3節 漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

漸化式 （教科書 p.30）

前の項からその次の項を求める式を，（① ）という。

一般に，公差が d の等差数列の漸化式は次のようになる。

（② ）

例 1 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$a_1=3$

$a_2=$

$a_3=$

$a_4=$

.....

問1 次のように定められた数列の第 4 項を求めなさい。

(1) $a_1=18$，$a_{n+1}=a_n+6\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=7$，$a_{n+1}=-2a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

漸化式と一般項 （教科書 p.31）

例2 (1) $a_1=30$，$a_{n+1}=a_n-5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列は，初項 30，公差 -5 の等差数列であるから，一般項は

$a_n=$

よって　$a_n=$

◀初項 a，公差 d の等差数列の一般項 $a_n=a+(n-1)d$

(2) $a_1=9$，$a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列は，初項 9，公比 2 の等比数列であるから，一般項は

$a_n=$

◀初項 a，公比 r の等比数列の一般項　$a_n=ar^{n-1}$

問2 次のように定められた数列の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=8$，$a_{n+1}=a_n+3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=5$，$a_{n+1}=4a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式 （教科書 p.32）

例題 1 次のように定められた数列の一般項 a_n を求めなさい。

初項 $a_1=3$，漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

◀初項と漸化式から $3,\ 5,\ 11,\ 29,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

解

問3 次のように定められた数列の一般項 a_n を求めなさい。

初項 $a_1=4$，　漸化式 $a_{n+1}=2a_n-1$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$

2 数学的帰納法

（教科書 P.34）

あることがらがすべての自然数 n で成り立つことを証明する方法を，（③　　　　　　　　）という。

数学的帰納法
〔1〕　$n=1$ のとき成り立つことを示す 〔2〕　$n=k$ のとき成り立つことを仮定して， 　　　$n=k+1$ で成り立つことを示す

たとえば，前ページの等式①がすべての自然数 n で成り立つことを，数学的帰納法では次のように証明する。

〔1〕　$n=1$ のとき

等式①の= 1

(左辺) $=1$　　(右辺)$=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$

よって，等式①は $n=1$ のとき成り立つ。

等式①で $n=1$ とした式

$1=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)$

が成り立つことを示す。

〔2〕　$n=k$ のとき

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき，

等式①の

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，等式①は $n=k+1$ のとき成り立つ。

等式①で $n=k+1$ とした式

$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

が成り立つことを示す。

〔1〕，〔2〕から，すべての自然数 n について等式①は成り立つ。

〔1〕，〔2〕を示せたので，すべての自然数 n について等式①が成り立つことがいえる。

例題 1 すべての自然数 n について次の等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \cdots\cdots①$$

証明

問4 すべての自然数 n について次の等式が成り立つことを，
数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1) \qquad \cdots\cdots①$$

復　習　問　題

（教科書 P.36）

1　次のように定められた数列の一般項を求めなさい。

(1)　$a_1 = 10$，$a_{n+1} = a_n + 5$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2)　$a_1 = 4$，$a_{n+1} = -3a_n$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

2　次のように定められた数列の一般項 a_n を求めなさい。

初項 $a_1 = 2$，漸化式 $a_{n+1} = 4a_n - 3$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

3　すべての自然数 n について次の等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$　　……①