３節 高次方程式

❶ 因数定理

剰余の定理

（教科書 p.37）

例1 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ とすると

$$\boldsymbol{P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 = 2}$$
$$\boldsymbol{P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 3 = -13}$$

問1 $P(x) = x^3 - 3x + 5$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{P(2)}$

(2)　$\boldsymbol{P(-1)}$

(3)　$\boldsymbol{P(0)}$

剰余の定理
整式 $\boldsymbol{P(x)}$ を $\boldsymbol{x - \alpha}$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{P(\alpha)}$ である。

例2 整式 $P(x) = 2x^3 - 5x - 1$ を

$\boldsymbol{x - 1}$ で割った余りは　$\boldsymbol{P(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 - 1 = -4}$

$\boldsymbol{x + 2}$ で割った余りは　$\boldsymbol{P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2) - 1 = -7}$

問2 次の第１式を第２式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$\boldsymbol{x^3 - 4x^2 + 6x + 1,\ x + 1}$

(2)　$\boldsymbol{2x^3 - 6x^2 + 5x - 15,\ x - 3}$

例題 1 $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 4x + a}$ を $\boldsymbol{x - 2}$ で割ったときの余りが $\boldsymbol{1}$ であるような定数 $\boldsymbol{a}$ の値を求めよ。

解

問3 $\boldsymbol{3x^3 + 4x^2 - ax - 1}$ を $\boldsymbol{x + 2}$ で割ったときの余りが $\boldsymbol{-5}$ であるような定数 $\boldsymbol{a}$ の値を求めよ。

例題 2 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 5 余り，$x+3$ で割ると 10 余る。
$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解

問4 整式 $\boldsymbol{P(x)}$ を $\boldsymbol{x-4}$ で割ると **2** 余り，$\boldsymbol{x+2}$ で割ると **14** 余る。$\boldsymbol{P(x)}$ を $\boldsymbol{x^2-2x-8}$ で割ったときの余りを求めよ。

因数定理

（教科書 p.39）

因数定理
整式 $\boldsymbol{P(x)}$ が $\boldsymbol{x-\alpha}$ を因数にもつ　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{P(\alpha)=0}$

例3 整式 $\boldsymbol{P(x)=x^3-2x^2+4x-8}$ が，$\boldsymbol{x-2}$ を因数にもつかどうか調べてみよう。

$$P(2)=2^3-2\cdot 2^2+4\cdot 2-8=0$$

したがって，$\boldsymbol{P(x)}$ は $\boldsymbol{x-2}$ を因数にもつ。

問5 整式 $\boldsymbol{2x^3-5x^2-6x+9}$ が次の **1** 次式を因数にもつかどうか調べよ。

(1)　$\boldsymbol{x-1}$

(2)　$\boldsymbol{x+1}$

(3)　$\boldsymbol{x+2}$

(4)　$\boldsymbol{x-3}$

例題 3 因数定理を用いて，$\boldsymbol{x^3-7x-6}$ を因数分解せよ。

$\boldsymbol{P(x)=x^3-7x-6}$ とおく。　← $P(\alpha)=0$ となる整数 α を ±（6 の約数）の中から探す

解

問6 因数定理を用いて，次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+3x^2-4

(2)　$2x^3+5x^2+x-2$

(3)　$x^3-3x^2-4x+12$

(4)　$3x^3+4x^2-17x-6$

② 簡単な高次方程式

（教科書 p.40）

$P(x)$ を n 次の整式とするとき

$$P(x)=0$$

の形に表される方程式を（①　　　　　　　　）という。

3 次以上の方程式を（②　　　　　　　　）という。高次方程式は，因数分解することによって簡単に解くことができる場合がある。

因数分解による解法

（教科書 p.40）

例題 4 方程式 $x^3=1$ を解け。

解

問7 次の方程式を解け。

(1)　$x^3=8$

(2)　$x^3=-1$

方程式 $x^3=1$ の 3 つの解を（③　　　　　　　　　　）という。例題 4 からわかるように，1 の 3 乗根は，実数 1 と 2 つの虚数 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である。

問8 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω で表すとき，次のことを示せ。

(1)　1 の 3 乗根は，1，ω，ω^2 の 3 つである。

(2)　$\omega^2+\omega+1=0$

例題 5 方程式 $x^4+4x^2-5=0$ を解け。

解

問9 次の方程式を解け。

(1)　$x^4-13x^2+36=0$

(2)　$x^4-2x^2-15=0$

(3)　$x^4=1$

因数定理を利用した解法

（教科書 p.41）

例題 6 方程式 $x^3-8x+8=0$ を解け。

解

問 10 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

(2)　$2x^3 - 5x - 6 = 0$

方程式 $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2 = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{1},\ -\mathbf{2}$ である。このうち解 $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2}$ を（④　　　　　　　　）という。

同様に，方程式 $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^3 = \mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ を（⑤　　　　　　　　）という。

問 11 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

(2)　$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

一般に，複素数の範囲で考えると，（⑥　　　　　　　　　　　　　　　　　）ことが知られている。

例題 7 $x = 1 + i$ が方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解であるとき，実数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ。

解

問 12 $x = 1 - i$ が方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ の解であるとき，実数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ。

Training

（教科書 p.43）

21 (1)　整式 $\boldsymbol{P(x)}$ を $\boldsymbol{1}$ 次式 $\boldsymbol{ax+b}$ で割ったときの余り $\boldsymbol{R}$ は，$\boldsymbol{R=P\left(-\frac{b}{a}\right)}$ であることを示せ。

(2)　$\boldsymbol{4x^3-2x^2-7}$ を $\boldsymbol{2x-3}$ で割ったときの余りを求めよ。

22 次の第 $\boldsymbol{1}$ 式を第 $\boldsymbol{2}$ 式で割ったときの余りが $\boldsymbol{2}$ であるような定数 $\boldsymbol{a}$ の値を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{x^3-ax^2-5x-4,\ x+2}$

(2)　$\boldsymbol{ax^3-2x^2-12x+10,\ 3x-2}$

23 整式 $\boldsymbol{P(x)}$ は $\boldsymbol{x+1}$ で割り切れ，$\boldsymbol{x-2}$ で割ると $\boldsymbol{6}$ 余る。整式 $\boldsymbol{P(x)}$ を $\boldsymbol{(x+1)(x-2)}$ で割ったときの余りを求めよ。

24 因数定理を用いて，次の式を因数分解せよ。

(1)　$\boldsymbol{4x^3+7x^2-5x-6}$

(2)　$\boldsymbol{9x^3-30x^2+7x+6}$

25 $\mathbf{1}$ の $\mathbf{3}$ 乗根のうち，虚数であるものの $\mathbf{1}$ つを $\boldsymbol{\omega}$ で表すとき，次の値を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{\omega + \frac{1}{\omega}}$

(2)　$\boldsymbol{\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}}$

(3)　$\boldsymbol{\omega^3 + \frac{1}{\omega^3}}$

26 次の方程式を解け。

(1)　$\boldsymbol{2x^4 - 5x^2 - 3 = 0}$

(2)　$\boldsymbol{3x^4 + 10x^2 + 8 = 0}$

27 次の方程式を解け。

(1)　$\boldsymbol{2x^3 + 7x^2 - 20x - 25 = 0}$

(2)　$\boldsymbol{3x^3 - 8x + 8 = 0}$

28　$x=1+2i$ が方程式 $x^3+ax+b=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。