[Level Up]

（教科書 p.176～177）

１ 地球と太陽の距離は，約 $1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$ であり，光の速さは約 $3.0 \times 10^{8}\mathrm{m/s}$ である。太陽からの光が地球に届くまでの時間はおよそ何分何秒か。

２ 次の式を簡単にせよ。

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

(2) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)(a + b)$

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + 1 + a^{-\frac{2}{3}}\right)$

３ $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 4$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x + x^{-1}$

(2) $x^2 + x^{-2}$

4 次の 3 つの数を小さい方から順に並べよ。

(1) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{7}}$

5 $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = 9^x - 2 \times 3^{x+1}$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

6 関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - (2^x + 2^{-x}) - 3$ について，次の問に答えよ。

(1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

7 $\log_{10} 2 = p$，$\log_{10} 3 = q$ とするとき，次の値を p，q で表せ。

(1) $\log_{10} 12$

(2) $\log_{10} 5$

(3) $\log_3 20$

8 $a^{\log_a M} = M$ となることを利用して，次の値を求めよ。

(1) $2^{3\log_2 3}$

(2) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\log_{10} 4}$

(3) $4^{-\log_2 3}$

9 $a,\ b,\ c$ は正の数で，$a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\log_a b = \log_{a^2} b^2$

(2) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

10 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_3(x-4) = \log_9(x-2)$

(2) $\log_2(x-2)+1 \leqq \log_4(3x+4)$

11 $x+y=4$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値と，そのときの x，y の値を求めよ。

12 $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) 6^n が 20 桁の整数となるような自然数 n を求めよ。

(2) (1)で求めた n に対して，6^n の最高位の数字を求めよ。

13 $xyz \neq 0$ で，$2^x = 5^y = 10^z$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$

14 あるバクテリアは，1 時間ごとに 2 倍の割合で増殖する。バクテリアの数が 1000 倍になるのはおよそ何時間後か。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

[Level Up]

（教科書 p.176～177）

1　地球と太陽の距離は，約 1.5×10^{11}m であり，光の速さは約 3.0×10^{8}m/s である。太陽からの光が地球に届くまでの時間はおよそ何分何秒か。

$$1.5\times10^{11}\div(3.0\times10^{8})=0.5\times10^{11-8}$$
$$=0.5\times10^{3}=500$$

$500=60\times8+20$ であるから，太陽からの光が地球に届くまでの時間は**およそ 8 分 20 秒**である。

2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$=a^1+2a^0+a^{-1}$$
$$=\boldsymbol{a+\frac{1}{a}+2}$$

(2)　$\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)(a+b)$

$$=\left\{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2\right\}(a+b)$$
$$=(a-b)(a+b)=\boldsymbol{a^2-b^2}$$

(3)　$\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+1+a^{-\frac{2}{3}}\right)$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$$
$$=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3=a-a^{-1}=\boldsymbol{a-\frac{1}{a}}$$

3　$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+x^{-1}$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$ の両辺を 2 乗すると

$$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$$
$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=16$$
$$x^1+2x^0+x^{-1}=16$$
$$x+2+x^{-1}=16$$

よって　　$x+x^{-1}=\mathbf{14}$

(2)　x^2+x^{-2}

(1) より　　$x+x^{-1}=14$

この両辺を 2 乗すると

$$(x+x^{-1})^2=14^2$$
$$x^2+2x\cdot x^{-1}+(x^{-1})^2=196$$
$$x^2+2+x^{-2}=196$$

よって　　$x^2+x^{-2}=\mathbf{194}$

4　次の 3 つの数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$

3，4，6 の最小公倍数 12 を考えて

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = (2^4)^{\frac{1}{12}} = 16^{\frac{1}{12}}$$
$$= \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{12}} = (3^3)^{\frac{1}{12}} = 27^{\frac{1}{12}}$$
$$= \sqrt[12]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{12}} = (5^2)^{\frac{1}{12}} = 25^{\frac{1}{12}}$$
$$= \sqrt[12]{25}$$

$16 < 25 < 27$ であるから

$\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{25} < \sqrt[12]{27}$

すなわち　　$\boldsymbol{\sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[4]{3}}$

(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{7}}$

3，4，6 の最小公倍数 12 を考えて

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{12}} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{1}{81}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{12}} = \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}^{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{1}{64}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{12}} = \left\{\left(\frac{1}{7}\right)^2\right\}^{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{1}{49}}$$

$\frac{1}{81} < \frac{1}{64} < \frac{1}{49}$ であるから

$$\sqrt[12]{\frac{1}{81}} < \sqrt[12]{\frac{1}{64}} < \sqrt[12]{\frac{1}{49}}$$

すなわち　　$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{\frac{1}{4}} < \sqrt[6]{\frac{1}{7}}}$

5　$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = 9^x - 2 \times 3^{x+1}$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$3^x = t$とおく。$-1 \leqq x \leqq 2$ であり，底 3 は1 より大きいから

$3^{-1} \leqq 3^x \leqq 3^2$

よって　$\frac{1}{3} \leqq t \leqq 9$　……①

$y = (3^2)^x - 2 \times 3 \times 3^x = (3^x)^2 - 6 \times 3^x$

$= t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$

①の範囲において，y は

$t = 9$ のとき　最大値 27

$t = 3$ のとき　最小値 -9

をとる。

ここで

$t = 9$ となるのは$3^x = 9$　すなわち　$x = 2$ のとき

$t = 3$となるのは$3^x = 3$　すなわち　$x = 1$ のときである。

したがって，この関数は

$x = 2$ のとき　最大値 27

$x = 1$ のとき　最小値 -9

6　関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - (2^x + 2^{-x}) - 3$ について，次の問に答えよ。

(1)　$2^x + 2^{-x} = t$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

$t^2 = (2^x + 2^{-x})^2$

$= 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2$

$= 2^{2x} + 2 \cdot 2^0 + 2^{-2x}$

$= (2^2)^x + 2 + (2^2)^{-x}$

$= 4^x + 2 + 4^{-x}$

よって　$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$

したがって

$f(x) = (t^2 - 2) - t - 3 = \boldsymbol{t^2 - t - 5}$

(2)　$f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1) より，$t = 2^x + 2^{-x}$ のとき

$f(x) = t^2 - t - 5$

$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$

ここで，$2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

等号が成立するのは

$2^x = 2^{-x}$

すなわち $x = 0$ のときである。

よって，t のとり得る値の範囲は

$t \geqq 2$

この範囲における $f(x)$ の最小値は，$t = 2$ のとき$2^2 - 2 - 5 = -3$である。

したがって，$f(x)$ は **$x = 0$ のとき，最小値 -3** をとる。

7　$\log_{10} 2 = p$，$\log_{10} 3 = q$ とするとき，次の値を p，q で表せ。

(1)　$\log_{10} 12$

$= \log_{10}(2^2 \times 3)$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \boldsymbol{2p + q}$

(2)　$\log_{10} 5$

$= \log_{10} \frac{10}{2}$

$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= 1 - \log_{10} 2 = \boldsymbol{1 - p}$

(3)　$\log_3 20$

$=\dfrac{\log_{10}20}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{\log_{10}(2^2\times 5)}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}5}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{2p+(1-p)}{q}=\boldsymbol{\dfrac{p+1}{q}}$

8　$a^{\log_a M}=M$ となることを利用して，次の値を求めよ。

$a^x=M$とすると，対数の定義より

$x=\log_a M$

よって　　$a^{\log_a M}=M$

(1)　$2^{3\log_2 3}$

$=2^{\log_2 3^3}=2^{\log_2 27}=\boldsymbol{27}$

(2)　$\left(\frac{1}{100}\right)^{\log_{10}4}$

$=(10^{-2})^{\log_{10}4}=10^{-2\log_{10}4}$

$=10^{\log_{10}4^{-2}}=10^{\log_{10}\frac{1}{16}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

(3)　$4^{-\log_2 3}$

$=(2^2)^{-\log_2 3}=2^{-2\log_2 3}$

$=2^{\log_2 3^{-2}}=2^{\log_2\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

9　$a,\ b,\ c$ は正の数で，$a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1)　$\log_a b=\log_{a^2}b^2$

$\log_{a^2}b^2=\dfrac{\log_a b^2}{\log_a a^2}=\dfrac{2\log_a b}{2\log_a a}=\log_a b$

よって　　$\log_a b=\log_{a^2}b^2$

(2)　$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\dfrac{\log_a a}{\log_a c}=\log_a a=1$

よって　　$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

10　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_3(x-4)=\log_9(x-2)$

真数は正であるから

$x-4>0,\ x-2>0$

よって　　$x>4$　　……①

与えられた方程式は

$\log_3(x-4)=\log_9(x-2)$

$\log_3(x-4)=\dfrac{\log_3(x-2)}{\log_3 9}$

$\log_3(x-4)=\dfrac{\log_3(x-2)}{2}$

よって　　$2\log_3(x-4)=\log_3(x-2)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(x-2)$

したがって

$(x-4)^2=x-2$

$x^2-9x+18=0$

$(x-6)(x-3)=0$

これを解くと　　$x=3,\ 6$

①より　　$\boldsymbol{x=6}$

(2) $\log_2(x-2)+1 \leqq \log_4(3x+4)$

真数は正であるから

$x-2>0$，$3x+4>0$

よって　$x>2$　……①

与えられた不等式は

$$\log_2(x-2)+\log_2 2 \leqq \frac{\log_2(3x+4)}{\log_2 4}$$

$$\log_2 2(x-2) \leqq \frac{\log_2(3x+4)}{2}$$

$$2\log_2 2(x-2) \leqq \log_2(3x+4)$$

$$\log_2\{2(x-2)\}^2 \leqq \log_2(3x+4)$$

底 2 は 1 より大きいから

$$\{2(x-2)\}^2 \leqq 3x+4$$

$$4x^2-16x+16 \leqq 3x+4$$

$$4x^2-19x+12 \leqq 0$$

$$(4x-3)(x-4) \leqq 0$$

$\frac{3}{4} \leqq x \leqq 4$　……②

①，②より　$\boldsymbol{2 < x \leqq 4}$

11 $x+y=4$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

真数は正であるから

$x>0$，$y>0$

ここで，$x+y=4$ であるから　$y=-x+4$

$y>0$ より　$-x+4>0$

よって　$0<x<4$　……①

したがって

$$\begin{aligned}\log_2 x+\log_2 y &= \log_2 xy\\ &= \log_2 x(-x+4)\\ &= \log_2(-x^2+4x)\end{aligned}$$

底 2 が 1 より大きいから，$-x^2+4x$ が最大のとき，$\log_2(-x^2+4x)$ も最大となる。

$-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

より，①の範囲では，$-x^2+4x$ は $x=2$ のとき最大値 4 をとる。

このとき

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

$y=2$

である。

したがって，$\log_2 x+\log_2 y$ は **$x=y=2$ のとき最大値 2** をとる。

12 $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) 6^n が 20 桁の整数となるような自然数 n を求めよ。

6^n が 20 桁の整数であるとき

$10^{19} \leqq 6^n < 10^{20}$

各辺の常用対数をとると

$\log_{10} 10^{19} \leqq \log_{10} 6^n < \log_{10} 10^{20}$

$19 \leqq n \log_{10} 6 < 20$

$19 \leqq n(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) < 20$

$19 \leqq n(0.3010 + 0.4771) < 20$

$19 \leqq 0.7781n < 20$

ここで

$19 \div 0.7781 = 24.4\cdots$

$20 \div 0.7781 = 25.7\cdots$

であるから

$24.4\cdots \leqq n < 25.7\cdots$

n は自然数であるから　　$\boldsymbol{n = 25}$

(2) (1)で求めた n に対して，6^n の最高位の数字を求めよ。

6^{25} の常用対数をとると

$\log_{10} 6^{25} = 25\log_{10}6$

$= 25(\log_{10}2 + \log_{10}3)$

$= 25 \times (0.3010 + 0.4771)$

$= 25 \times 0.7781 = 19.4525$

よって　$6^{25} = 10^{19.4525} = 10^{19} \times 10^{0.4525}$

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$10^{0.3010} = 2$，$10^{0.4771} = 3$

底 10 は 1 より大きいから

$10^{0.3010} < 10^{0.4525} < 10^{0.4771}$

$2 < 10^{0.4525} < 3$

よって，6^n の最高位の数字は **2** である。

13 $xyz \neq 0$ で，$2^x = 5^y = 10^z$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$2^x = 5^y = 10^z = t$ とおく。このとき，$t > 0$ である。

$2^x = t$ より　　$x \log_{10} 2 = \log_{10} t$

よって　　$x = \frac{\log_{10} t}{\log_{10} 2}$

同様に $5^y = t$ より　$y = \frac{\log_{10} t}{\log_{10} 5}$

$10^z = t$ より　　$z = \log_{10} t$

よって

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} t} + \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} t}$$

$$= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 5}{\log_{10} t} = \frac{\log_{10}(2 \times 5)}{\log_{10} t}$$

$$= \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} t} = \frac{1}{\log_{10} t} = \frac{1}{z}$$

ゆえに　$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

14 あるバクテリアは，1 時間ごとに 2 倍の割合で増殖する。バクテリアの数が 1000 倍になるのはおよそ何時間後か。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

$2^x = 1000$ となる x の値を求めればよい。

両辺の常用対数をとると

$\log_{10} 2^x = \log_{10} 1000$

$x\log_{10} 2 = 3$

$0.3010x = 3$

よって　$x = \frac{3}{0.3010} = 9.96\cdots$

したがって，**およそ 10 時間後**