２節　２次方程式

❶ 複素数とその演算

複素数

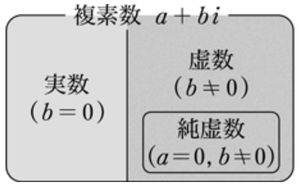
（教科書 p.22）

2 乗すると -1 になる新しい数を考え，これを i で表す。この i を（①　　　　　　　　）という。
すなわち　　　　　$\boldsymbol{i^2=-1}$

$a,\ b$ を実数とするとき

$$\boldsymbol{a+bi}$$

の形に表される数を（②　　　　　　　　）という。



複素数 $a+bi$ において，a を（③　　　　　　　），b を（④　　　　　　　）という。

実数でない複素数を（⑤　　　　　　　）という。

とくに，$a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき $0+bi$，すなわち bi を（⑥　　　　　　　）という。

例1 (1)　$4-3i$ は虚数で，その実部は 4，虚部は -3 である。

(2)　$\sqrt{5}i$ は純虚数で，その実部は 0，虚部は $\sqrt{5}$ である。

問1 次の複素数の実部，虚部を答えよ。

(1)　$-1+\sqrt{3}i$

(2)　$2+i$

(3)　$\sqrt{7}i$

(4)　-5

複素数の相等

（教科書 p.23）

2 つの複素数が等しいのは，その実部，虚部がともに等しいときにかぎる。すなわち，次のことが成り立つ。

複素数の相等
$a,\ b,\ c,\ d$ が実数のとき $\boldsymbol{a+bi=c+di}$ $\iff$ $\boldsymbol{a=c}$ かつ $\boldsymbol{b=d}$ とくに　$\boldsymbol{a+bi=0}$ $\iff$ $\boldsymbol{a=0}$ かつ $\boldsymbol{b=0}$

注意　虚数を扱うとき，数の大小関係や正負は考えない。

例題 1 $(2x+y)+(3x-1)i=5+8i$ を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ。

解

問2 次の等式を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ。

(1)　$(-x+4y)+(2x+3y)i=6-i$

(2)　$(x+5)+(y-3)i=0$

複素数の演算

（教科書 p.24）

例2 (1)　$(2+3i)+(1-5i)=(2+1)+(3i-5i)=3-2i$

(2)　$(2+3i)-(1-5i)=(2-1)+(3i+5i)=1+8i$

(3)　$(2+3i)(1-5i)=2-10i+3i-15i^2$　　$\longleftarrow i^2=-1$

$=2-10i+3i+15=17-7i$

(4)　$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$

問3 次の計算をせよ。

(1)　$(4+5i)+(3-2i)$

(2)　$(2-4i)-(1-i)$

(3)　$(5+3i)(2-7i)$

(4)　$(3+4i)(3-4i)$

(5)　$\left(-\sqrt{2}i\right)^4$

a, b が実数であるとき，複素数 $\alpha=a+bi$ に対して，$\boldsymbol{a-bi}$ を α と（⑦　　　　　　　　　　）といい，$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$で表す。

問4 次の複素数と共役な複素数を答えよ。

(1)　$3+2i$

(2)　$\sqrt{5}-\sqrt{2}i$

(3)　$3i$

(4)　-4

例3 $\dfrac{2+3i}{1-5i}=\dfrac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}=\dfrac{2+10i+3i+15i^2}{1-25i^2}$

$=\dfrac{2+13i-15}{1+25}=\dfrac{-13+13i}{26}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

問5 例 3 にならって次の計算をし，その結果を $a+bi$ の形で表せ。

(1)　$\frac{1}{3-i}$

(2)　$\frac{1-i}{1+i}$

(3)　$\frac{2-i}{1-2i}$

(4)　$\frac{1}{i}$

一般に，複素数の加減乗除は次のように計算される。

(1)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\boldsymbol{i}$

(2)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di})=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})\boldsymbol{i}$

(3)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di})=(\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd})+(\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc})\boldsymbol{i}$

(4)　$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}}{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{di}}=\frac{\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bd}}{\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{d}^2}+\frac{\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{ad}}{\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{d}^2}\boldsymbol{i}$　ただし，$c+di\neq 0$

このように，複素数の加減乗除の結果はつねに複素数となり，$a+bi$ の形に表すことができる。
また，複素数 $\alpha,\ \beta$ について，実数と同様に次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{\alpha\beta=0}$　$\Longleftrightarrow$　(⑧　　　　　　　　　　　　　　　　)

負の数の平方根

(教科書 p.25)

一般に，$a>0$ のとき，$-a$ の平方根は $\sqrt{a}i$ と $-\sqrt{a}i$ である。そこで，これらのうち $\sqrt{a}i$ の方を $\sqrt{-a}$ という記号で表すと，次のことが成り立つ。

負の数の平方根
$a>0$ のとき，$\sqrt{-\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{i}$　　とくに $\sqrt{-\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{i}$ $a>0$ のとき，$-a$ の平方根は 　　$\sqrt{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{i},\ -\sqrt{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{i}$　　すなわち　　$\sqrt{-\boldsymbol{a}},\ -\sqrt{-\boldsymbol{a}}$

例4 (1)　$\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

(2)　$\sqrt{-49}=\sqrt{49}i=7i$

問6 次の数を i を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{-8}$

(2)　$-\sqrt{-50}$

(3)　$\sqrt{-\frac{7}{16}}$

例5 (1)　-25 の平方根は　$\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i,\ -\sqrt{-25}=-5i$

(2)　-1 の平方根は　$\sqrt{-1}=i,\ -\sqrt{-1}=-i$

問7 -18 の平方根を i を用いて表せ。

例6 (1)　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=\sqrt{4}i\times\sqrt{9}i=2i\times 3i=6i^2=-6$

(2)　$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=\frac{2i}{i^2}=\frac{2i}{-1}=-2i$

注意　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=-6$, $\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{36}=6$ であるから

$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}\neq\sqrt{(-4)\times(-9)}$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-2i$, $\sqrt{\frac{8}{-2}}=\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$ であるから

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}\neq\sqrt{\frac{8}{-2}}$

問8 次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-28}\times\sqrt{-35}$

(2)　$\frac{6}{\sqrt{-4}}$

② 解の公式

解の公式

（教科書 p.27）

すべての 2 次方程式に対して，次の解の公式が成り立つ。

2 次方程式の解の公式
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

注意　以降，方程式の係数は実数の範囲で考え，解は複素数の範囲で考えることにする。

例題 2　解の公式を用いて，次の 2 次方程式を解け。

(1)　$3x^2-5x-1=0$

(2)　$9x^2-12x+4=0$

(3)　$4x^2+3x+2=0$

解

問9 解の公式を用いて，次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+3x-1=0$

(2)　$4x^2-4x+1=0$

(3)　$5x^2-6x+4=0$

(4)　$4x^2+12x+13=0$

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$b=2b'$ とおくと，解の公式は次のように書きかえることができる。

$\boldsymbol{ax^2+2b'x+c=0}$ の解は

(⑨　　　　　　　　　　　)　　……①

問 10 ①が成り立つことを確かめよ。

例7 2 次方程式 $2x^2+6x+7=0$ の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2\cdot7}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-5}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}i}{2}$$

問 11 例 7 にならって，次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+2x-4=0$

(2)　$3x^2-4x+2=0$

判別式

（教科書 p.29）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

は，b^2-4ac の符号によって，次の 3 つに分類することができる。

(1)　$b^2-4ac>0$ のとき，異なる 2 つの実数

(2)　$b^2-4ac=0$ のとき，ただ 1 つの実数

(3)　$b^2-4ac<0$ のとき，異なる 2 つの虚数

(1)と(2)の場合は，解が実数であるから（⑩　　　　　　　　）といい，(3)の場合は（⑪　　　　　　　　）という。とくに，(2)の場合は，2 つの解が重なったものと考え（⑫　　　　　　　）という。

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の（⑬　　　　　　　　）といい，記号（⑭　　　　　）で表す。＊　すなわち

$$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

2 次方程式の解の判別
2 次方程式の判別式 D と解について，次のことが成り立つ。 (1)　$\mathbf{D>0}$　$\Longleftrightarrow$　**異なる 2 つの実数解をもつ** (2)　$\mathbf{D=0}$　$\Longleftrightarrow$　**重解をもつ** (3)　$\boldsymbol{D<0}$　$\Longleftrightarrow$　**異なる 2 つの虚数解をもつ**

重解も実数解であるから，次のことが成り立つ。

$\mathbf{D\geqq 0}$　$\Longleftrightarrow$　（⑮　　　　　　　　）をもつ

$ax^2+2b'x+c=0$ の形の 2 次方程式では，$D=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$ であるから，解の判別には $\boldsymbol{\frac{D}{4}=b'^2-ac}$ を用いてもよい。

例題 3　次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1)　$2x^2+5x-4=0$　　　(2)　$16x^2-8x+1=0$

(3)　$5x^2-3x+4=0$

解

問 12　次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1)　$2x^2+3x+3=0$

(2)　$4x^2-12x+9=0$

(3)　$x^2-6x-3=0$

(4)　$3x^2+1=0$

例題 4　2 次方程式 $x^2+kx+1=0$ が虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

解

問 13 2 次方程式 $x^2-3x+2k=0$ が虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

問 14 2 次方程式 $2x^2-2kx+k^2-8=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

③ 解と係数の関係

解と係数の関係

（教科書 p.31）

2 次方程式の解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると $\boldsymbol{\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}}$

例8 2 次方程式 $3x^2+7x+6=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{7}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{6}{3}=2$$

問 15 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積をそれぞれ求めよ。

(1)　$2x^2+3x-4=0$

(2)　$x^2-x-2=0$

例題 5 2 次方程式 $2x^2+8x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ の値をそれぞれ求めよ。

解

問 16 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

(2)　$(\alpha-\beta)^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3$

例題 6 2 次方程式 $x^2-mx+8=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍となるように，定数 m の値を定めよ。

解

問 17 2 次方程式 $x^2+mx+2=0$ の 1 つの解が他の解に 1 加えた数となるように，定数 m の値を定めよ。

2 次式の因数分解

（教科書 p.33）

2 次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$

例題 7　次の2次式を複素数の範囲で因数分解せよ。
(1)　x^2+2x-1　(2)　$2x^2-3x+2$

解

問 18 次の2次式を複素数の範囲で因数分解せよ。
(1)　x^2-2x-2

(2)　$3x^2-2x+1$

(3)　x^2+1

例9 4次式 x^4-4 の因数分解を考えてみよう。
$x^2=A$ とおくと

よって
$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2) \quad \text{有理数の範囲}$$
$$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \quad \text{実数の範囲}$$
$$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \quad \text{複素数の範囲}$$

問 19 4次式 x^4-x^2-6 を，次の範囲で因数分解せよ。

(1)　有理数の範囲

(2)　実数の範囲

(3)　複素数の範囲

与えられた2数を解とする2次方程式

（教科書 p.34）

2数を解とする2次方程式
2数 $\alpha,\ \beta$ を解とする2次方程式の1つは $\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$

例 10 2 数 $2+i$, $2-i$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

解の和が　$(2+i)+(2-i)=4$

解の積が　$(2+i)(2-i)=4+1=5$

であるから，$x^2-4x+5=0$ である。

問 20 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(1)　$2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$

(2)　$-5+i$, $-5-i$

例 11 和が 2，積が 5 となる 2 数を求めてみよう。

この 2 数を α, β とおくと

$$\alpha+\beta=2, \qquad \alpha\beta=5$$

であるから，α, β は 2 次方程式

$$x^2-2x+5=0$$

の 2 つの解である。

これを解くと　　$x=1\pm 2i$

したがって，和が 2，積が 5 となる 2 数は

$1+2i$ と $1-2i$

問 21 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1)　和が 2，積が -1

(2)　和が 1，積が 1

例題 8 2 次方程式 $x^2-2x+7=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha+2$, $\beta+2$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解

問 22 2 次方程式 $2x^2-x-5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(1)　$2\alpha+1$, $2\beta+1$

(2)　$\alpha-1$, $\beta-1$

Training

（教科書 p.36）

11 次の等式を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ。

(1) $(2-i)x+(3-2i)y=-1+2i$

(2) $(3+2i)x+(3i-2)y=16-11i$

12 次の計算をして，結果を $a+bi$ ($a,\ b$ は実数)の形で表せ。

(1) $-5i\cdot(-4i)$

(2) $\left(5-\sqrt{3}i\right)^2$

(3) $\frac{4+i}{4-i}$

(4) $\frac{1+3i}{3-i}-\frac{3-i}{1+3i}$

13 次の計算をして，結果を $a+bi$ ($a,\ b$ は実数)の形で表せ。

(1) $\sqrt{-2}-\sqrt{-18}+\sqrt{8}$

(2) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-27}}+\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{18}}$

14　次の a, b について，$\sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$a=3,\ b=-12$

(2)　$a=-2,\ b=-5$

15　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-5\sqrt{2}x+13=0$

(2)　$\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}+\frac{1}{12}=0$

16　2 次方程式 $x^2+(a-3)x-a^2+2=0$ が虚数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

17　2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(2)　$\alpha^3+\beta^3$

(3)　$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

18　次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　x^2+x+1

(2)　$4x^2+9$

19　4 次式 x^4-4x^2-5 を，次の範囲で因数分解せよ。

(1)　有理数の範囲

(2)　実数の範囲

(3)　複素数の範囲

20　2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(1)　$2\alpha,\ 2\beta$

(2)　$\alpha^2,\ \beta^2$

(3)　$\alpha^3,\ \beta^3$