１節　整式・分数式の計算

❶ 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

（教科書 p.8）

例1 (1)　$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & a^2 & +2ab & +b^2 & & \\
\times) & & a & +b & & & \\
\hline
 & a^3 & +2a^2b & +ab^2 & & & \\
 & & a^2b & +2ab^2 & +b^3 & & \\
\hline
 & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 & &
\end{array}
$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(1)
[1]　$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ [2]　$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

問1 公式 [2] が成り立つことを示せ。

例2 (1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

$\qquad =x^3+6x^2+12x+8$

(2)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$(a-b)^3=\ a^3\ -\ 3\cdot a^2\cdot b\ +\ 3\cdot a\cdot b^2-b^3$

$\qquad =8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

問2 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$

(2)　$(2x-1)^3$

(3)　$(x+3y)^3$

(4)　$(3x-2y)^3$

例3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$を展開してみよう。

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & -ab & +b^2 & \\
\times) & a & +b & & \\
\hline
a^3 & -a^2b & +ab^2 & & \\
 & a^2b & -ab^2 & +b^3 & \\
\hline
a^3 & & & +b^3 &
\end{array}
$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(2)
[3]　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$ [4]　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

問3 公式 [4] が成り立つことを示せ。

例4 (1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3$

$(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$
$=x^3+27$

⑵　$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$
$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot 5y+(5y)^2\}=(2x)^3-(5y)^3$
$(a-b)(a^2+a\cdot b+b^2)\ =a^3-b^3$
$=8x^3-125y^3$

問4 次の式を展開せよ。

⑴　$(x+1)(x^2-x+1)$

⑵　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

⑶　$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

⑷　$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

3 次式の因数分解

（教科書 p.10）

乗法公式［3］,［4］から，次の公式が成り立つ。

因数分解の公式
[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ [2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例5 ⑴　$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)$
$=(x+1)(x^2-x+1)$

⑵　$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+\ a\cdot b+b^2)$
$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

問5 次の式を因数分解せよ。

⑴　x^3-1

⑵　x^3+125

⑶　x^3-27y^3

(4)　$8x^3 + y^3$

例題 1 次の式を因数分解せよ。

$x^6 - 1$

考え方 $x^6 = (x^3)^2$ より，$x^3 = A$ とおくと $x^6 - 1 = A^2 - 1$ と表される。

解

問6 次の式を展開せよ。

(1)　$a^6 - b^6$

(2)　$x^6 + 2x^3 + 1$

❷ 二項定理

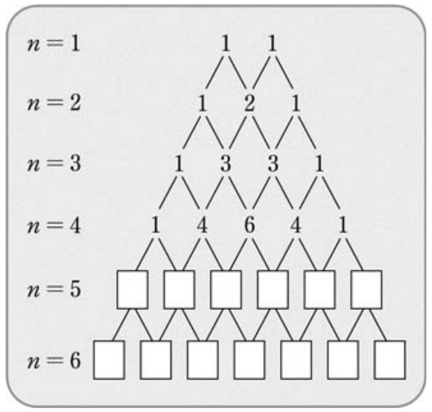
パスカルの三角形

（教科書 p.11）

問7 $(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて右のように並べたものを（①　　　　　　　　　　）という。

問8 右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の $\boxed{}$ をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。



二項定理

（教科書 p.12）

一般に，次の（②　　　　　　　　　）が成り立つ。

*異なる n 個のものから r 個を取り出してつくった組合せを

（③　　　　　　　　　　　　　　　）

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。このとき，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

ここで，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ である。

ただし，$\boldsymbol{0! = 1}$，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_0 = 1}$ と定める。

二項定理
$\boldsymbol{(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots}$ $\boldsymbol{+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n}$

例6 $(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$
$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

問9 二項定理を用いて，$(a+b)^6$ を展開せよ。

二項定理により $(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の（④　　　　　　　　）という。ただし，$a^0 = 1$，$b^0 = 1$ とする。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を（⑤　　　　　　　　）ともいう。

例題 2 $(2a-b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ。

解

問 10 $(3a-2b)^4$ の展開式における a^3b の係数を求めよ。

例7 二項定理において，$a=1$，$b=x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1x + {}_n\mathrm{C}_2x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_rx^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると，次の等式が得られる。

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

問 11 等式 $3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$ を示せ。

Challenge　例題　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開

（教科書 p.14）

例題 $(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数を求めよ。

解

←── a^2b^2c が現れるのはこの式のみ

問1 (1)　$(a+b+c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

(2)　$(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^2b^3c の係数を求めよ。

＊　一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は

$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ である。

③ 整式の除法

整式の除法

（教科書 p.15）

例8 $A=2x^2+7x+5$, $B=x+3$のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & \,2x\ +1 \ \leftarrow \text{商} \\
x+3 & \overline{)\,2x^2+7x+5} \\
 & \underline{\,2x^2+6x} \ \longleftarrow (x+3)\times 2x \\
 & x+5 \\
 & \underline{x+3} \ \longleftarrow (x+3)\times 1 \\
 & 2 \ \leftarrow \text{余り}
\end{array}
$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x+3$ よりも次数が低いので，これ以上計算を続けることができない。

このとき，$2x^2+7x+5$ を $x+3$ で割ったときの

　商は $2x+1$，**余り**は 2

であるという。上の割り算から

$A=B(2x+1)+2$　　……①　　←― 割られる式 ＝ 割る式 × 商 ＋ 余り

が成り立つことがわかる。

問 12 $A=6x^2-5x+1$ を $B=3x-4$ で割る計算をせよ。また，例 8 にならって，A を①の形で表せ。

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A=BQ+R}$　　ただし，R の次数 $<$ B の次数

このような Q，R はただ 1 つ定まる。とくに，$R=0$ となるとき，A は B で（⑥　　　　　　）といい，B は A の（⑦　　　　　）であるという。

例題 3 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3-7x^2+3x+8$,　$B=x^2-x-3$

(2)　$A=2x^3+4x^2+7$,　$B=2x^2-3$

解 (1)

(2)

注意　このような計算では，割る式も割られる式も，文字xについて降べきの順に整理しておくとよい。

問 13 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3+3x^2-8x+1$,　$B=x^2+3x-2$

(2)　$A=x^3-x^2-1$,　$B=x^2+2$

例題 4　整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。整式 B を求めよ。

解

問 14　整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。整式 B を求めよ。

Challenge 例題　2 種類の文字を含む整式の除法

（教科書 p.17）

例題　$A=2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3$，$B=x-2a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

問 1　$A=x^3-2ax^2-a^2x+2a^3$，$B=x-a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

④ 分数式とその計算

（教科書 p.18）

$\frac{1}{x}$，$\frac{x^2+2}{x^2-1}$ のように，$\frac{\text{整式}}{\text{1 次以上の整式}}$ の形で表される式を（⑧　　　　　　　）という。整式と分数式を合わせて（⑨　　　　　　　）という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分母と分子に共通な因数があれば，（⑩　　　　　　　）することができる。それ以上約分できない分数式は（⑪　　　　　　　）であるという。

例9 (1) $\dfrac{4xy^2}{6x^3y}=\dfrac{2y}{3x^2}$

(2) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

問 15 次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\dfrac{3x^2y}{9xyz}$

(2) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$

(3) $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}$

乗法・除法

（教科書 p.18）

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10 $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x+1}{x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x+2}{x-3}$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 16 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

加法・減法

（教科書 p.19）

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}},\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}-\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

例 11 $\frac{3}{x^2-4}-\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3-(x+1)}{x^2-4}=\frac{-x+2}{x^2-4}$

$$=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}$$

問 17 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{x^2-x-1}{x^2-x}$

(2) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\frac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

たとえば $\frac{2}{xy}$，$\frac{x}{y^2}$ は $\frac{2}{xy}=\frac{2\times y}{xy\times y}=\frac{2y}{xy^2}$，$\frac{x}{y^2}=\frac{x\times x}{y^2\times x}=\frac{x^2}{xy^2}$

のように，分母が同じ分数式になおすことができる。このように，いくつかの分数式の分母を同じにすることを（⑫　　　　　　　）するという。

例 12 $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}-\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)}$ ←通分する

$$=\frac{4x+2-(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$$

$$=\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}$$ ←分母は展開しなくてもよい

問 18 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$

(2) $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x-3}$

例題 5 $\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}$ を計算せよ。

解

問 19 次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}$

(2)　$\frac{x-6}{x^2-9}+\frac{x-1}{x^2-2x-3}$

(3)　$\frac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\frac{8}{x-2}$

例 13
$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\div\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\div\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

注意　上の例 13 は，分母と分子に x を掛けて

右のように計算してもよい。
$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\frac{1}{x+1}$$

問 20 次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}$

(2)　$\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Training

（教科書 p.21）

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+3y)^3$

(2)　$(4a-b)^3$

(3)　$(5x+2)(25x^2-10x+4)$

(4)　$(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$27x^3+8y^3$

(2)　a^3-64b^3

(3)　$ax^3+125ay^3$

(4)　$8a^3b-27bc^3$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^3+1$

(2)　$(2x+y)^3-(2x-y)^3$

(3)　x^6+16x^3+64

(4)　$a^6-7a^3b^3-8b^6$

4 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x-3y)^7$ における x^5y^2

(2)　$(3x^2+2)^6$ における x^2

5 次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=0$$

6 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=6x^3+7x^2-9x+2,\quad B=2x-1$

(2)　$A=x^3+2x^2+3,\quad B=x^2+4$

7 整式 $2x^3-8x+7$ をある整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。整式 B を求めよ。

8　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{6x+6}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{2x^2+2x}$

(2)　$\frac{x^2-x}{x^2-2x-3}\div\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15}\times\frac{x^2-1}{x}$

9　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{2x-1}{x^2-3x}-\frac{2x+1}{x^2+3x}$

(2)　$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^3-1}$

10　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

(2)　$\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$