい 3 の倍数を消す。それらの数は約数に 3 をもつから合成数である。
⑦ 同様に，残った数のうち最小の数 5，7，…についても作業を続ける。
⑧ 残った数が素数である。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

この方法によって，50 以下の素数は

であることがわかる。

エラトステネスは，紀元前 200 年頃活躍したギリシャの数学者である。

Training

（教科書 p.75）

1 6 桁の正の整数 $481a60$ について，次の問に答えよ。

(1) この整数が 9 で割り切れるときの百の位の数 a を求めよ。

(2) この整数が 24 で割り切れるときの百の位の数 a を求めよ

2 $\sqrt{2160n}$ が整数となるような正の整数 n のうち最小のものを求めよ。

3 次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 112

(2) 200

4 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $ab + a + b + 5 = 0$

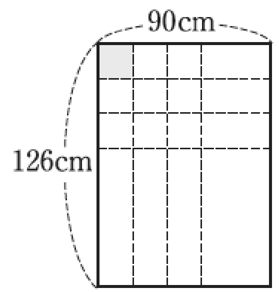
(2) $ab - 3a + 4b - 27 = 0$

5 次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 504 と 540

(2) 1470 と 2835

6 縦 126cm，横 90cm の長方形の壁に，同じ大きさの正方形のタイルをすき間なく敷き詰める。タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



7 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 450 と 980

(2) 390 と 819

8 次の 3 つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 42，84，90

(2) 65，78，104

9 最大公約数が 12，最小公倍数が 420 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

１節 約数と倍数

❶ 約数と倍数，素因数分解

（教科書 p.62）

1，2，3，…を（[1] 正の整数 ）または（[2] 自然数 ）という。−1，−2，−3，…を（[3] 負の整数 ）という。正の整数，負の整数，および 0 を合わせて（[4] 整数 ）という。

約数と倍数

（教科書 p.62）

一般に，2 つの整数 a，b に対して

$a = bc$

となる整数 c が存在するとき，b を a の（[5] 約数 ），a を b の（[6] 倍数 ）という。

例1 $6 = 2 \times 3$ より，2 は 6 の（ 約数 ）である。
また，$6 = (-2) \times (-3)$ であるから，−2 も 6 の（ 約数 ）である。

例2 $6 = 2 \times 3$ より，6 は 2 の（ 倍数 ）である。
また，$-6 = 2 \times (-3)$ であるから，−6 も 2 の（ 倍数 ）である。

例3 (1)6 の正の約数は，（ 1，2，3，6 である ）。
(2)6 の正の倍数は，（ 6，12，18，24，…であり，無数にある ）。

問1 12 の正の約数をすべて求めよ。また，12 の正の倍数で 50 以下であるものをすべて求めよ。
12 の正の約数は，1，2，3，4，6，12 である。
12 の正の倍数で 50 以下であるものは，12，24，36，48 である。

いろいろな数の倍数

（教科書 p.63）

例4 123 は，$1 + 2 + 3 = 6$ より，3 の倍数である。また，124 は，$1 + 2 + 4 = 7$ より，3 の倍数ではない。

一般に，整数が 2，3，4，5，8，9 の倍数になるかどうかについて，次のような判定法が知られている。

倍数の判定法

2 の倍数	一の位が 0，2，4，6，8
3 の倍数	各位の数の和が 3 で割り切れる
4 の倍数	下 2 桁が 4 で割り切れる
5 の倍数	一の位が 0，5
8 の倍数	下 3 桁が 8 で割り切れる
9 の倍数	各位の数の和が 9 で割り切れる

例5 5124 は，2，3，4，5，6，8，9 のうち，どの数の倍数であるか判定してみよう。
一の位が 4 であるから，2 の倍数であり，5 の倍数ではない。$5 + 1 + 2 + 4 = 12$ より，3 の倍数であり，9 の倍数ではない。2 の倍数であり，3 の倍数であるから，6 の倍数である。
下 2 桁の 24 は 4 で割り切れるから，（ 4 の倍数である ）。
下 3 桁の 124 は 8 で割り切れないから，（ 8 の倍数ではない ）。

問2 次の数は，2，3，4，5，6，8，9 のうち，どの数の倍数であるか答えよ。

(1) 210

210 は，
一の位が 0 より，2 の倍数，5 の倍数であるから
$2 + 1 + 0 = 3$ より，3 の倍数
2 の倍数で 3 の倍数より，6 の倍数

(2) 604

604 は，
一の位が 4 より，2 の倍数
下 2 桁の 4 は 4 で割り切れるから，4 の倍数

(3) 3960

3960 は，
一の位が 0 より，2 の倍数，5 の倍数
$3 + 9 + 6 + 0 = 18$ は，3，9 で割り切れるから，3 の倍数，9 の倍数
下 2 桁 60 は 4 で割り切れるから，4 の倍数
2 の倍数であり，3 の倍数より，6 の倍数
下 3 桁の 960 は 8 で割り切れるから，8 の倍数

素因数分解

（教科書 p.65）

1 とその数のほかに約数がない 2 以上の整数を（[7] 素数 ）という。1 でも素数でもない正の整数を（[8] 合成数 ）という。

約数のことを（[9] 因数 ）ともいう。因数が素数であるとき，これを（[10] 素因数 ）という。すべての合成数は素数の積の形で表すことができ，その表し方はその積の順序の違いを除いて 1 通りである。素数の積の形で表すことを（[11] 素因数分解 ）という。

$$\text{正の整数}\begin{cases}1\\ \text{素数}\ (2, 3, 5, 7, \cdots)\\ \text{合成数}\ (4, 6, 8, 9, \cdots)\end{cases}$$

例6 90 を素因数分解してみよう。

素因数分解するときには，小さい素数から順に割っていくとよい。

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

```
2) 90
3) 45
3) 15
    5
```

問3 次の数を素因数分解せよ。

(1) $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$

```
3) 195
5)  65
    13
```

(2) $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$

```
2) 308
2) 154
7)  77
    11
```

例7 84 に正の整数 n を掛けて，ある整数の 2 乗の数になるようにしたい。このような n のうち最小のものを求めてみよう。

84 を素因数分解すると　$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

よって，$84n$ がある整数の 2 乗になるような最小の n は $n = 3 \cdot 7$ である。このとき

$$84n = (2^2 \cdot 3 \cdot 7) \times (3 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^2$$

したがって，求める整数は　$n = 3 \cdot 7 = 21$

問4 次の数に正の整数 n を掛けて，ある整数の 2 乗の数になるようにしたい。このような n のうち最小のものを求めよ。

(1) 60

60 を素因数分解すると　$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

よって，$60n$ がある整数の 2 乗になるような最小の n は

$n = 3 \cdot 5 = 15$

(2) 168

168 を素因数分解すると $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

よって，$168n$ がある整数の 2 乗になるような最小の n は

$n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

素因数分解と約数

（教科書 p.66）

例8 18 の正の約数をすべて求めてみよう。

18 を素因数分解すると　$18 = 2 \cdot 3^2$

2 の正の約数は　1, 2

3^2 の正の約数は　1, 3, 3^2

2 の約数のおのおのに　3^2　の約数のそれぞれを掛けると，18 の約数のすべてが得られる。

$1 \cdot 1 = 1,\quad 1 \cdot 3 = 3,\quad 1 \cdot 3^2 = 9$

$2 \cdot 1 = 2,\quad 2 \cdot 3 = 6,\quad 2 \cdot 3^2 = 18$

よって，18 の正の約数は　1, 2, 3, 6, 9, 18

	1	3	3^2
1	1	3	9
2	2	6	18

問5 素因数分解を用いて，次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 36

36 を素因数分解すると　$36 = 2^2 \cdot 3^2$

2^2 の正の約数は　1, 2, 2^2

3^2 の正の約数は　1, 3, 3^2

2^2 の約数のおのおのに 3^2 の約数のそれぞれを掛けると，36 の約数のすべてが得られる。

$1 \cdot 1 = 1,\quad 1 \cdot 3 = 3,\quad 1 \cdot 3^2 = 9$

$2 \cdot 1 = 2,\quad 2 \cdot 3 = 6,\quad 2 \cdot 3^2 = 18$

$2^2 \cdot 1 = 4,\quad 2^2 \cdot 3 = 12,\quad 2^2 \cdot 3^2 = 36$

よって，36 の正の約数は　1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

(2) 117

117 を素因数分解すると　$117 = 3^2 \cdot 13$

3^2 の正の約数は　1, 3, 3^2

13 の正の約数は　1, 13

3^2 の約数のおのおのに 13 の約数のそれぞれを掛けると，117 の約数のすべてが得られる。

$1 \cdot 1 = 1,\quad 1 \cdot 13 = 13$

$3 \cdot 1 = 3,\quad 3 \cdot 13 = 39$

$3^2 \cdot 1 = 9,\quad 3^2 \cdot 13 = 117$

よって，117 の正の約数は　1, 3, 9, 13, 39, 117

約数の利用

（教科書 p.66）

例9 $ab = 6$ を満たす整数 a，b の組をすべて求めてみよう。

a と b はともに 6 の約数であるから，a，b の組は次の 8 つである。

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 6, \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3, \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = 2, \end{cases} \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -6, \end{cases} \begin{cases} a = -2 \\ b = -3, \end{cases} \begin{cases} a = -3 \\ b = -2, \end{cases} \begin{cases} a = -6 \\ b = -1, \end{cases}$$

問6 次の等式を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

(1) $ab = 7$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 7, \end{cases} \begin{cases} a = 7 \\ b = 1, \end{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = -7, \end{cases} \begin{cases} a = -7 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2) $ab = -4$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4, \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = -2, \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ b = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4\ , \end{cases} \begin{cases} a = -2 \\ b = 2\ , \end{cases} \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

例題 1 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $(a-2)(b+3)=-5$　　(2) $ab+3a+2b=1$

解 (1) a, b は整数であるから，この等式を満たす $a-2$ と $b+3$ の組を求めると，右の表のようになる。

$a-2$	1	-1	5	-5
$b+3$	-5	5	-1	1

したがって，整数 a, b の組は

$\begin{cases} a=3 \\ b=-8 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=7 \\ b=-4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$

(2) $ab+3a+2b=1$ より

$a(b+3)+2b=1$

$a(b+3)+2b+6=1+6$

$a(b+3)+2(b+3)=7$

$(a+2)(b+3)=7$ ……①

a, b は整数であるから，①の等式を満たす $a+2$ と $b+3$ の組を求めると，右の表のようになる。したがって，整数 a, b の組は

$a+2$	1	-1	7	-7
$b+3$	7	-7	1	-1

$\begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-3 \\ b=-10 \end{cases}$, $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-9 \\ b=-4 \end{cases}$

問7 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $(a-3)(b+5)=7$

a, b は整数であるから，この等式を満たす $a-3$ と $b+5$ の組を求めると，次の表のようになる。

$a-3$	1	-1	7	-7
$b+5$	7	-7	1	-1

したがって，整数 a, b の組は

$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=2 \\ b=-12 \end{cases}$, $\begin{cases} a=10 \\ b=-4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-4 \\ b=-6 \end{cases}$

(2) $ab-2a+b=4$

$ab-2a+b=4$ より

$a(b-2)+b-2=4-2$

$(a+1)(b-2)=2$

a, b は整数であるから，この等式を満たす $a+1$ と $b-2$ の組を求めると，次の表のようになる。

$a+1$	1	-1	2	-2
$b-2$	2	-2	1	-1

したがって，整数 a, b の組は

$\begin{cases} a=0 \\ b=4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$

(3) $ab+2a-4b=3$

$ab+2a-4b=3$ より

$a(b+2)-4(b+2)=3-8$

$(a-4)(b+2)=-5$

a, b は整数であるから，この等式を満たす $a-4$ と $b+2$ の組を求めると，次の表のようになる。

$a-4$	1	-1	5	-5
$b+2$	-5	5	-1	1

したがって，整数 a, b の組は

$\begin{cases} a=5 \\ b=-7 \end{cases}$, $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=9 \\ b=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

② 最大公約数と最小公倍数

公約数と最大公約数

（教科書 p.68）

いくつかの正の整数に共通な約数を，それらの整数の（¹ 公約数 ）という。また，公約数のうち最大のものを（² 最大公約数 ）という。

例 10 素因数分解を用いて，60 と 280 の最大公約数を求めてみよう。

60 ＝	2×2		×3	×	5	
280 ＝	2×2	×2		×	5	×7
	2×2			×	5	＝20

60 と 280 を素因数分解すると

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

2 つの数に共通な素因数について，右上の図のように個数の少ないものを取り出して，それらを掛け合わせたものが，公約数のうちで最大となる。

よって，求める最大公約数は

$2^2 \cdot 5 = 20$

問8 135 と 225 の最大公約数を求めよ。

135 と 225 を素因数分解すると

$135 = 3^3 \cdot 5$

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

よって，求める最大公約数は

$3^2 \cdot 5 = 45$

互いに素

（教科書 p.69）

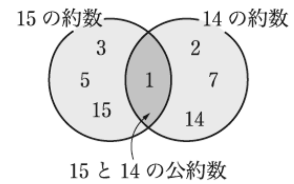
2 つの整数 a, b について，最大公約数が 1 であるとき，a, b は（³ 互いに素 ）であるという。

例 11 14 と 15 について，

$14 = 2 \cdot 7$,　$15 = 3 \cdot 5$

であり，最大公約数が（ 1 ）である。

よって，14 と 15 は（ 互いに素である ）。

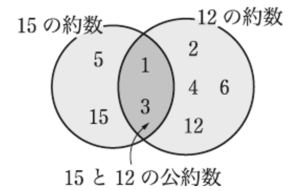


また，12 と 15 について，

$12 = 2^2 \cdot 3$,　$15 = 3 \cdot 5$

であり，最大公約数は（ 3 ）である。

よって，12 と 15 は（ 互いに素でない ）。



問9 次の 2 つの数が互いに素であるかどうか答えよ。

(1) 4, 7

$4 = 2^2$，また，7 は素数であり，最大公約数は 1 である。

よって，4 と 7 は互いに素である。

(2) 16, 21

$16 = 2^4$, $21 = 3 \cdot 7$

であり，最大公約数は 1 である。

よって，16 と 21 は互いに素である。

(3) 26, 39

$26 = 2 \cdot 13$, $39 = 3 \cdot 13$

であり，最大公約数は 13 である。

よって，26 と 39 は互いに素でない。

公倍数と最小公倍数

（教科書 p.70）

いくつかの正の整数に共通な倍数を，それらの整数の（4　公倍数　）という。また，公倍数のうち最小のものを（5　最小公倍数　）という。

例12 素因数分解を用いて，36 と 90 の最小公倍数を求めてみよう。

36 と 90 を素因数分解すると

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$\begin{array}{rcccccl} 36= & 2\times 2 & \times & 3\times 3 & & & \\ 90= & 2 & \times & 3\times 3 & \times & 5 & \\ \hline & \boxed{2\times 2} & \times & \boxed{3\times 3} & \times & \boxed{5} & =180 \end{array}$$

2 つの数に共通な素因数については，右上の図のように個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものが，公倍数のうちで最小となる。

よって，求める最小公倍数は

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

問 10 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 120 と 168

120 と 168 を素因数分解すると

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

よって，求める最小公倍数は

$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$

(2) 300 と 630

300 と 630 を素因数分解すると

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

よって，求める最小公倍数は

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$

3つの整数の最大公約数と最小公倍数

（教科書 p.71）

例 13 素因数分解を用いて，48, 72, 90 の最大公約数，最小公倍数を求めてみよう。48, 72, 90 をそれぞれ素因数分解すると

$48 = 2^4 \cdot 3$,　$72 = 2^3 \cdot 3^2$,　$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

まず，最大公約数は，3 つの数に共通な素因数について，右の図のように，個数の少ないものを取り出し，それらを掛け合わせたものであるから

$2 \cdot 3 = 6$

$$\begin{array}{rcccccl} 48= & 2 & \times 2\times 2\times 2 & \times & 3 & & \\ 72= & 2 & \times 2\times 2 & \times & 3 & \times 3 & \\ 90= & 2 & & \times & 3 & \times 3\times 5 & \\ \hline & \boxed{2} & & \times & \boxed{3} & & =6 \end{array}$$

一方，最小公倍数は，3 つの数に共通な素因数については，右の図のように個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものであるから

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

$$\begin{array}{rcccccl} 48= & 2\times 2\times 2\times 2 & \times & 3 & & & \\ 72= & 2\times 2\times 2 & \times & 3\times 3 & & & \\ 90= & 2 & \times & 3\times 3 & \times & 5 & \\ \hline & \boxed{2\times 2\times 2\times 2} & \times & \boxed{3\times 3} & \times & \boxed{5} & =720 \end{array}$$

問 11 次の 3 つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 9, 12, 21

9, 12, 21 をそれぞれ素因数分解すると

$9 = 3^2$,　$12 = 2^2 \cdot 3$,　$21 = 3 \cdot 7$

最大公約数は，3 つの数に共通な素因数について，個数の少ないものを取り出し，それらを掛け合わせたものであるから

3

最小公倍数は，3 つの数に共通な素因数について，個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものであるから

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

(2) 60, 120, 150

60, 120, 150 をそれぞれ素因数分解すると

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$,　$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,　$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

最大公約数は，3 つの数に共通な素因数について，個数の少ないものを取り出し，それらを掛け合わせたものであるから

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

最小公倍数は，3 つの数に共通な素因数について，個数の多いものを取り出すと，

2^3，3，5^2 …①　共通でない素因数はない。よって，①を掛け合わせて

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$

最大公約数·最小公倍数の関係

（教科書 p.72）

一般に，最大公約数と最小公倍数について，次のことが成り立つ。

最大公約数·最小公倍数の関係
2 つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると [1] $\boldsymbol{a = a'g}$，$\boldsymbol{b = b'g}$ と表される。（ただし，a' と b' は互いに素） [2] $\boldsymbol{l = a'b'g}$ [3] $\boldsymbol{gl = ab}$

例14 100 と 120 の最大公約数が 20 であることを用いて，最小公倍数 l を求めてみよう。

$$20 \cdot l = 100 \cdot 120$$

より　$l = \frac{100 \cdot 120}{20} = 600$

問 12 135 と 315 の最大公約数が 45 であることを用いて，最小公倍数を求めよ。

求める最小公倍数を l とすると，135 と 315 の最大公約数は 45 であるから

$$45 \cdot l = 135 \cdot 315$$

より

$$l = \frac{135 \cdot 315}{45} = 945$$

求める最小公倍数は 945

例題 2 最大公約数が 6，最小公倍数が 144 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

解 求める 2 つの正の整数を a，$b (a \leqq b)$ とする。

最大公約数が 6 であるから，互いに素な a'，$b' (a' \leqq b')$を用いて

$$a = 6a', \qquad b = 6b' \quad \cdots\cdots①$$

と表すことができる。

このとき，a，b の最小公倍数 144 は，a'，b'，最大公約数 6 を用いて

$$144 = 6a'b'$$

よって　$a'b' = 24$

これを満たす互いに素である a' と b' の組は

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 24, \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 8 \end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

6 と 144，18 と 48

問 13 最大公約数が 8，最小公倍数が 96 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，$b (a \leqq b)$ とする。最大公約数が 8 であるから，互いに素な a'，$b' (a' \leqq b')$ を用いて

$$a = 8a', \qquad b = 8b' \quad \cdots\cdots①$$

と表すことができる。

このとき，a，b の最小公倍数 96 は，a'，b'，最大公約数 8 を用いて

$$96 = 8a'b'$$

整理して　$a'b' = 12$

これを満たす互いに素である a'と b'の組は

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

8 と 96，24 と 32

数学のパノラマ　エラトステネスのふるい

（教科書p.74）

素数を求める方法として，**「エラトステネスのふるい」**とよばれるものが知られている。この方法を用いて，50 以下の素数を求めてみよう。

① 1 から 50 までの整数を書き並べる。
② 1 は素数ではないから消す。
③ 最小の数 2 は素数である。
④ 2 より大きい 2 の倍数を消す。それらの数は約数に 2 をもつから合成数である。
⑤ 残った数のうち，最小の数 3 は素数である。
⑥ 3 より大きい 3 の倍数を消す。それらの数は約数に 3 をもつから合成数である。
⑦ 同様に，残った数のうち最小の数 5，7，…についても作業を続ける。
⑧ 残った数が素数である。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

この方法によって，50 以下の素数は

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47

であることがわかる。

エラトステネスは，紀元前 200 年頃活躍したギリシャの数学者である。

Training

（教科書 p.75）

1 6 桁の正の整数 $481a60$ について，次の問に答えよ。

(1) この整数が 9 で割り切れるときの百の位の数 a を求めよ。

$481a60$ は，9 で割り切れるから，各位の数の和　$4+8+1+a+6+0=a+19$　は 9 で割り切れる。a は 9 以下の正の整数であるから $a+19=27$

ゆえに $a=8$

(2) この整数が 24 で割り切れるときの百の位の数 a を求めよ

$481a60$ は，24 で割り切れるから，3 の倍数であり，かつ 8 の倍数である。

各位の数の和　$4+8+1+a+6+0=a+19$　は 3 で割り切れる。$0 \leqq a < 10$ より，

$a+19$ が3 の倍数となるのは

$a+19=21$ より $a=2$

$a+19=24$ より $a=5$

$a+19=27$ より $a=8$

のときに限る。

（ i ）$a=2$ のとき

6 桁の整数は 481260 となり，下 3 桁 260 は 8 で割り切れないから，481260 は 8 の倍数ではない。したがって，24 で割り切れない。

（ ii ）$a=5$ のとき

6 桁の整数は 481560 となり，下 3 桁 560 は 8 で割り切れるから，481560 は 8 の倍数となり，24 で割り切れる。

（iii）$a=8$ のとき

6 桁の整数は 481860 となり，下 3 桁 860 は 8 で割り切れないから，481860 は 8 の倍数ではない。したがって，24 で割り切れない。

（ i ）～（iii）より $a=5$

2 $\sqrt{2160n}$ が整数となるような正の整数 n のうち最小のものを求めよ。

$\sqrt{2160n}$ が整数となるには，$2160n$ がある整数の 2 乗の数になればよい。2160 を素因数分解すると

$2160=2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$

よって，2160 がある整数の 2 乗になるような最小の n は

$n=3 \cdot 5=15$

である。

3 次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 112

112 を素因数分解すると　$112=2^4 \cdot 7$

2^4 の約数に，7 の約数をそれぞれ掛けると

$1 \cdot 1=1,\quad 1 \cdot 7=7,$

$2 \cdot 1=2,\quad 2 \cdot 7=14,$

$4 \cdot 1=4,\quad 4 \cdot 7=28,$

$8 \cdot 1=8,\quad 8 \cdot 7=56,$

$16 \cdot 1=16,\quad 16 \cdot 7=112$

よって，112 の正の約数は 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112

(2) 200

200 を素因数分解すると　$200=2^3 \cdot 5^2$

2^3 の約数に，5^2 の約数をそれぞれ掛けると

$1 \cdot 1=1,\quad 1 \cdot 5=5,\quad 1 \cdot 25=25,$

$2 \cdot 1=2,\quad 2 \cdot 5=10,\quad 2 \cdot 25=50,$

$4 \cdot 1=4,\quad 4 \cdot 5=20,\quad 4 \cdot 25=100,$

$8 \cdot 1=8,\quad 8 \cdot 5=40,\quad 8 \cdot 25=200$

よって，200 の正の約数は　1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200

4 次の等式を満たす整数 a, b の組をすべて求めよ。

(1) $ab+a+b+5=0$

$ab+a+b+5=0$ より

$a(b+1)+(b+1)=-5+1$

$(a+1)(b+1)=-4$

a, b は整数であるから，この等式を満たす $a+1$ と $b+1$ の組は次の表のようになる。

$a+1$	1	-1	2	-2	4	-4
$b+1$	-4	4	-2	2	-1	1

したがって，整数 a, b の組は

$(a,\ b)=$ $(0,\ -5)$, $(-2,\ 3)$,

$(1,\ -3)$, $(-3,\ 1)$,

$(3,\ -2)$, $(-5,\ 0)$

(2) $ab-3a+4b-27=0$

$ab-3a+4b=27$ より

$a(b-3)+4b-12=27-12$

$a(b-3)+4(b-3)=15$

$(a+4)(b-3)=15$

a, b は整数であるから，この等式を満たす $a+4$ と $b-3$ の組を求めると次の表のようになる。

$a+4$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
$b-3$	15	-15	5	-5	3	-3	1	-1

したがって，整数 a, b の組は

$(a,\ b)=$ $(-3,\ 18)$, $(-5,\ -12)$,

$(-1,\ 8)$, $(-7,\ -2)$,

$(1,\ 6)$, $(-9,\ 0)$,

$(11,\ 4)$, $(-19,\ 2)$

5 次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 504 と 540

504 と 540 を素因数分解すると

$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$

$540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

よって，最大公約数は $2^2\cdot 3^2=36$

(2) 1470 と 2835

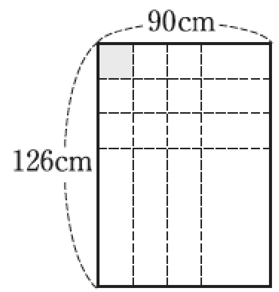
1470 と 2835 を素因数分解すると

$1470=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$

$2835=3^4\cdot 5\cdot 7$

よって，最大公約数は $3\cdot 5\cdot 7=105$

6 縦 126cm，横 90cm の長方形の壁に，同じ大きさの正方形のタイルをすき間なく敷き詰める。タイルをできるだけ大きくするには，1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



求めるタイルの 1 辺の長さは，縦の長さと横の長さの最大公約数である。

$126=2\cdot 3^2\cdot 7$

$90=2\cdot 3^2\cdot 5$

であるから，126 と 90 の最大公約数は

$2\cdot 3^2=18$

よって，求めるタイルの 1 辺の長さは 18cm である。

7 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 450 と 980

450 と 980 を素因数分解すると

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

よって，求める最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

(2) 390 と 819

390 と 819 を素因数分解すると

$390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

$819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$

よって，求める最小公倍数は $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 8190$

8 次の 3 つの数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 42，84，90

42，84，90 をそれぞれ素因数分解すると

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって求める最大公約数は

$2 \cdot 3 = 6$

一方，求める最小公倍数は

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

(2) 65，78，104

65，78，104 をそれぞれ素因数分解すると

$65 = 5 \cdot 13, \quad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13, \quad 104 = 2^3 \cdot 13$

よって求める最大公約数は

13

最小公倍数は，3 つの数に共通な素因数について，個数の多いものを取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものであるから

$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 1560$

9 最大公約数が 12，最小公倍数が 420 である 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，$b(a \leqq b)$ とする。最大公約数が 12 であるから，互いに素な a'，$b'(a' \leqq b')$ を用いて

$a = 12a', \quad b = 12b' \quad$ ……①

と表すことができる。

このとき，a，b の最小公倍数 420 は，a'，b'，最大公約数 12 を用いて

$420 = 12a'b'$

整理して $a'b' = 35$

これを満たす互いに素である a' と b' の組は

$(a',\ b') = (1,\ 35),\ (5,\ 7)$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

12 と 420，60 と 84