

[Level Up]

(教科書 p.58~59)

1 次の問に答えよ。

(1) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ を示せ。

(2) (1)の結果を用いて、次の式を因数分解せよ。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

2 $(ax + b)^{12}$ の展開式における x^2 および x^{11} の係数をそれぞれ求めよ。ただし、 a, b は定数であるとする。

3 α, β を複素数とするとき、次のことを示せ。

(1) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

4 $x = 1 - \sqrt{3}i$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $x^2 - 2x + 4 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) (1)の結果を用いて、 $x^3 - 4x^2 + 9x + 3$ の値を求めよ。

5 次の2つの2次方程式の一方が異なる2つの実数解をもち、他方が虚数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x^2 - 2x + a = 0, \quad x^2 + 4x - 2a = 0$$

6 2次方程式 $x^2 + kx - k - 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2 = 10$ となるような定数 k の値を求めよ。

7 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ると $3x-5$ 余り、 $(x-1)(x+2)$ で割ると $-5x+3$ 余る。このとき、 $P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

8 $3x^3 + ax^2 + bx - 6$ が $x^2 + x - 2$ で割り切れるように、定数 a, b の値を定めよ。

11 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ のとき、次の等式を証明せよ。
 $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$

9 1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを ω で表すとき、次の値を求めよ。

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$

(2) $\omega^4 + \omega^2 + 1$

12 $a \geq b, c \geq d$ のとき、不等式 $(a + b)(c + d) \leq 2(ac + bd)$ を証明せよ。
 また、等号が成り立つのはどのようなときか。

10 立方体の縦を 2cm、横を 3cm それぞれ伸ばし、高さを 1cm 縮めて直方体を作ったら体積が 60cm^3 になった。もとの立方体の 1 辺の長さを求めよ。

13 次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

14 次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a > 0, b > 0$ のとき $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

(2) $a > 0, b > 0$ のとき $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geq 9$