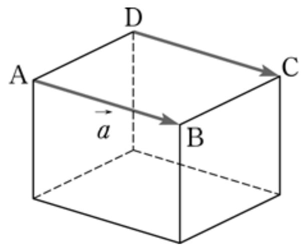
4節　空間におけるベクトル

1 空間のベクトル

空間のベクトル

（教科書 p.67）

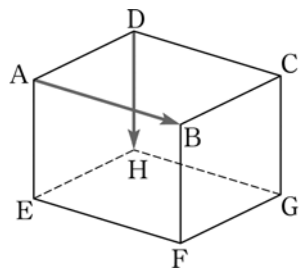


平面の場合と同じように，空間における有向線分 AB について，その位置を問題にしないで，向きと長さだけに着目したものを
（①　　　　　　　　　　　）といい，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ または $\vec{\boldsymbol{a}}$ のように表す。

有向線分 AB の長さを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の（②　　　　　　　　）といい，$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$で表す。

右の図の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のように，向きが同じで大きさが等しいとき，これらのベクトルは等しいという。

また，逆ベクトルや零ベクトルについても，平面の場合と同じように考えることができる。



例1 右の図の直方体 ABCD- EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しいベクトルは

である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ の逆ベクトルは

である。

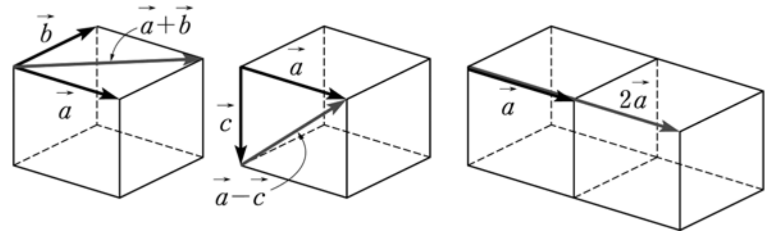
問1 例 1 で，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ に等しいベクトルをすべていいなさい。

また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の逆ベクトルをすべていいなさい。

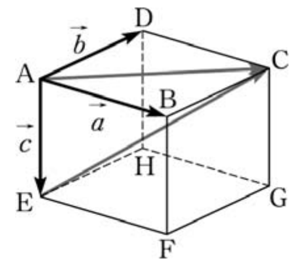
空間のベクトルの和･差･実数倍

（教科書 p.68）

空間のベクトルの和や差，実数倍を，平面の場合と同じように定める。このとき，空間においても，加法の性質や実数倍の性質は，平面の場合と同じように成り立つ。



例2 右の図の直方体 ABCD- EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。



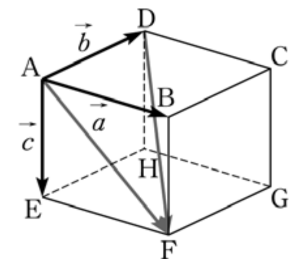
（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=$

問2 右の図の直方体 ABCD- EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。

次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表しなさい。

➜p.76 復習問題1



（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

2 空間の座標とベクトル

空間の座標

（教科書 p.69）

空間の座標は，1 点 O で互いに直交する 3 本の数直線によって定められる。

それぞれの数直線を（③　　　　　），（④　　　　　），（⑤　　　　　）といい，まとめて（⑥　　　　　）という。

また，点 O を座標の（⑦　　　　　）という。

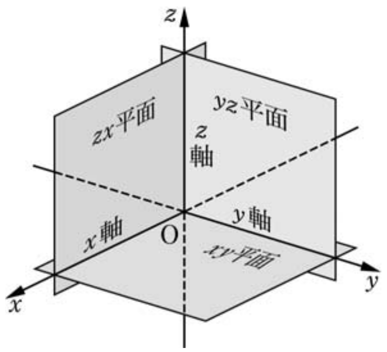
さらに

x 軸と y 軸を含む平面を（⑧　　　　　）

y 軸と z 軸を含む平面を（⑨　　　　　）

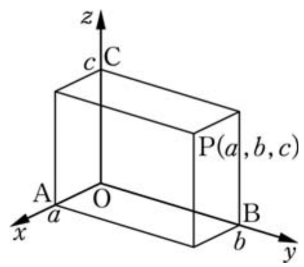
z 軸と x 軸を含む平面を（⑩　　　　　）

といい，まとめて（⑪　　　　　）という。



空間の点 P に対し，P を通り各座標平面に平行な平面が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を，それぞれ A，B，C とする。

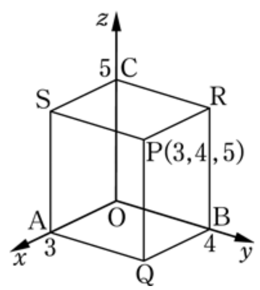
各座標軸上で，点 A，B，C の座標がそれぞれ a，b，c であるとき，この 3 つの数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の（⑫　　　　　）といい，a，b，c をそれぞれ点 P の（⑬　　　　　），（⑭　　　　　），（⑮　　　　　）という。また，点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ であることを（⑯　　　　　）と書く。



例3 右の図で，点 $\mathrm{P}(3,\ 4,\ 5)$ に対して，点 A，B，S の座標は，次のようになる。

（　　　　　　　　），（　　　　　　　　），

（　　　　　　　　）

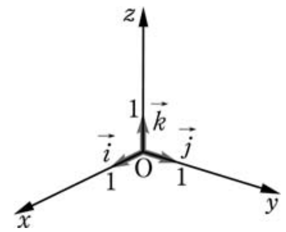


問3 例 3 で，点 C，Q，R の座標を求めなさい。

空間のベクトルの成分表示

（教科書 p.70）

空間において，O を原点とする座標軸が定まっているとき，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きで，大きさが 1 のベクトルを（⑰　　　　　）といい，それぞれ $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ で表す。



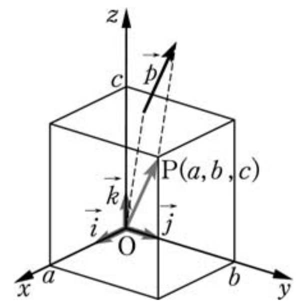
この空間におけるベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ であるとき，$\vec{p}$ は

$$\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$

と表される。この a，b，c をそれぞれ $\vec{p}$ の（⑱　　　　　），（⑲　　　　　），（⑳　　　　　）といい，$\vec{p}$ を

$$\vec{p}=(a,\ b,\ c)$$

と表す。この表し方を，$\vec{p}$ の（㉑　　　　　）という。



とくに，$\vec{0}$，および $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{i}=(1,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{j}=(0,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{k}=(0,\ 0,\ 1)$$

成分表示とベクトルの大きさ

（教科書 p.70）

成分表示とベクトルの大きさ
$\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ のとき　　$\lvert\vec{\boldsymbol{p}}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}$

例4 $\vec{a}=(1,\ 4,\ -3)$ の大きさは，

$|\vec{a}|=$

問4 次のベクトルの大きさを求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2,\ 3,\ 1)$

(2) $\vec{b}=(3,\ -2,\ 6)$

成分表示されたベクトルの計算

（教科書 p.71）

成分表示されたベクトルの計算
〔1〕 $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3})+(\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{b_3})=(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2}+\boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{a_3}+\boldsymbol{b_3})$ 〔2〕 $(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3})-(\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{b_3})=(\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2}-\boldsymbol{b_2},\ \boldsymbol{a_3}-\boldsymbol{b_3})$ 〔3〕 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3})=(\boldsymbol{ka_1},\ \boldsymbol{ka_2},\ \boldsymbol{ka_3})$ k は実数

例5 $\vec{a}=(5,\ -1,\ 0)$，$\vec{b}=(3,\ 2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}+2\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$\vec{a}+\vec{b}=$

$\vec{a}-\vec{b}=$

$\vec{a}+2\vec{b}=$

問5 $\vec{a}=(4,\ 0,\ -5)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。 ➜p.76 復習問題3

⑴ $\vec{a}+\vec{b}$

⑵ $\vec{a}-\vec{b}$

⑶ $\vec{a}+3\vec{b}=(4,\ 0,\ -5)+3(2,\ 1,\ 3)$

3 空間のベクトルの内積

ベクトルの内積

（教科書 p.72）

空間においても，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を，平面の場合と同じように定める。

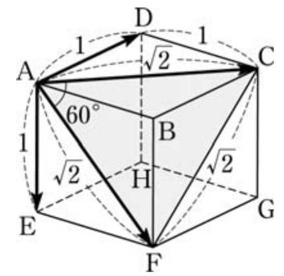
このとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ についても，平面の場合と同じように

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$　　ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

と定める。なお，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

◀内積は，ベクトルではなく，実数である。

例6 右の図のような，1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD- EFGH において，



△ AFC は，1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

また，$\angle\mathrm{DAE}=90^\circ$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=$

問6 例 6 で，次の内積を求めなさい。

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{FB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FA}}$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

内積と成分表示
（教科書 p.72）

内積と成分表示
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$

例7 $\vec{a}=(2,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(3,\ 7,\ -2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

問7 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。
(1) $\vec{a}=(4,\ 3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ 5)$

(2) $\vec{a}=(5,\ 6,\ -2)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 8)$

ベクトルのなす角
（教科書 p.73）

空間において，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，平面の場合と同じように，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

◀$0°\leqq\theta\leqq180°$

例題 1 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めなさい。
$\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

解

問8 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。
(1) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 2)$

(2) $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$

ベクトルの垂直
（教科書 p.74）

空間において，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積について，平面の場合と同じように次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，このことは次のように表される。

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0}$$

◀$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

例8 $\vec{a}=(2,\ 4,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ 1,\ -4)$ が垂直になるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

問9 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるような x，y の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(3,\ 4,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ -2,\ 1)$

(2) $\vec{a}=(5,\ 4,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ y,\ -1)$

内積の性質

（教科書 p.74）

空間のベクトルの内積についても，平面の場合と同じように次のことが成り立つ。

〔1〕 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

〔2〕 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

〔3〕 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$ 　 k は実数

〔4〕 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

〔5〕 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

4 空間のベクトルと図形

（教科書 p.75）

例題 2 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
このとき，$OA\perp BC$ であることを示しなさい。

◀ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であることを示せばよい。

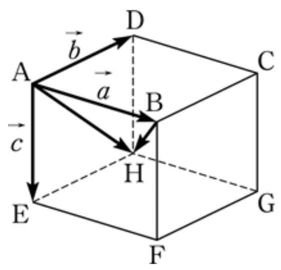
解

問10 例題 2 の正四面体 OABC において，OC ⊥ AB であることを示しなさい。

復 習 問 題

（教科書 p.76）

1 右の図の直方体 ABCD − EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表しなさい。



⑴　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

2 次のベクトルの大きさを求めなさい。

⑴　$\vec{p}=(5,\ 0,\ 2)$

⑵　$\vec{q}=(1,\ 8,\ -4)$

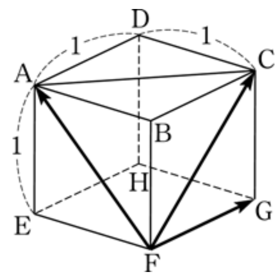
3 $\vec{a}=(4,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 3,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

⑴$\vec{a}+\vec{b}$

⑵$\vec{a}-\vec{b}$

⑶$2\vec{a}+\vec{b}$

4 右の図のような，1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD − EFGH において，次の内積を求めなさい。



$\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}}$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}}$

5 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。

⑴　$\vec{a}=(1,\ 5,\ 4)$，$\vec{b}=(3,\ -2,\ 1)$

⑵　$\vec{a}=(2,\ 7,\ -2)$，$\vec{b}=(-6,\ 2,\ 1)$

6 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ -1)$

(2) $\vec{a}=(2,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$

7 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 4,\ 8)$，$\vec{b}=(4,\ -3,\ z)$ が垂直になるような z の値を求めなさい。