2節　いろいろな数列

1 いろいろな数列の和

和を表す記号

（教科書 P.20）

数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n の初項から第 n 項までの和

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

を，記号 $\sum$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k}$ と表す。すなわち

$$\boldsymbol{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

a_k が k の式で表されるとき，その式に $k=1$ から順に $k=n$ まで代入してすべてをたしたものが，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ である。

◀$\sum$ は，シグマと読む。sum（和）の頭文字Ｓにあたるギリシャ文字である。

例1

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2k =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3^k =$

◀$3\times1+3\times2+3\times3+3\times4+3\times5$

問1 例１のように，次の和を記号 $\sum$ を用いないで表しなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 6k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 10^k$

例２

(1) $3+6+9+12+15=$

(2) $2+2^2+2^3+2^4=$

問2 次の和を記号 $\sum$ を用いて表しなさい。

(1) $5+10+15+20+25+30$

(2) $7+7^2+7^3+7^4$

Σの性質

（教科書 P.21）

Σの性質
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{a_k}+\boldsymbol{b_k}) = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_k} + \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{b_k}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{c a_k} = \boldsymbol{c}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_k}$　（ただし，$\boldsymbol{c}$ は定数）

◀$\sum(●+■)=\sum●+\sum■$

◀$\sum c● = c\sum●$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は n 個の項の和を表すので，数列の各項がすべて定数 c のときは

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{個}}$$

したがって（①　　　　　　　　）

例3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 3 =$

問3 次の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 5$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-2)$

自然数の2乗の和

（教科書 P.22）

記号$\sum$を使って，自然数の和，自然数の2乗の和を書くと，次のようになる。

自然数の和，自然数の2乗の和
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

例4

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{50} k =$

◀$1+2+3+\cdots+50$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 =$

◀$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

問 4 次の和を求めなさい。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} k$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{40} k$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{25} k^2$

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} k^2 =$

いろいろな数列の和

例5

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (2k+3)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (k^2+3k-2)$

問5 次の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(5k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2+2)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3k^2+k+5)$

例題 1 次の和を求めなさい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)\,(\mathrm{k}-3)$

解

問6 次の和を求めなさい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(k+5)\,(k-2)$

例題 2　次の数列の初項から第 20 項までの和を求めなさい。

$1\times 2,\ 2\times 3,\ 3\times 4,\ 4\times 5,\ \cdots$

解

問7　次の数列の初項から第 15 項までの和を求めなさい。

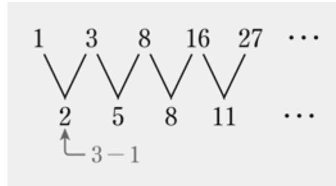
$1\times 3,\ 3\times 5,\ 5\times 7,\ 7\times 9,\ \cdots$

2　階差数列

階差数列　（教科書 P.26）

ある数列の隣り合う項の差を計算して得られる数列を，もとの数列の（②　　　　　　　）という。

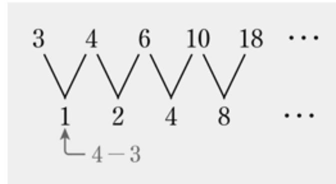
例6　(1)　数列 $1,\ 3,\ 8,\ 16,\ 27,\ \cdots$ の階差数列は



となり

である。

(2)　数列 $3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 18,\ \cdots$ の階差数列は



となり

である。

問8　次の数列の階差数列を調べなさい。

(1)　$5,\ 16,\ 33,\ 56,\ 85,\ \cdots$

(2)　$2,\ 50,\ 74,\ 86,\ 92,\ \cdots$

階差数列ともとの数列の一般項

（教科書 P.27）

階差数列ともとの数列の一般項
$n \geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})}$

この関係は，次のように表すことができる。

$n \geqq 2$ のとき　（③　　　　　　　　　　　）

例題 3　階差数列を用いて，次の数列の一般項 a_n を求めなさい。

4，5，8，13，20，…

解

問9　階差数列を用いて，次の数列の一般項 a_n を求めなさい。

1，6，13，22，33，…

復 習 問 題

（教科書 P.29）

1 次の和を記号 $\sum$ を用いて表しなさい。

(1) $7+14+21+28+35+42$

(2) $5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6$

2 次の和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^{20} k$

(2) $\sum_{k=1}^{17} k^2 =$

3 次の和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^{12} (3k+5)$

(2) $\sum_{k=1}^{7} (k^2-3)$

⑶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3k^2+2k-10)$

4 次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=1}^{6}(k+6)(k-4)$$

5 次の数列の初項から第 15 項までの和を求めなさい。

2×4，4×5，6×6，8×7，$\cdots$

6 次の数列の階差数列を調べなさい。

⑴ 40，27，22，25，36，$\cdots$

⑵ 10，64，82，88，90，$\cdots$

7 階差数列を用いて，次の数列の一般項 a_n を求めなさい。

5，7，12，20，31，…