２節 対数関数

❶ 対数とその性質

（教科書 p.163）

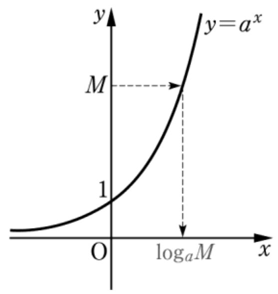
一般に，$a>0$，$a\neq 1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ のグラフからわかるように，与えられた正の実数 M に対して

$a^p=M$

となる実数 p がただ１つ定まる。この p を

と表し，a を（① 　　　　）とする M の（② 　　　　）という。

また，M を $\log_a M$ の（③ 　　　　）という。



対数と指数
$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ のとき $\boldsymbol{\log_a M=p \iff a^p=M}$

例1 (1)　$2^3=8$ であるから

$\square^{\triangle}=\bigcirc \iff \log_{\square}\bigcirc=\triangle$

(2)　$4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ であるから

問1 次の等式を $\log_a M=p$ の形で表せ。

(1)　$10^2=100$

(2)　$3^{-2}=\frac{1}{9}$

(3)　$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$M=a^p$ のとき $\log_a M=p$ であるから，次の等式が成り立つ。

$\boldsymbol{\log_a a^p=p}$

例2 (1)　$\log_4 64=\log_4 4^3=$

(2)　$\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=$

(3)　$\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=$

問2 次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10}1000$

(2)　$\log_3\frac{1}{81}$

(3)　$\log_5\sqrt[3]{125}$

例題 1 $\log_4 8$ の値を求めよ。

解

問3 次の値を求めよ。

(1) $\log_9 3$

(2) $\log_4 \sqrt{2}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

対数の性質

（教科書 p.165）

$a^0 = 1$, $a^1 = a$ より，次のことがわかる。

$\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$,　　$\boldsymbol{\log_a a = 1}$

次に，156 ページの指数法則から，次の性質が導かれる。

対数の性質		
$a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ のとき		
[1]　$\boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$		**積の対数**
[2]　$\boldsymbol{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$		**商の対数**
[3]　$\boldsymbol{\log_a M^r = r \log_a M}$	(r は実数)	**累乗の対数**

証明 [1]　$\log_a M = p$, $\log_a N = q$ とおくと $M = a^p$, $N = a^q$

よって　　$MN = a^p a^q = a^{p+q}$

ゆえに　　$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

問4 上の [1] の証明にならって，[2] を証明せよ。

問5 $M = a^p$ の両辺を r 乗することにより，[3] を証明せよ。

例3
(1) $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5(2 \times 3) =$
(2) $\log_3 16 = \log_3 2^4 =$
(3) $\log_2 6 = \log_2(2 \times 3) = \log_2 2 + \log_2 3 =$

問6 次の□にあてはまる数を答えよ。

(1) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 \square$

(2) $\log_5 10 = 1 + \log_5 \square$

(3) $\log_{10} 18 - \log_{10} 3 = \log_{10} \square$

(4) $\log_6 3 = 1 - \log_6 \square$

(5) $\log_4 9 = \square \log_4 3$

(6) $\log_6 \sqrt{5} = \square \log_6 5$

例題 2 次の計算をせよ。
(1) $\log_6 3 + \log_6 12$　　(2) $3\log_3 6 - \log_3 8$

解

問7 次の計算をせよ。

(1)　$\log_6 12 + \log_6 18$

(2)　$2\log_3 6 - \log_3 12$

(3)　$\log_4 \frac{4}{9} + 2\log_4 6$

(4)　$\frac{1}{2}\log_5 10 - \log_5 \sqrt{2}$

底の変換公式

（教科書 p.166）

底の変換公式
a, b, c が正の数で，$a \neq 1$, $c \neq 1$ のとき $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

例4 底を変換することにより，$\log_{27} 9$ の値を求めてみよう。

$$\log_{27} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3} = \frac{2\log_3 3}{3\log_3 3} =$$

問8 次の値を求めよ。

(1)　$\log_8 4$

(2)　$\log_9 \sqrt{3}$

(3)　$\log_{25} \frac{1}{125}$

例題 3 $\log_2 10 - \log_4 25$ を計算せよ。

考え方 まず，対数の底をそろえる。

解

問9 次の計算をせよ。

(1) $\log_3 18 - \log_9 4$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$

(3) $\dfrac{\log_9 64}{\log_3 2}$

❷ 対数関数とそのグラフ

（教科書 p.168）

$a > 0$, $a \neq 1$ のとき

$y = \log_a x$

で表される関数を，a を（④　　　　　）とする（⑤　　　　　　　）という。

対数関数のグラフ

（教科書 p.168）

問 10 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをもとにして，$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフをかけ。

対数関数の性質

（教科書 p.169）

対数関数 $y = \log_a x$ の性質をまとめると，次のようになる。

[1]　定義域は正の実数全体，値域は実数全体である。

[2]　グラフは点 $(\mathbf{1},\ \mathbf{0})$ と点 $(\boldsymbol{a},\ \mathbf{1})$ を通り，$\boldsymbol{y}$ **軸**が**漸近線**になる。

[3]　$\boldsymbol{a > 1}$ **のとき**，x の値が増加すると y の値も**増加**する。

すなわち，$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q}$

$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

すなわち，$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q}$

$a > 0$, $a \neq 1$, $p > 0$, $q > 0$ のとき，$\boldsymbol{p = q \iff \log_a p = \log_a q}$

例5 (1)　$y = \log_2 x$ の底 2 は 1 より大きい。

$3 < 5 < 7$ であるから

(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さい。

$3 < 5 < 7$ であるから

問 11 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\log_4 7$, $\log_4 3$, $\log_4 8$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}} 5$, $\log_{\frac{1}{3}} 0.1$, $\log_{\frac{1}{3}} 10$

対数関数を含む方程式・不等式
（教科書 p.170）

対数関数の性質を用いて，対数関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。そのとき，対数の（⑥　　　　　　　）であるという条件に注意する。

例6 方程式 $\log_3(x+1)=2$ を解いてみよう。

真数は正であるから　$x+1>0$

よって　$x>-1$　……①

対数の定義より　$x+1=3^2$

したがって

これは　　　　　。

問 12 次の方程式を解け。

(1)　$\log_4(x-2)=3$

(2)　$\log_3(x+5)=-2$

例題 4 方程式 $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$ を解け。

解

問 13 次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x+\log_3(x-6)=3$

(2)　$\log_2(x-2)+\log_2(x+4)=4$

例題 5 不等式 $\log_2(x+1)<3$ を解け。

解

問 14 次の不等式を解け。

(1) $\log_3(x-4)<2$

(2) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+6)>-1$

例題 6 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>-1$ を解け。

解

問 15 次の不等式を解け。

(1) $\log_5 x + \log_5 (x-4) < 1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} (x+2) + \log_{\frac{1}{3}} (x-6) \leqq -2$

Challenge 例題 対数を含む関数の最大･最小

（教科書 p.172）

例題 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3 \quad (1 \leqq x \leqq 27)$

解

問1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3 \qquad (1 \leqq x \leqq 8)$

③ 常用対数

（教科書 p.173）

$\log_{10} 2$ のように，10 を底とする対数を（⑦　　　　　　　　）という。巻末には，1.00 から 9.99 までの数の常用対数表がある。この表から，いろいろな数の常用対数を求めることができる。

数	0	1	2	3	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673

例7 $\log_{10} 1.16 = 0.0645$

$\log_{10} 1.43 = 0.1553$

例8 (1)　$\log_{10} 116 = \log_{10}(1.16 \times 10^2)$

$= \log_{10} 1.16 + \log_{10} 10^2$

$= 0.0645 + 2 =$

(2)　$\log_{10} 0.143 = \log_{10}(1.43 \times 10^{-1})$

$= \log_{10} 1.43 + \log_{10} 10^{-1}$

$= 0.1553 + (-1) =$

問 16 巻末の常用対数表を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10} 4.56$

(2)　$\log_{10} 708$

(3)　$\log_{10} 0.955$

例9 3 桁の正の整数 M は　　$100 \leqq M < 1000$

すなわち　$10^2 \leqq M < 10^3$

各辺の常用対数をとると　　$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} M < \log_{10} 10^3$

常用対数は底が
10 で 1 より大きい

よって，（⑧　　　　　　　　　）となる。

一般に，正の整数 M が，$\boldsymbol{n-1 \leqq \log_{10} M < n}$ を満たすとき

$10^{n-1} \leqq M < 10^n$

であるから，M は（⑨　　　　　　）の整数である。

例題 7 2^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解

問 17 3^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

例題 8 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

解

問 18 $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

Training

（教科書 p.175）

9 次の等式を満たす M の値を求めよ。

(1) $\log_5 M = 2$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} M = -4$

(3) $\log_{\frac{1}{81}} M = -\frac{1}{4}$

10 次の計算をせよ。

(1) $\log_5 20 + \log_5 100 - 2\log_5 4$

(2) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \sqrt{5}$

11 次の計算をせよ。

(1) $\log_2 3 \cdot \log_{81} 8$

(2) $\log_4 18 - \log_8 54$

12 関数 $y=\log_2 x$ のグラフと次の関数のグラフは，それぞれどのような位置関係にあるか答えよ。

(1) $y=\log_2 \frac{1}{x}$

(2) $y=\log_2 2x$

(3) $y=\log_2(x+1)$

13 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1) $\log_3 8$, $\log_3 12$, 2

(2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 2

14 次の方程式を解け。

(1) $\log_3 9(x+1)=3$

(2) $\log_{10} x+\log_{10}(2x+1)=1$

15 次の不等式を解け。

(1) $\log_5(x+1)<1$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) \leqq -3$

(3) $\log_2(x-2)+\log_2(x-9)>3$

16 5^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

17 $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ とする。

2節 対数関数

❶ 対数とその性質

（教科書 p.163）

一般に，$a>0,\ a\neq 1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ のグラフからわかるように，与えられた正の実数 M に対して

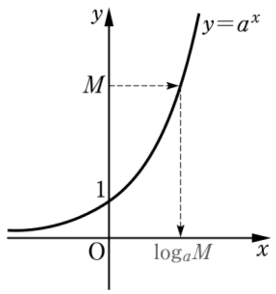
$a^p=M$

となる実数 p がただ 1 つ定まる。この p を

$\log_a M$

と表し，a を（① 底 ）とする M の（② 対数 ）という。

また，M を $\log_a M$ の（③ 真数 ）という。



対数と指数
$a>0,\ a\neq 1,\ M>0$ のとき $\log_a M=p \iff a^p=M$

例1 (1) $2^3=8$ であるから

$\log_2 8=3$ ←― $\blacksquare^{\blacktriangle}=\bullet \iff \log_{\blacksquare}\bullet=\blacktriangle$

(2) $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ であるから　$\log_4\frac{1}{16}=-2$

問1 次の等式を $\log_a M=p$ の形で表せ。

(1) $10^2=100$

$\log_{10}100=2$

(2) $3^{-2}=\frac{1}{9}$

$\log_3\frac{1}{9}=-2$

(3) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$

$M=a^p$ のとき $\log_a M=p$ であるから，次の等式が成り立つ。

$\log_a a^p=p$

例2 (1) $\log_4 64=\log_4 4^3=3$

(2) $\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

(3) $\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

問2 次の値を求めよ。

(1) $\log_{10}1000$

$1000=10^3$ であるから

$\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3$

(2) $\log_3\frac{1}{81}$

$\frac{1}{81}=\frac{1}{3^4}=3^{-4}$ であるから

$\log_3\frac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$

(3) $\log_5\sqrt[3]{125}$

$\sqrt[3]{125}=125^{\frac{1}{3}}=(5^3)^{\frac{1}{3}}=5$ であるから

$\log_5\sqrt[3]{125}=\log_5 5=1$

例題 1 $\log_4 8$ の値を求めよ。

解 $\log_4 8=x$ とおくと　$4^x=8$

$4^x=(2^2)^x=2^{2x}$，$8=2^3$ であるから　$2^{2x}=2^3$

よって　$2x=3$ ←― $a^p=a^q \iff p=q$

ゆえに　$x=\frac{3}{2}$

すなわち　$\log_4 8=\frac{3}{2}$

問3 次の値を求めよ。

(1)　$\log_9 3$

$\log_9 3 = x$ とおくと

$9^x = 3$

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ であるから

$3^{2x} = 3^1$

よって　　$2x = 1$

ゆえに　　$x = \frac{1}{2}$

すなわち　　$\log_9 3 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)　$\log_4 \sqrt{2}$

$\log_4 \sqrt{2} = x$ とおくと

$4^x = \sqrt{2}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$，$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ であるから

$2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}}$

よって　　$2x = \frac{1}{2}$

ゆえに　　$x = \frac{1}{4}$

すなわち　　$\log_4 \sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(3)　$\log_{\frac{1}{2}} 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$とおくと

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$，$8 = 2^3$ であるから

$2^{-x} = 2^3$

よって　　$-x = 3$

ゆえに　　$x = -3$

すなわち　　$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \boldsymbol{-3}$

対数の性質

（教科書 p.165）

$a^0 = 1$，$a^1 = a$ より，次のことがわかる。

$\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$，　$\boldsymbol{\log_a a = 1}$

次に，156 ページの指数法則から，次の性質が導かれる。

対数の性質		
$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$ のとき		
[1]	$\boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$	**積の対数**
[2]	$\boldsymbol{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$	**商の対数**
[3]	$\boldsymbol{\log_a M^r = r\log_a M}$　（r は実数）	**累乗の対数**

証明　[1]　$\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とおくと $M = a^p$，$N = a^q$

よって　　$MN = a^p a^q = a^{p+q}$

ゆえに　　$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

問4 上の [1] の証明にならって，[2] を証明せよ。

$\log_a M = p$，　$\log_a N = q$とおくと

$M = a^p$，　$N = a^q$

よって　　$\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

ゆえに

$$\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

問5 $M = a^p$ の両辺を r 乗することにより，[3] を証明せよ。

$\log_a M = p$ とおくと

$M = a^p$

である。両辺を r 乗すると

$M^r = (a^p)^r = a^{pr}$

ゆえに

$\log_a M^r = \log_a a^{pr} = pr = r\log_a M$

例3
(1) $\log_5 2+\log_5 3=\log_5(2\times 3)=\log_5 6$
(2) $\log_3 16=\log_3 2^4=4\log_3 2$
(3) $\log_2 6=\log_2(2\times 3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

問6 次の□にあてはまる数を答えよ。

(1) $\log_2 5+\log_2 3=\log_2 \square$

$\log_2 5+\log_2 3=\log_2(5\times 3)$
$=\log_2 \mathbf{15}$

(2) $\log_5 10=1+\log_5 \square$

$\log_5 10=\log_5(5\times 2)$
$=\log_5 5+\log_5 2$
$=1+\log_5 \mathbf{2}$

(3) $\log_{10} 18-\log_{10} 3=\log_{10} \square$

$\log_{10} 18-\log_{10} 3=\log_{10}\dfrac{18}{3}=\log_{10} \mathbf{6}$

(4) $\log_6 3=1-\log_6 \square$

$\log_6 3=\log_6\dfrac{6}{2}=\log_6 6-\log_6 2$
$=1-\log_6 \mathbf{2}$

(5) $\log_4 9=\square\log_4 3$

$\log_4 9=\log_4 3^2=\mathbf{2}\log_4 3$

(6) $\log_6\sqrt{5}=\square\log_6 5$

$\log_6\sqrt{5}=\log_6 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\log_6 5$

例題 2 次の計算をせよ。

(1) $\log_6 3+\log_6 12$　　(2) $3\log_3 6-\log_3 8$

解 (1) $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\times 12)$
$=\log_6 36=\log_6 6^2$
$=2$　　← $\log_a a^p=p$

(2) $3\log_3 6-\log_3 8=\log_3 6^3-\log_3 8$
$=\log_3\dfrac{6^3}{8}$
$=\log_3 3^3$　　← $\dfrac{6^3}{8}=\dfrac{6^3}{2^3}=\left(\dfrac{6}{2}\right)^3$
$=3$

注意 例題 2 (2)は，次のように計算してもよい。

$3\log_3 6-\log_3 8=3\log_3(2\times 3)-\log_3 2^3$
$=3(\log_3 2+\log_3 3)-3\log_3 2=3\log_3 3=3$

問7 次の計算をせよ。

(1)　$\log_6 12 + \log_6 18$

$= \log_6(12 \times 18)$

$= \log_6 216$

$= \log_6 6^3 = \mathbf{3}$

(2)　$2\log_3 6 - \log_3 12$

$= \log_3 6^2 - \log_3 12$

$= \log_3 \dfrac{36}{12}$

$= \log_3 3 = \mathbf{1}$

(3)　$\log_4 \frac{4}{9} + 2\log_4 6$

$= \log_4 \dfrac{4}{9} + \log_4 6^2 = \log_4\left(\dfrac{4}{9} \times 6^2\right)$

$= \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

(4)　$\frac{1}{2}\log_5 10 - \log_5 \sqrt{2}$

$= \log_5 10^{\frac{1}{2}} - \log_5 \sqrt{2}$

$= \log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$

$= \log_5 \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

$= \log_5 \sqrt{5}$

$= \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

例4 底を変換することにより，$\log_{27} 9$ の値を求めてみよう。

$$\log_{27} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3} = \frac{2\log_3 3}{3\log_3 3} = \frac{2}{3}$$

問8 次の値を求めよ。

(1)　$\log_8 4$

$= \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \dfrac{2\log_2 2}{3\log_2 2} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2)　$\log_9 \sqrt{3}$

$= \dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}\log_3 3}{2\log_3 3} = \dfrac{1}{2} \div 2 = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(3)　$\log_{25} \frac{1}{125}$

$= \log_{25} 125^{-1} = -\log_{25} 125 = -\dfrac{\log_5 125}{\log_5 25} = -\dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2}$

$= -\dfrac{3\log_5 5}{2\log_5 5} = -\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

底の変換公式

（教科書 p.166）

底の変換公式
a, b, c が正の数で，$a \neq 1$, $c \neq 1$ のとき $\mathbf{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

例題 3 $\log_2 10 - \log_4 25$ を計算せよ。

考え方 まず，対数の底をそろえる。

解 $\log_2 10 - \log_4 25 = \log_2 10 - \dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}$

$= \log_2 10 - \dfrac{\log_2 5^2}{\log_2 2^2}$

$= \log_2 10 - \dfrac{2\log_2 5}{2}$ ←── $\log_a a^p = p$

$= \log_2 10 - \log_2 5$

$= \log_2 \dfrac{10}{5}$

$= \log_2 2 = 1$

問9 次の計算をせよ。

(1) $\log_3 18 - \log_9 4$

$= \log_3 18 - \dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}$

$= \log_3 18 - \dfrac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2}$

$= \log_3 18 - \dfrac{2\log_3 2}{2}$

$= \log_3 18 - \log_3 2$

$= \log_3 \dfrac{18}{2} = \log_3 9$

$= \log_3 3^2 = \mathbf{2}$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$

$= \log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}$

$= \log_2 2 = \mathbf{1}$

(3) $\dfrac{\log_9 64}{\log_3 2}$

$= \dfrac{\log_3 64}{\log_3 9} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2}$

$= \dfrac{\log_3 2^6}{\log_3 3^2} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2}$

$= \dfrac{6\log_3 2}{2} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} = \mathbf{3}$

❷ 対数関数とそのグラフ

（教科書 p.168）

$a>0$, $a\neq1$ のとき

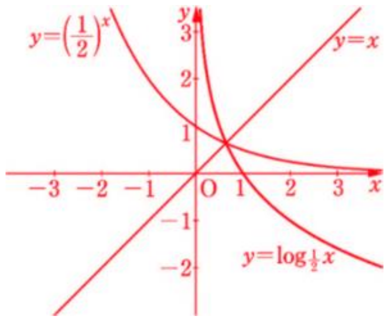
$y=\log_a x$

で表される関数を，a を（④　底　）とする（⑤　対数関数　）という。

対数関数のグラフ

（教科書 p.168）

問 10 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをもとにして，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフをかけ。



対数関数の性質

（教科書 p.169）

対数関数 $y=\log_a x$ の性質をまとめると，次のようになる。

[1]　定義域は正の実数全体，値域は実数全体である。
[2]　グラフは点 $(1,\ 0)$ と点 $(a,\ 1)$ を通り，**y 軸が漸近線**になる。
[3]　**$a>1$ のとき**，x の値が増加すると y の値も**増加**する。
　　すなわち，$\mathbf{0<p<q \iff \log_a p<\log_a q}$
　　$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。
　　すなわち，$\mathbf{0<p<q \iff \log_a p>\log_a q}$

$a>0$, $a\neq1$, $p>0$, $q>0$ のとき，$\mathbf{p=q \iff \log_a p=\log_a q}$

例5 (1)　$y=\log_2 x$ の底 2 は 1 より大きい。
　$3<5<7$ であるから　$\log_2 3<\log_2 5<\log_2 7$

(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さい。

　$3<5<7$ であるから　$\log_{\frac{1}{2}} 3>\log_{\frac{1}{2}} 5>\log_{\frac{1}{2}} 7$

問 11 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\log_4 7$，$\log_4 3$，$\log_4 8$

$y=\log_4 x$ の底 4 は 1 より大きい。

$3<7<8$ であるから

$\mathbf{\log_4 3<\log_4 7<\log_4 8}$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}} 5$，$\log_{\frac{1}{3}} 0.1$，$\log_{\frac{1}{3}} 10$

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ の底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さい。

$0.1<5<10$ であるから

$\mathbf{\log_{\frac{1}{3}} 10<\log_{\frac{1}{3}} 5<\log_{\frac{1}{3}} 0.1}$

対数関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.170）

対数関数の性質を用いて，対数関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。そのとき，対数の（⑥　真数は正　）であるという条件に注意する。

例6 方程式 $\log_3(x+1)=2$ を解いてみよう。

真数は正であるから　$x+1>0$

よって　$x>-1$　……①

対数の定義より　$x+1=3^2$

したがって　$x=8$

これは①を満たす。

問 12 次の方程式を解け。

(1)　$\log_4(x-2)=3$

真数は正であるから　$x-2>0$

よって　$x>2$　……①

対数の定義より　$x-2=4^3$

したがって　$\boldsymbol{x=66}$

これは①を満たす。

(2)　$\log_3(x+5)=-2$

真数は正であるから　$x+5>0$

よって　$x>-5$　……①

対数の定義より　$x+5=3^{-2}$

したがって　$\boldsymbol{x=-\frac{44}{9}}$

これは①を満たす。

例題 4 方程式 $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$ を解け。

解

真数は正であるから　$x>0,\ x-2>0$

よって　$x>2$　……①

方程式から　$\log_2 x(x-2)=3$

したがって　$x(x-2)=2^3$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

これを解くと　$x=4,\ -2$

①より　$x=4$

問 13 次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x+\log_3(x-6)=3$

真数は正であるから

$x>0,\ x-6>0$

よって　$x>6$　……①

方程式から　$\log_3 x(x-6)=3$

したがって　$x(x-6)=3^3$

$x^2-6x-27=0$

$(x+3)(x-9)=0$

これを解くと　$x=-3,\ 9$

①より　$\boldsymbol{x=9}$

(2)　$\log_2(x-2)+\log_2(x+4)=4$

真数は正であるから

$x-2>0,\ x+4>0$

よって　$x>2$　……①

方程式から　$\log_2(x-2)(x+4)=4$

したがって　$(x-2)(x+4)=2^4$

$x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

これを解くと　$x=-6,\ 4$

①より　$\boldsymbol{x=4}$

例題 5 不等式 $\log_2(x+1)<3$ を解け。

解 真数は正であるから　$x+1>0$

よって　$x>-1$　……①

$3=\log_2 2^3=\log_2 8$ であるから，与えられた不等式は

$\log_2(x+1)<\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x+1<8$

したがって　$x<7$　……②

①，②より　$-1<x<7$

問 14 次の不等式を解け。

(1)　$\log_3(x-4)<2$

真数は正であるから　$x-4>0$

よって　$x>4$　……①

$2=\log_3 3^2=\log_3 9$ であるから，与えられた不等式は

$\log_3(x-4)<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x-4<9$

したがって　$x<13$　……②

①，②より　$\mathbf{4<x<13}$

(2)　$\log_{\frac{1}{5}}(2x+6)>-1$

真数は正であるから　$2x+6>0$

よって　$x>-3$　……①

$-1=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{5}}5$ であるから，与えられた不等式は

$\log_{\frac{1}{5}}(2x+6)>\log_{\frac{1}{5}}5$

底 $\frac{1}{5}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$2x+6<5$

したがって　$x<-\frac{1}{2}$　……②

①，②より　$\mathbf{-3<x<-\frac{1}{2}}$

例題 6 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>-1$ を解け。

解 真数は正であるから　$x-1>0,\ x-2>0$

よって　$x>2$　……①

$-1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}2$ であるから，与えられた不等式は

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}2$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$(x-1)(x-2)<2$

$x^2-3x<0$

$x(x-3)<0$

これを解いて　$0<x<3$　……②

①，②より　$2<x<3$

問 15 次の不等式を解け。

(1)　$\log_5 x + \log_5(x-4) < 1$

真数は正であるから

$x > 0$，$x - 4 > 0$

よって　$x > 4$　……①

$1 = \log_5 5$ であるから，与えられた不等式は

$\log_5 x(x-4) < \log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから

$x(x-4) < 5$

$x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x-5)(x+1) < 0$

これを解いて　$-1 < x < 5$　……②

①，②より　$\mathbf{4} < x < \mathbf{5}$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(x-6) \leqq -2$

真数は正であるから

$x + 2 > 0$，$x - 6 > 0$

よって　$x > 6$　……①

$-2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}}3^2 = \log_{\frac{1}{3}}9$ であるから，与えられた不等式は

$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)(x-6) \leqq \log_{\frac{1}{3}}9$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$(x+2)(x-6) \geqq 9$

$x^2 - 4x - 12 - 9 \geqq 0$

$x^2 - 4x - 21 \geqq 0$

$(x-7)(x+3) \geqq 0$

これを解いて　$x \leqq -3$，$7 \leqq x$　……②

①，②より　$\mathbf{7 \leqq x}$

Challenge 例題 対数を含む関数の最大･最小

（教科書 p.172）

例題 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3 \quad (1 \leqq x \leqq 27)$

解 $\log_3 x=t$ とおく。$1 \leqq x \leqq 27$ であり，底 3 は 1 より大きいから

$\log_3 1 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 27$

よって　$0 \leqq t \leqq 3$　……①

また，与えられた関数は

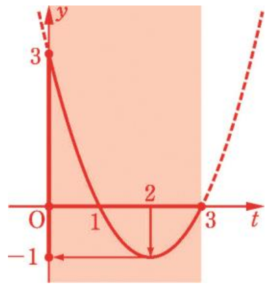
$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

となる。よって，右の図より①の範囲において，y は

$t=0$ のとき　最大値 3

$t=2$ のとき　最小値 -1

をとる。



ここで$t=0$ となるのは$\log_3 x=0$

すなわち　$x=1$ のとき

$t=2$ となるのは$\log_3 x=2$

すなわち　$x=9$ のときである。

したがって，この関数は

$x=1$ のとき　最大値 3

$x=9$ のとき　最小値 -1

問1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3 \quad (1 \leqq x \leqq 8)$

$\log_2 x=t$ とおく。$1 \leqq x \leqq 8$ であり，底 2 は1 より大きいから

$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 8$

よって　$0 \leqq t \leqq 3$　……①

また，与えられた関数は

$y=t^2-2t-3$

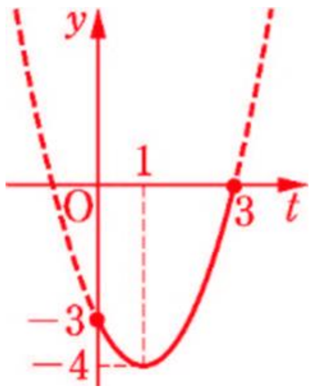
$=(t-1)^2-4$

となる。よって，右の図より①の範囲において，y は

$t=3$ のとき　最大値 0

$t=1$ のとき　最小値 -4

をとる。



ここで　$t=3$ となるのは　$\log_2 x=3$

すなわち　$x=8$ のとき

$t=1$ となるのは　$\log_2 x=1$

すなわち　$x=2$ のときである。

したがって，この関数は

$x=8$ のとき　最大値 0

$x=2$ のとき　最小値 -4

③ 常用対数

（教科書 p.173）

$\log_{10} 2$ のように，10 を底とする対数を（⑦　常用対数　）という。巻末には，1.00 から 9.99 までの数の常用対数表がある。この表から，いろいろな数の常用対数を求めることができる。

数	0	1	2	3	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673

例7 $\log_{10} 1.16 = 0.0645$

$\log_{10} 1.43 = 0.1553$

例8 (1)　$\log_{10} 116 = \log_{10}(1.16 \times 10^2)$

$= \log_{10} 1.16 + \log_{10} 10^2$

$= 0.0645 + 2 = 2.0645$

(2)　$\log_{10} 0.143 = \log_{10}(1.43 \times 10^{-1})$

$= \log_{10} 1.43 + \log_{10} 10^{-1}$

$= 0.1553 + (-1) = -0.8447$

問 16 巻末の常用対数表を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\log_{10} 4.56$

$= \mathbf{0.6590}$

(2)　$\log_{10} 708$

$= \log_{10}(7.08 \times 10^2)$

$= \log_{10} 7.08 + \log_{10} 10^2$

$= 0.8500 + 2 = \mathbf{2.8500}$

(3)　$\log_{10} 0.955$

$= \log_{10}(9.55 \times 10^{-1})$

$= \log_{10} 9.55 + \log_{10} 10^{-1}$

$= 0.9800 - 1 = \mathbf{-0.0200}$

例9 3 桁の正の整数 M は　　$100 \leqq M < 1000$

すなわち　$10^2 \leqq M < 10^3$

各辺の常用対数をとると　　$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} M < \log_{10} 10^3$

常用対数は底が 10 で 1 より大きい

よって，（⑧　$2 \leqq \log_{10} M < 3$　）となる。

一般に，正の整数 M が，$\boldsymbol{n - 1 \leqq \log_{10} M < n}$ を満たすとき

$10^{n-1} \leqq M < 10^n$

であるから，M は（⑨　n 桁　）の整数である。

例題 7 2^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解 2^{30} の常用対数をとると

$\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

よって　$9 < \log_{10} 2^{30} < 10$

ゆえに　$10^9 < 2^{30} < 10^{10}$

したがって，2^{30} は 10 桁の数である。

問 17 3^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

3^{30} の常用対数をとると

$\log_{10} 3^{30} = 30 \log_{10} 3$

$= 30 \times 0.4771 = 14.313$

よって　$14 < \log_{10} 3^{30} < 15$

したがって　$10^{14} < 3^{30} < 10^{15}$

ゆえに，3^{30} は **15** 桁の数である。

例題 8 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

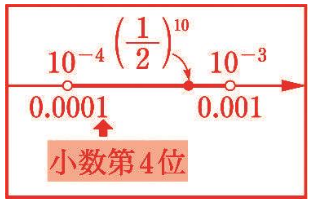
解 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \log_{10}2^{-10} = -10\log_{10}2$$
$$= -10 \times 0.3010 = -3.01$$

よって　$-4 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} < -3$

ゆえに　$10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < 10^{-3}$

したがって，小数第 4 位にはじめて 0 でない数字が現れる。



問 18 $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

$\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{40} = \log_{10}3^{-40} = -40\log_{10}3$$
$$= -40 \times 0.4771 = -19.084$$

よって　$-20 < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{40} < -19$

ゆえに　$10^{-20} < \left(\frac{1}{3}\right)^{40} < 10^{-19}$

したがって，小数第 **20** 位にはじめて 0 でない数字が現れる。

Training

（教科書 p.175）

9 次の等式を満たす M の値を求めよ。

(1) $\log_5 M = 2$

$M = 5^2 = \mathbf{25}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} M = -4$

$M = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \mathbf{16}$

(3) $\log_{\frac{1}{81}} M = -\frac{1}{4}$

$M = \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = \mathbf{3}$

10 次の計算をせよ。

(1) $\log_5 20 + \log_5 100 - 2\log_5 4$

$= \log_5 20 + \log_5 100 - \log_5 4^2$

$= \log_5 \dfrac{20 \times 100}{4^2}$

$= \log_5 125 = \log_5 5^3 = \mathbf{3}$

(2) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \sqrt{5}$

$= \log_2 \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

$= \log_2 2 = \mathbf{1}$

11 次の計算をせよ。

(1) $\log_2 3 \cdot \log_{81} 8$

$= \log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 81}$

$= \log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 3^4}$

$= \log_2 3 \cdot \dfrac{3}{4\log_2 3} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$

(2) $\log_4 18 - \log_8 54$

$= \dfrac{\log_2 18}{\log_2 4} - \dfrac{\log_2 54}{\log_2 8}$

$= \dfrac{\log_2 18}{\log_2 2^2} - \dfrac{\log_2 54}{\log_2 2^3}$

$= \dfrac{\log_2 18}{2} - \dfrac{\log_2 54}{3}$

$= \dfrac{1}{2}\log_2 18 - \dfrac{1}{3}\log_2 54$

$= \log_2 18^{\frac{1}{2}} - \log_2 54^{\frac{1}{3}}$

$= \log_2 \dfrac{(2 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}}}{(2 \cdot 3^3)^{\frac{1}{3}}} = \log_2 \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3}$

$= \log_2 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{1}{6}} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

12 関数 $y=\log_2 x$ のグラフと次の関数のグラフは，それぞれどのような位置関係にあるか答えよ。

(1) $y=\log_2\frac{1}{x}$

$y=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$ であるから，$y=\log_2\frac{1}{x}$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフと **x 軸に関して対称**である。

(2) $y=\log_2 2x$

$y=\log_2 2x=\log_2 2+\log_2 x=\log_2 x+1$ であるから，$y=\log_2 2x$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを **y 軸方向に 1 平行移動**したものである。

(3) $y=\log_2(x+1)$

$y=\log_2(x+1)=\log_2\{x-(-1)\}$であるから，$y=\log_2(x+1)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを **x 軸方向に -1 平行移動**したものである。

13 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1) $\log_3 8$，$\log_3 12$，2

$2=2\log_3 3=\log_3 3^2=\log_3 9$

$y=\log_3 x$ の底 3 は 1 より大きいから

$\log_3 8<\log_3 9<\log_3 12$

よって　**$\log_3 8<2<\log_3 12$**

(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，2

$$2=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}$$

よって　**$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<2<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}$**

14 次の方程式を解け。

(1) $\log_3 9(x+1)=3$

真数は正であるから　$9(x+1)>0$

よって　$x>-1$　……①

対数の定義より　$9(x+1)=3^3$

$9(x+1)=27$

したがって　**$x=2$**

これは①を満たす。

(2) $\log_{10}x+\log_{10}(2x+1)=1$

真数は正であるから

$x>0$，$2x+1>0$

よって　$x>0$　……①

方程式から　$\log_{10}x(2x+1)=1$

したがって　$x(2x+1)=10$

$2x^2+x-10=0$

$(x-2)(2x+5)=0$

これを解くと　$x=2,\ -\frac{5}{2}$

①より　**$x=2$**

15 次の不等式を解け。

(1) $\log_5(x+1)<1$

真数は正であるから　$x+1>0$

よって　$x>-1$　……①

$1=\log_5 5$ であるから，与えられた不等式は

$\log_5(x+1)<\log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから　$x+1<5$

したがって　$x<4$　……②

①，②より　**$-1<x<4$**

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) \leqq -3$

真数は正であるから　$5x-2>0$

よって　$x>\frac{2}{5}$　……①

$-3=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{2}}8$ であるから，与えられた不等式は

$\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) \leqq \log_{\frac{1}{2}}8$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$5x-2 \geqq 8$

したがって　$x \geqq 2$　……②

①，②より　$\boldsymbol{x \geqq 2}$

(3) $\log_2(x-2)+\log_2(x-9)>3$

真数は正であるから

$x-2>0$，$x-9>0$

よって　$x>9$　……①

$3=\log_2 2^3=\log_2 8$ であるから，与えられた不等式は

$\log_2(x-2)(x-9)>\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから

$(x-2)(x-9)>8$

$x^2-11x+18-8>0$

$x^2-11x+10>0$

$(x-10)(x-1)>0$

したがって　$x<1$，$10<x$　……②

①，②より　$\boldsymbol{10<x}$

16 5^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

5^{30} の常用対数をとると

$$\log_{10}5^{30}=30\log_{10}5=30\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=30(\log_{10}10-\log_{10}2)$$
$$=30(1-0.3010)$$
$$=30\times 0.6990=20.97$$

よって　$20<\log_{10}5^{30}<21$

ゆえに　$10^{20}<5^{30}<10^{21}$

したがって，5^{30} は **21** 桁の数である。

17 $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=\log_{10}6^{-10}=-10\log_{10}6$$
$$=-10\log_{10}(2\times 3)=-10(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=-10\times(0.3010+0.4771)=-10\times 0.7781$$
$$=-7.781$$

よって　$-8<\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}<-7$

ゆえに　$10^{-8}<\left(\frac{1}{6}\right)^{10}<10^{-7}$

したがって，$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ は**小数第 8 位**にはじめて 0 でない数字が現れる。