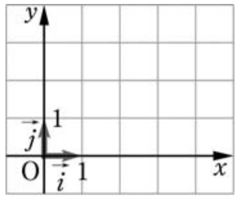
2節　ベクトルの成分表示と内積

1　ベクトルの成分表示

基本ベクトル　（教科書 p.50）

O を原点とする座標平面上において，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きで，大きさが 1 のベクトルを（①　　　　　　　　　）といい，それぞれ $\vec{i}$，$\vec{j}$ で表す。



例1　$P(3,\ 2)$ のとき，$\vec{i}$，$\vec{j}$ を用いて，$\overrightarrow{OP}$ を表してみよう。

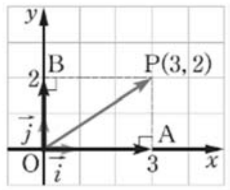
右の図のように，点 P から x 軸に垂線 PA を，y 軸に垂線 PB を引くと

$\overrightarrow{OA} =$（　　　　　），$\overrightarrow{OB} =$（　　　　　）

であるから

$\overrightarrow{OP} =$

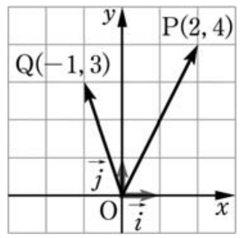
$=$



問1　$P(2,\ 4)$，$Q(-1,\ 3)$ のとき，次のベクトルを，$\vec{i}$，$\vec{j}$ を用いて表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{OP}$

(2)　$\overrightarrow{OQ}$



ベクトルの成分表示　（教科書 p.51）

右の図のベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ となる点 P の座標が $(a,\ b)$ であるとき，$\vec{p}$ は

$\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j}$

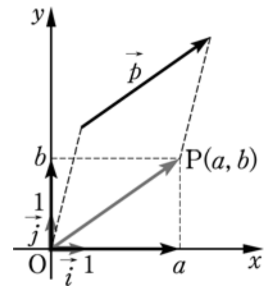
と表される。この a，b をそれぞれ $\vec{p}$ の（②　　　　　　　），（③　　　　　　）といい，$\vec{p}$ を

$\vec{p} = (a,\ b)$

と表す。この表し方を $\vec{p}$ の（④　　　　　　　）という。

とくに，$\vec{0}$，および $\vec{i}$，$\vec{j}$ の成分表示は次のようになる。

$\vec{0} = (0,\ 0)$，　$\vec{i} = (1,\ 0)$，　$\vec{j} = (0,\ 1)$



例2　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点 A の座標は $(2,\ 3)$ であるから

$\vec{a} =$

よって

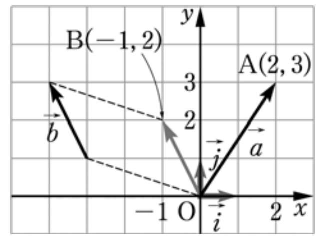
$\vec{a} =$

また，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ となる点 B の座標は $(-1,\ 2)$ であるから

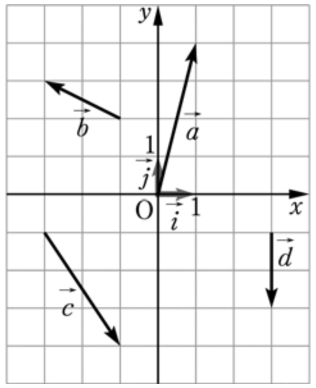
$\vec{b} =$

よって

$\vec{b} =$



問2 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を，それぞれ成分表示しなさい。



問3 次のベクトルの大きさを求めなさい。

(1) $\vec{a} = (2,\ 1)$

(2) $\vec{b} = (0,\ -2)$

(3) $\vec{c} = (-1,\ 3)$

(4) $\vec{d} = (-3,\ -4)$

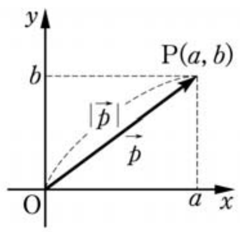
成分表示とベクトルの大きさ

（教科書 p.52）

成分表示とベクトルの大きさ

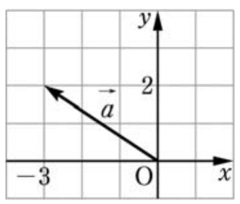
$\vec{p} = (a,\ b)$ のとき

$|\vec{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



例3 $\vec{a} = (-3,\ 2)$ の大きさは

$|\vec{a}| =$



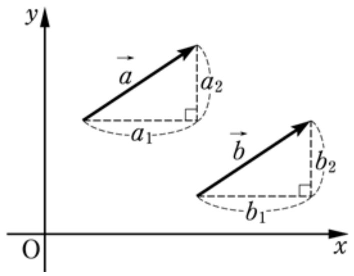
2 成分表示されたベクトルの計算

等しいベクトル

（教科書 p.53）

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が等しいのは，x 成分どうし，y 成分どうしがともに等しいときである。

すなわち，次のことが成り立つ。



等しいベクトルと成分表示
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2}$

例題 1 2 つのベクトル $\vec{a}=(m-3,\ n+5)$，$\vec{b}=(4,\ 2)$ が等しくなるように，m，n の値を定めなさい。

解

問4 次の 2 つのベクトルが等しくなるように，m，n の値を定めなさい。

(1) $\vec{a}=(m+3,\ 1)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$

(2) $\vec{a}=(m-1,\ n+7)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$

成分表示されたベクトルの計算

（教科書 p.54）

成分表示されたベクトルの計算
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき 〔1〕 $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)}$ 〔2〕 $\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)}$ 〔3〕 $\boldsymbol{k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)}$　　k は実数

問5 $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$

(3) $3\vec{a}$

例4 $\vec{a}=(5,\ -3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+4\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$\vec{a}+4\vec{b}=$

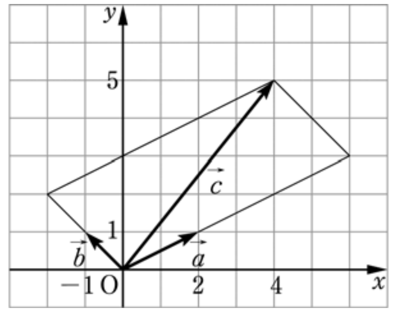
$2\vec{a}-3\vec{b}=$

問6 $\vec{a}=(6,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}$

(2)　$3\vec{a}-4\vec{b}$

例題2 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=(4,\ 5)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表しなさい。



解

問7 $\vec{a}=(7,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{c}=(4,\ 5)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表しなさい。

3 ベクトルの内積

ベクトルの内積

（教科書 p.56）

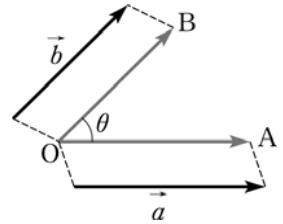
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように点 A，B をとる。

このとき

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑤　　　　　　）という。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑥　　　　　　）といい，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ で表す。



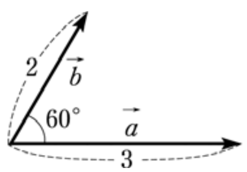
◀内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，ベクトルではなく，実数である。

ベクトルの内積
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

例5 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 60° のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$



問8 次の場合について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。
ただし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\theta=30^\circ$

(2) $|\vec{a}|=7$，$|\vec{b}|=1$，$\theta=90^\circ$

(3) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\theta=120^\circ$

◀$\cos\theta$ の値

θ	$\cos\theta$
0°	1
30°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\dfrac{1}{2}$
90°	0
120°	$-\dfrac{1}{2}$
135°	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
150°	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
180°	-1

内積と成分表示

（教科書 p.57）

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，次のようになる。

内積と成分表示
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

例6 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ -1)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

問9 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(7,\ -3)$

(3) $\vec{a}=(1,\ 6)$，$\vec{b}=(8,\ -2)$

(4) $\vec{a}=(6,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 9)$

4 ベクトルのなす角

ベクトルのなす角

（教科書 p.58）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

が成り立つ。

例題 3 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

解

◀ $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$
$|\vec{b}|=\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}$

問10 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(0,\ 1)$

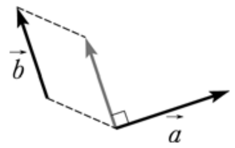
(3) $\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$

(4) $\vec{a}=(0,\ -2)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

ベクトルの垂直

（教科書 p.58）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（⑦　　　　　）であるといい，$\vec{a} \perp \vec{b}$と表す。



$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき，$\cos 90° = 0$ より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$$

一般に，次のことが成り立つ。

ベクトルの垂直条件
$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき，このことは次のように表される。

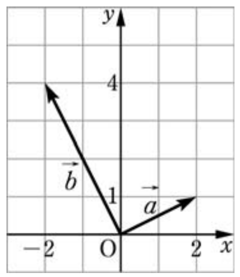
$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$$

◀$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

例7 $\vec{a} = (2,\ 1)$，$\vec{b} = (-2,\ 4)$ のとき

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

したがって，$\vec{a} \perp \vec{b}$ である。

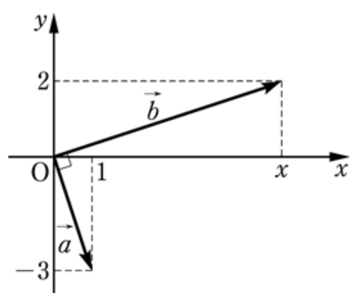


問11 次のベクトルのうち，どれとどれが垂直なベクトルですか。

$\vec{a} = (4,\ -1)$，$\vec{b} = (1,\ -4)$，$\vec{c} = (-2,\ -8)$

例8 $\vec{a} = (1,\ -3)$，$\vec{b} = (x,\ 2)$ が垂直になるとき，

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ であるから



問12 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるような x，y の値を求めなさい。

(1)　$\vec{a} = (4,\ 6)$，$\vec{b} = (x,\ -2)$

(2)　$\vec{a} = (9,\ 3)$，$\vec{b} = (2,\ y)$

内積の性質

（教科書 p.60）

ベクトルの内積について，次のことが成り立つ。

内積の性質
〔1〕　$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2}$ 〔2〕　$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$ 〔3〕　$\boldsymbol{(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})}$　　k は実数 〔4〕　$\boldsymbol{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}}$ 〔5〕　$\boldsymbol{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}}$

例9 $|\vec{a}| = 4$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ のとき，$\vec{a} \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$ の値を求めてみよう。

$\vec{a} \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) =$

問13 $|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 4$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ のとき，次の値を求めなさい。

(1) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

復 習 問 題

1 次のベクトルの大きさを求めなさい。

(1) $\vec{a}=(4,\ 1)$

(2) $\vec{b}=(8,\ -6)$

2 $\vec{a}=(m+6,\ n-4)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ が等しくなるように m，n の値を定めなさい。

3 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ 3)$ のとき，次のベクトルを成分表示しなさい。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$

(3) $5\vec{a}-2\vec{b}$

4 $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=(8,\ 6)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表しなさい。

5 次の場合について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。ただし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。

(1) $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\theta=45^\circ$

(2) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=150^\circ$

6 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ 5)$

(2) $\vec{a}=(7,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ -3)$

7 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めなさい。

(1) $\vec{a} = (1,\ 0)$，$\vec{b} = (1,\ \sqrt{3})$

(2) $\vec{a} = (2,\ 1)$，$\vec{b} = (3,\ -6)$

(3) $\vec{a} = (\sqrt{3},\ -1)$，$\vec{b} = (2,\ 0)$

(4) $\vec{a} = (-1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ -1)$

8 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるような x，y の値を求めなさい。

(1) $\vec{a} = (3,\ 4)$，$\vec{b} = (x,\ 6)$

(2) $\vec{a} = (8,\ -2)$，$\vec{b} = (1,\ y)$