4節　式と証明

❶ 恒等式

（教科書 p.44）

方程式　$x^2-2x-8=0$

は，x に 4 または -2 を代入したときには成り立つが，それ以外の数を代入したときには成り立たない等式である。

これに対し，等式

$$x^2-2x-8=(x-1)^2-9$$

は，文字 x にどのような数を代入してもつねに成り立つ。このように，その中の文字にどのような数を代入しても成り立つ等式を（①　　　　　　）という。

等式 $\begin{cases}\text{方程式}\\\text{恒等式}\end{cases}$

恒等式であるための条件

（教科書 p.44）

一般に，a，b，c，a'，b'，c' を実数とするとき，次のことが成り立つ。

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が（②　　　　　　）

$\Longleftrightarrow$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

また，a，b，c を実数とするとき，次のことが成り立つ。

$ax^2+bx+c=0$ が（③　　　　　　）

$\Longleftrightarrow$　$a=0$，$b=0$，$c=0$

例1 $ax^2+bx+c=-3x^2+x-6$ が x についての恒等式になるのは

$$a=-3,\ b=1,\ c=-6$$

のときである。

問1 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

（1）　$x^2+1=ax^2+bx+c$

（2）　$(a-1)x^2+2bx+(c+3)=0$

例題 1 等式 $a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=3x-1$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解

問2 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

（1）　$a(x+1)^2+b(x+1)+c=2x^2+3x+4$

（2）　$a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=3x+5$

分数式の恒等式

（教科書 p.46）

例題 2　等式 $\frac{2}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解

問3　等式 $\frac{4x-13}{x^2+x-6}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

等式の証明

（教科書 p.47）

等式を証明するとは，その等式が恒等式であることを示すことである。

等式 $A=B$ を証明するには，次のいずれかを行うとよい。

[1]　（④　　　　　　　　　）する，または，（⑤　　　　　　　　　）する

[2]　A，B をそれぞれ（⑥　　　　　　　　　）する

[3]　$A-B=0$ を示す

例題 3　次の等式を証明せよ。

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

証明

問4　次の等式を証明せよ。

(1)　$(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$

(2)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

条件つきの等式

（教科書 p.48）

例題 4 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

証明

問5 次の等式を証明せよ。

(1)　$x+y=1$ のとき　　$x^2-x=y^2-y$

(2)　$a+b+c=0$ のとき　　$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

例題 5 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ を証明せよ。

証明

問6 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{2a+3c}{2b+3d}=\frac{2a-3c}{2b-3d}$ を証明せよ。

② 不等式の証明

不等式の基本性質

（教科書 p.49）

不等式の性質
[1]　$a > b,\ b > c \quad \Longrightarrow \quad a > c$
[2]　$a > b \quad \Longrightarrow \quad a + c > b + c,\ a - c > b - c$
[3]　$a > b,\ c > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
[4]　$a > b,\ c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

例2　$a > b \iff a - b > 0$が成り立つことを，性質 [2] を利用して証明してみよう。

(⟹ の証明)

$a > b$ の両辺から b を引くと　$a - b > 0$

(⟸ の証明)

$a - b > 0$ の両辺に b を加えると　$a > b$

問7　不等式の性質を用いて，次のことを示せ。

(1)　$a > 0,\ b > 0 \quad \Longrightarrow \quad ab > 0$

(2)　$a < 0,\ b < 0 \quad \Longrightarrow \quad ab > 0$

一般に，実数 $a,\ b$ に対して，次の性質が成り立つ。

(⑦　　　　　　　　　　)　$\iff$　$ab > 0$

(⑧　　　　　　　　　　)　$\iff$　$ab < 0$

例題 6　$a > b$ のとき，不等式 $2a - b > 2b - a$ を証明せよ。

考え方　$A > B$ を証明するには $A - B > 0$ を示せばよい。

証明

問8　$a > b$ のとき，不等式 $3a + b > a + 3b$ を証明せよ。

不等式の証明には，次の性質がよく用いられる。

実数の２乗
実数 a に対し，$a^2 \geqq 0$ が成り立つ。 等号が成り立つのは，$a = 0$ のときである。

例題 7　不等式 $2(x^2 + y^2) \geqq (x + y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

問9 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$2(x^2+y^2) \geqq (x-y)^2$

(2)　$5(x^2+y^2) \geqq (2x-y)^2$

実数 a, b に対して，$a^2 \geqq 0$, $b^2 \geqq 0$ であるから

(⑨　　　　　　　　　　)

が成り立つ。ここで，等号が成り立つのは

$a^2=0$ かつ $b^2=0$

すなわち　　$a=b=0$

のときである。

例題 8 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$x^2+2y^2 \geqq 2xy$

証明

問 10 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2+y^2 \geqq xy$

(2)　$x^2+y^2-4x-6y+13 \geqq 0$

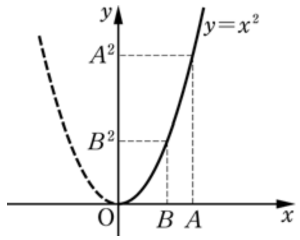
平方による比較

（教科書 p.52）

一般に，次の性質が成り立つ。

$A \geqq 0,\ B \geqq 0$ のとき

（⑩　　　　　　　　　　　　　　　）



したがって，$A \geqq 0,\ B \geqq 0$ のとき，不等式 $A \geqq B$ を証明するには，両辺を 2 乗した不等式 $A^2 \geqq B^2$ を証明すればよい。

例題 9　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

考え方　証明すべき不等式は両辺とも 0 以上であるから，それぞれを 2 乗した不等式 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqq (\sqrt{a+b})^2$ を証明すればよい。

証明

問 11　$a \geqq 0$ のとき

$a+1 \geqq \sqrt{2a+1}$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

相加平均と相乗平均

（教科書 p.53）

2 数の平均をとるといえば，「足して 2 で割る」というのが一般的であるが，「掛けて平方根をとる」という平均の考え方もある。

一般に，2 つの正の実数 $a,\ b$ に対し

$\frac{a+b}{2}$ を（⑪　　　　　　　　　　），　$\sqrt{ab}$ を（⑫　　　　　　　　　　）という。

問 12　次の 2 数の相加平均と相乗平均を求め，その大小を比較せよ。

(1)　1 と 100

(2)　40 と 40

(3)　36 と 64

相加平均と相乗平均の間には，次のことが成り立つ。

相加平均と相乗平均
$a>0,\ b>0$ のとき $$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$ 等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

証明　両辺がともに正であるから，両辺の 2 乗を比較すればよい。

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$$

したがって　$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq\left(\sqrt{ab}\right)^2$

$\frac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ であるから　$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

$\boxed{\text{注意}}$　上の公式は「$a>0$，$b>0$」を「$a\geqq 0$，$b\geqq 0$」としても成り立つ。

不等式 $\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ は，両辺に 2 を掛けた（⑬　　　　　　　　　　）
の形で用いられることも多い。

例題 10　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2$$

証明

問 13　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$

(2)　$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2$

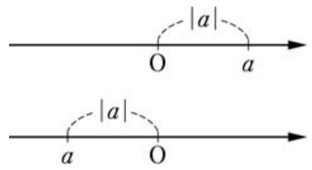
Challenge 例題 絶対値を含む不等式の証明

（教科書 p.55）

実数 a の絶対値 $|a|$ は，数直線上において，原点から a を表す点までの距離であるから，次のことが成り立つ。

$a \geqq 0$ のとき　（⑭　　　　　　　）

$a < 0$ のとき　（⑮　　　　　　　）



このことから，実数の絶対値について次の性質が成り立つ。

（⑯　　　　　　　　　　　　　　　　）　ただし　$b \neq 0$

（⑰　　　　　　　　　　　　　　）

絶対値を含む不等式の証明では，これらの性質がよく用いられる。

例題 不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

考え方 証明すべき不等式は両辺とも 0 以上であるから，それぞれを 2 乗した不等式 $(|a|+|b|)^2 \geqq |a+b|^2$ を証明すればよい。

証明

問1 不等式 $|a|+|b| \geqq |a-b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Training

（教科書 p.56）

29 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

(1)　$x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

(2)　$x^3-x^2-4x=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(3)　$\frac{3x+8}{3x^2-5x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{3x+1}$

30 次の等式を証明せよ。

(1)　$(ax-by)^2-(ay-bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)$

(2)　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(3)　$(x+1)^3-(3x^2+1)=(x-1)^3+(3x^2+1)$

31　$x-y=1$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1)　$x^2+y^2=2xy+x-y$

(2)　$y^3+1=x^3-3xy$

32　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a^2d}{b^2c}$ を証明せよ。

33　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$(a^2+4)(x^2+1) \geqq (ax+2)^2$

34　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

35　$a \geqq b \geqq 0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqq \sqrt{a-b}$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

36　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$9a+\frac{4}{a} \geqq 12$$

参考　組立除法

（教科書 p.57）

整式 $P(x)$ を，とくに $x-\alpha$ という形の 1 次式で割るとき，簡単な計算方法がある。

たとえば，$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を $b_0x^2+b_1x+b_2$，余りを R とすると

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$
$$=(x-\alpha)(b_0x^2+b_1x+b_2)+R$$
$$=b_0x^3+(b_1-\alpha b_0)x^2+(b_2-\alpha b_1)x+R-\alpha b_2$$

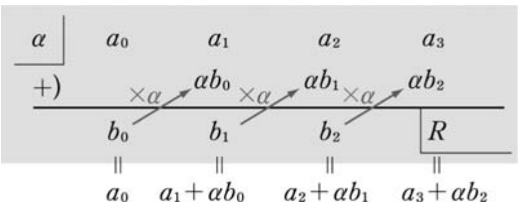
であるから

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-\alpha b_0,\ a_2=b_2-\alpha b_1,\ a_3=R-\alpha b_2$$

ゆえに，b_0，b_1，b_2，R は次の手順で求めることができる。

$$b_0=a_0,\ b_1=a_1+\alpha b_0,\ b_2=a_2+\alpha b_1,\ R=a_3+\alpha b_2$$

この計算を次の形式で行う。



この方法を（⑱　　　　　　　　　）という。

問1 次の第 1 式を第 2 式で割ったときの商と余りを求めよ。

(1)　x^3-5x^2+8x-3，$x-3$

(2)　x^4-x^2+3x-6，$x+2$