１節 指数関数

❶ 整数の指数

（教科書 p.150）

a を n 個掛け合わせたものを a^n と書き，a の n 乗とよぶ。また，n を a^n の（① ）といい，a，a^2，a^3，… を a の（② ）という。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}} = a^{\overset{\text{指数}\downarrow}{n}}$$

指数法則

（教科書 p.150）

一般に，指数が 0 または負の整数のときの累乗を，次のように定める。

a^0，a^{-n} の定義
$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^0 = 1}$，　$\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

例1 (1)　$3^0 =$

(2)　$2^{-4} = \frac{1}{2^4} =$

問1 次の値を求めよ。

(1)　3^{-2}

(2)　5^0

(3)　6^{-2}

(4)　$(-4)^{-3}$

一般に，m，n が正の整数のとき，次の指数法則が成り立つ。

(1)　$a^m a^n = a^{m+n}$　　(2)　$(a^m)^n = a^{mn}$　　(3)　$(ab)^n = a^n b^n$

指数が 0 または負の整数であるときの累乗を，前ページのように定めると，m，n がどのような整数であっても，次の（③ ）が成り立つ。

指数法則	
$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき	
(1)　$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$	(1′)　$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$
(2)　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$	
(3)　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$	(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

問2 $m = 5$，$n = -3$ のとき，上の指数法則(1′)，(3′)が成り立つことを確かめよ。

例2 (1)　$a^{-5} \times a^3 = a^{(-5)+3} = a^{-2} =$

(2)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} =$

(3)　$(a^2 b^{-1})^{-2} = (a^2)^{-2} \times (b^{-1})^{-2} = a^{-4} b^2 =$

問3 次の計算をせよ。

(1) $a^{-3}\times a^{-5}$

(2) $a^{-3}\div a^{-5}$

(3) $(a^2b^{-3})^{-2}$

(4) $a^3\times a^{-5}\div a^{-4}$

(5) $(2a)^3\div a^{-4}\times a^{-6}$

❷ 累乗根

（教科書 p.152）

一般に，ある実数 a に対して，3 乗して a になる数，すなわち

$x^3=a$

を満たす x の値を，a の（④　　　　　　）という。たとえば，2 は 8 の 3 乗根である。

実数の範囲で考えれば，実数 a の 3 乗根はただ 1 つしかない。これを（　　　　）と表す。たとえば，$\sqrt[3]{8}=2$ である。

例3 $(-2)^3=-8$ であるから

問4 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{27}$

(2) $\sqrt[3]{-27}$

(3) $\sqrt[3]{64}$

(4) $\sqrt[3]{-64}$

一般に，正の整数 n に対して，n 乗して実数 a になる数，すなわち

$\boldsymbol{x^n=a}$

を満たす x の値を，a の（⑤　　　　　　）という。平方根は 2 乗根である。

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて（⑥　　　　　　）という。

例4 (1)　$5^3 = 125$ であるから

5 は 125 の（　　　　　　　）である。

(2)　$2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$ であるから

2, -2 は 16 の（　　　　　　　）である。

問5 次の値を求めよ。

(1)　81 の平方根

(2)　216 の 3 乗根

(3)　625 の 4 乗根

例5 (1)　$(-2)^7 = -128$ であるから

(2)　$\sqrt[4]{81}$ は 81 の 4 乗根 ± 3 のうち，正の方であるから

問6 次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[4]{256}$

(2)　$\sqrt[5]{-243}$

(3)　$\sqrt[6]{64}$

実数 a の n 乗根について，次のことがいえる。

(1)　(⑦　　　　　　　　　　　)

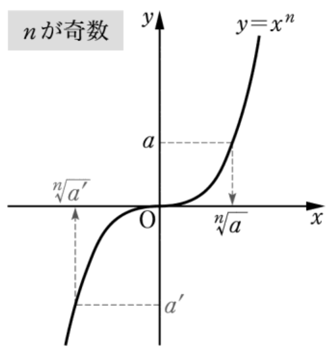
a の n 乗根は a の正負に関係なくただ 1 つある。それを $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ と表す。

たとえば

32 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{32} = 2$

-32 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{-32} = -2$

0 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{0} = 0$



(2)　(⑧　　　　　　　　　　　)

(i)　$a > 0$ ならば，a の n 乗根は正と負の 2 つある。

正の方を $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$，負の方を $-\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ と表す。

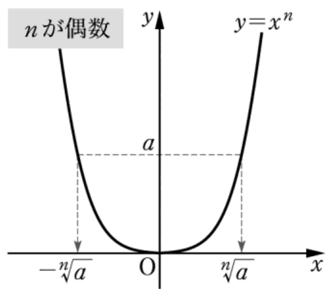
たとえば，16 の 4 乗根は

$\sqrt[4]{16} = 2$ と $-\sqrt[4]{16} = -2$

(ii)　$a = 0$ ならば，a の n 乗根は

ただ 1 つであり　$\sqrt[n]{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$

(iii)　$a < 0$ ならば，a の n 乗根は存在しない。



注意　$\sqrt[2]{a}$ はふつう $\sqrt{a}$ と書く。

累乗根の性質

（教科書 p.154）

累乗根の定義から，正の整数 n について次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{a > 0}$ のとき

また，累乗根について，次の性質が成り立つ。

累乗根の性質	
$a > 0,\ b > 0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき	
(1)　$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{ab}}$	(2)　$\dfrac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}} = \sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$
(3)　$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$	(4)　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[mn]{\boldsymbol{a}}$

証明 (3)の証明

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = x$ とおくと　　$x^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m = a^m$

$x > 0$ であるから，x は a^m の正の n 乗根である。

よって　　$x = \sqrt[n]{a^m}$

すなわち　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

問7 上の(3)の証明にならって，(4)を証明せよ。

例6

(1)　$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \times 3} =$　　　$\sqrt[■]{a}\sqrt[■]{b} = \sqrt[■]{ab}$

(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} =$　　　$\dfrac{\sqrt[■]{a}}{\sqrt[■]{b}} = \sqrt[■]{\dfrac{a}{b}}$

(3)　$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3 = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{(3^2)^3}$　　　$\left(\sqrt[■]{a}\right)^{▲} = \sqrt[■]{a^{▲}}$

$= \sqrt[6]{3^6} =$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4}$　　　$\sqrt[■]{\sqrt[▲]{a}} = \sqrt[■\times▲]{a}$

$= \sqrt[3]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} =$

問8 次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$

(2)　$\sqrt[4]{18} \div \sqrt[4]{6}$

(3)　$\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$

(4)　$\sqrt[3]{27^2}$

(5)　$\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$

③ 有理数の指数

（教科書 p.155）

一般に，次のように定める。

有理数を指数とする累乗
$a>0$ で，m が整数，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}$ とくに　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}}$,　　$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

例7 (1)　$16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=$

(2)　$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=$　　　$a^{\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}}=\sqrt[\blacksquare]{a^{\blacktriangle}}$

(3)　$8^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4^3}}=$

問9 次の値を求めよ。

(1)　$25^{\frac{1}{2}}$

(2)　$16^{\frac{3}{4}}$

(3)　$9^{-\frac{1}{2}}$

(4)　$27^{-\frac{2}{3}}$

問 10 次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1)　$\sqrt[3]{a}$

(2)　$\sqrt{a^3}$

(3)　$\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$

(4)　$\left(\sqrt[4]{a}\right)^{-3}$

指数法則	
$a>0,\ b>0$ で，$p,\ q$ が有理数のとき	
(1)　$\boldsymbol{a^pa^q=a^{p+q}}$	(1′)　$\boldsymbol{a^p\div a^q=a^{p-q}}$
(2)　$\boldsymbol{(a^p)^q=a^{pq}}$	
(3)　$\boldsymbol{(ab)^p=a^pb^p}$	(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}}$

例8 (1)　$2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}=2^3=$

(2)　$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}=3^{\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}}=3^3=$

問 11 次の計算をせよ。

(1)　$3^{\frac{5}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}$

(2)　$6^{\frac{1}{2}}\div 6^{\frac{3}{2}}$

(3)　$\left(4^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

例9 (1)　$\sqrt[6]{2^3}\times\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{6}}\times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^2 =$

(2)　$\sqrt{81^3}\div\sqrt[3]{27^2} = 81^{\frac{3}{2}}\div 27^{\frac{2}{3}} =$

$= 3^6\div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4 =$

問 12 次の計算をせよ。

(1)　$\left(\sqrt[5]{2}\right)^2\times\sqrt[5]{2^3}$

(2)　$\sqrt[3]{9}\div\sqrt[6]{81^4}$

❹ 指数関数とそのグラフ

（教科書 p.157）

$a>0,\ a\neq 1$ のとき

$y=a^x$

で表される関数を，a を（⑨　　　　　）とする（⑩　　　　　　　）という。

指数関数のグラフ

（教科書 p.157）

問 13 関数 $y=3^x$ と関数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

指数関数の性質

（教科書 p.159）

指数関数 $y=a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

[1]　**定義域は実数全体，値域は正の実数全体**である。

[2]　グラフは点 $(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$ と点 $(\mathbf{1},\ \boldsymbol{a})$ を通り，x 軸が**漸近線**になる。

[3]　**$\boldsymbol{a}>\mathbf{1}$ のとき**，x の値が増加すると y の値も**増加**する。

すなわち　$\boldsymbol{p}<\boldsymbol{q} \iff \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}<\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{q}}$

$\mathbf{0}<\boldsymbol{a}<\mathbf{1}$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

すなわち　$\boldsymbol{p}<\boldsymbol{q} \iff \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}>\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{q}}$

また，$a>0,\ a\neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{q}} \iff \boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$

例題 1 2 つの数 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ の大小を比較せよ。

考え方 2 つの数を 2^x の形で表し，底が 1 より大きいから，x が増加すると 2^x も増加することを利用する。

解

問 14 次の 2 つの数の大小を比較せよ。

(1) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$

指数関数を含む方程式･不等式

（教科書 p.160）

例題 2 方程式 $8^x = 2^{x+4}$ を解け。

解

問 15 次の方程式を解け。

(1) $9^x = \frac{1}{3}$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

例題 3 次の不等式を解け。

(1) $\left(\sqrt{3}\right)^x < 9$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \frac{1}{16}$

解

問 16 次の不等式を解け。

(1) $4^x > 32$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqq \frac{1}{27}$

Challenge　例題　指数関数を含む方程式･不等式

（教科書 p.161）

例題 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0$　　　(2)　$4^{x+1} - 5 \times 2^x + 1 > 0$

解

問1 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0$

(2)　$4^x - 2^{x+1} - 8 \geqq 0$

Training

（教科書 p.162）

1 次の式を簡単にし，その結果を負の指数を用いずに表せ。

(1) $a^2 \times a^{-4}$

(2) $a^{-5} \div a^{-3} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2$

(3) $(a^2b^{-1})^{-3} \times a^4 \times b^{-2}$

2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{-216}$

(2) $\sqrt[6]{729}$

(3) $-\sqrt[4]{625}$

3 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$

(2) $\sqrt[3]{100^4} \div \sqrt[3]{10^2}$

(3) $\left(\sqrt[4]{49}\right)^2$

(4) $\sqrt[3]{125^2}$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$

4 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{32^{-1}}$

(2)　$9^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{3^5} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

5　関数 $y = 3^x$ のグラフと次の関数のグラフは，どのような位置関係にあるか答えよ。

(1)　$y = -3^x$

(2)　$y = \frac{1}{3^x}$

(3)　$y = 3^x + 1$

(4)　$y = 3^{x-1}$

6　次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[7]{27}$

(2)　$\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[8]{\frac{1}{8}}$

7　次の方程式を解け。

(1)　$4^x = \frac{1}{8}$

(2)　$\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{x-2}$

8　次の不等式を解け。

(1)　$3^{x-1} > 27$

(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

1 節 指数関数

❶ 整数の指数

（教科書 p.150）

a を n 個掛け合わせたものを a^n と書き，a の n 乗とよぶ。また，n を a^n の（① 指数 ）といい，a，a^2，a^3，… を a の（② 累乗 ）という。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}} = a^{\overset{\text{指数}}{n}}$$

指数法則

（教科書 p.150）

一般に，指数が 0 または負の整数のときの累乗を，次のように定める。

a^0，a^{-n} の定義
$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^0 = 1}$，　$\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

例1　(1)　$3^0 = 1$
(2)　$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

問1　次の値を求めよ。

(1)　3^{-2}

$= \dfrac{1}{3^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(2)　5^0

$= \boldsymbol{1}$

(3)　6^{-2}

$= \dfrac{1}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

(4)　$(-4)^{-3}$

$= \dfrac{1}{(-4)^3} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{64}}$

一般に，m，n が正の整数のとき，次の指数法則が成り立つ。

(1)　$a^m a^n = a^{m+n}$　　(2)　$(a^m)^n = a^{mn}$　　(3)　$(ab)^n = a^n b^n$

指数が 0 または負の整数であるときの累乗を，前ページのように定めると，m，n がどのような整数であっても，次の（③ 指数法則 ）が成り立つ。

指数法則	
$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき	
(1)　$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$	(1′)　$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$
(2)　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$	
(3)　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$	(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

問2　$m = 5$，$n = -3$ のとき，上の指数法則(1′)，(3′)が成り立つことを確かめよ。

$$(1'): a^5 \div a^{-3} = a^5 \div \frac{1}{a^3} = a^5 \times a^3$$
$$= a^8 = a^{5-(-3)}$$
$$(3'): \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{a^3}$$
$$= a^{-3}\cdot\frac{1}{b^{-3}} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

例2　(1)　$a^{-5} \times a^3 = a^{(-5)+3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
(2)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$
(3)　$(a^2b^{-1})^{-2} = (a^2)^{-2} \times (b^{-1})^{-2} = a^{-4}b^2 = \frac{b^2}{a^4}$

問3 次の計算をせよ。

(1)　$a^{-3}\times a^{-5}$

$=a^{(-3)+(-5)}=a^{-8}=\boldsymbol{\frac{1}{a^8}}$

(2)　$a^{-3}\div a^{-5}$

$=a^{(-3)-(-5)}=\boldsymbol{a^2}$

(3)　$(a^2b^{-3})^{-2}$

$=(a^2)^{-2}\times(b^{-3})^{-2}=a^{-4}b^6$

$=\boldsymbol{\frac{b^6}{a^4}}$

(4)　$a^3\times a^{-5}\div a^{-4}$

$=a^{3+(-5)-(-4)}=\boldsymbol{a^2}$

(5)　$(2a)^3\div a^{-4}\times a^{-6}$

$=2^3a^{3-(-4)+(-6)}$

$=\boldsymbol{8a}$

❷ 累乗根

（教科書 p.152）

一般に，ある実数 a に対して，3 乗して a になる数，すなわち

$x^3=a$

を満たす x の値を，a の（④　3 乗根　）という。たとえば，2 は 8 の 3 乗根である。

実数の範囲で考えれば，実数 a の 3 乗根はただ 1 つしかない。これを（　$\sqrt[3]{a}$　）と表す。たとえば，$\sqrt[3]{8}=2$ である。

例3 $(-2)^3=-8$ であるから

$\sqrt[3]{-8}=-2$

問4 次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{27}$

$3^3=27$ であるから

$\sqrt[3]{27}=\boldsymbol{3}$

(2)　$\sqrt[3]{-27}$

$(-3)^3=-27$ であるから

$\sqrt[3]{-27}=\boldsymbol{-3}$

(3)　$\sqrt[3]{64}$

$4^3=64$ であるから

$\sqrt[3]{64}=\boldsymbol{4}$

(4)　$\sqrt[3]{-64}$

$(-4)^3=-64$ であるから

$\sqrt[3]{-64}=\boldsymbol{-4}$

一般に，正の整数 n に対して，n 乗して実数 a になる数，すなわち

$\boldsymbol{x^n=a}$

を満たす x の値を，a の（⑤　n 乗根　）という。平方根は 2 乗根である。

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて（⑥　累乗根　）という。

例4 (1)　$5^3=125$ であるから

5 は 125 の（　3 乗根　）である。

(2)　$2^4=16,\ (-2)^4=16$ であるから

2, −2 は 16 の（　4 乗根　）である。

問5　次の値を求めよ。

(1)　81 の平方根

81 の平方根は　$\pm\mathbf{9}$

(2)　216 の 3 乗根

216 の 3 乗根は　$\mathbf{6}$

(3)　625 の 4 乗根

625 の 4 乗根は　$\pm\mathbf{5}$

実数 a の n 乗根について，次のことがいえる。

(1)　(⑦　n が奇数のとき　)

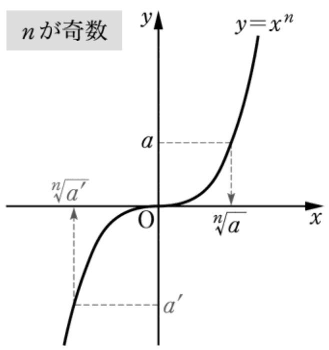
a の n 乗根は a の正負に関係なくただ 1 つある。それを $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ と表す。

たとえば

32 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{32}=2$

−32 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{-32}=-2$

0 の 5 乗根は　$\sqrt[5]{0}=0$



(2)　(⑧　n が偶数のとき　)

(i)　$a>0$ ならば，a の n 乗根は正と負の 2 つある。

正の方を $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$，負の方を $-\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ と表す。

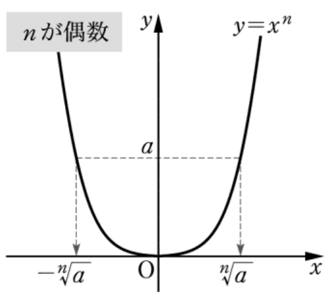
たとえば，16 の 4 乗根は

$\sqrt[4]{16}=2$ と $-\sqrt[4]{16}=-2$

(ii)　$a=0$ ならば，a の n 乗根は

ただ 1 つであり　$\sqrt[n]{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$

(iii)　$a<0$ ならば，a の n 乗根は存在しない。



$\boxed{\text{注意}}$　$\sqrt[2]{a}$ はふつう $\sqrt{a}$ と書く。

例5 (1)　$(-2)^7=-128$ であるから

$\sqrt[7]{-128}=-2$

(2)　$\sqrt[4]{81}$ は 81 の 4 乗根 ±3 のうち，正の方であるから

$\sqrt[4]{81}=3$

問6　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[4]{256}$

$\sqrt[4]{256}$ は 256 の 4 乗根 ±4 のうち，正の方であるから　$\sqrt[4]{256}=\mathbf{4}$

(2)　$\sqrt[5]{-243}$

$(-3)^5=-243$ であるから

$\sqrt[5]{-243}=\mathbf{-3}$

(3)　$\sqrt[6]{64}$

$2^6=64$ であるから $\sqrt[6]{64}=\mathbf{2}$

累乗根の性質

（教科書 p.154）

累乗根の定義から，正の整数 n について次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{a > 0}$ のとき　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

また，累乗根について，次の性質が成り立つ。

累乗根の性質	
$a>0$, $b>0$ で，m, n が正の整数のとき	
(1)　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	(2)　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
(3)　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	(4)　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

証明 (3)の証明

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = x$ とおくと　$x^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m = a^m$

$x > 0$ であるから，x は a^m の正の n 乗根である。

よって　$x = \sqrt[n]{a^m}$

すなわち $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

問7 上の(3)の証明にならって，(4)を証明せよ。

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$ とおくと

$x^{mn} = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n$

$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$x > 0$ であるから，x は a の正の mn 乗根である。

よって　$x = \sqrt[mn]{a}$

すなわち　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

例6

(1)　$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6}$　―― $\sqrt[\square]{a}\sqrt[\square]{b} = \sqrt[\square]{ab}$

(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$　―― $\dfrac{\sqrt[\square]{a}}{\sqrt[\square]{b}} = \sqrt[\square]{\dfrac{a}{b}}$

(3)　$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3 = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{(3^2)^3}$　―― $\left(\sqrt[\square]{a}\right)^{\triangle} = \sqrt[\square]{a^{\triangle}}$

$= \sqrt[6]{3^6} = 3$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4}$　―― $\sqrt[\square]{\sqrt[\triangle]{a}} = \sqrt[\square\times\triangle]{a}$

$= \sqrt[3]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2}$

問8 次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$

$= \sqrt[3]{5 \times 7} = \sqrt[3]{35}$

(2)　$\sqrt[4]{18} \div \sqrt[4]{6}$

$= \dfrac{\sqrt[4]{18}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{18}{6}} = \sqrt[4]{3}$

(3)　$\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$

$= \sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{(5^2)^2} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

(4)　$\sqrt[3]{27^2}$

$= \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

(5)　$\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$

$= \sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[3]{2}$

③ 有理数の指数

（教科書 p.155）

一般に，次のように定める。

有理数を指数とする累乗
$a>0$ で，m が整数，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ とくに　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$,　　$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

例7
(1)　$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(2)　$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$　　←— $a^{\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}} = \sqrt[\blacksquare]{a^{\blacktriangle}}$

(3)　$8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{1}{4}$

問9　次の値を求めよ。

(1)　$25^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{25} = \boldsymbol{5}$

(2)　$16^{\frac{3}{4}}$

$= \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4}$

$= 2^3 = \boldsymbol{8}$

(3)　$9^{-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{9^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(4)　$27^{-\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{(3^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3}$

$= 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$

問 10　次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1)　$\sqrt[3]{a}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{1}{3}}}$

(2)　$\sqrt{a^3}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{3}{2}}}$

(3)　$(\sqrt[4]{a})^5$

$= \sqrt[4]{a^5} = \boldsymbol{a^{\frac{5}{4}}}$

(4)　$(\sqrt[4]{a})^{-3}$

$= \sqrt[4]{a^{-3}} = \boldsymbol{a^{-\frac{3}{4}}}$

指数法則	
$a>0$, $b>0$ で，p, q が有理数のとき	
(1)　$\boldsymbol{a^p a^q = a^{p+q}}$	(1′)　$\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$
(2)　$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$	
(3)　$\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$	(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$

例8
(1)　$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = 2^3 = 8$

(2)　$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = 3^{\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}} = 3^3 = 27$

問 11　次の計算をせよ。

(1)　$3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} = 3^2 = \mathbf{9}$

(2)　$6^{\frac{1}{2}} \div 6^{\frac{3}{2}}$

$= 6^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 6^{-1} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

(3)　$\left(4^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$= 4^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}} = 4^2 = \mathbf{16}$

例9　(1)　$\sqrt[6]{2^3} \times \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$

(2)　$\sqrt{81^3} \div \sqrt[3]{27^2} = 81^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{2}{3}} = (3^4)^{\frac{3}{2}} \div (3^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4 = 81$

問 12　次の計算をせよ。

(1)　$\left(\sqrt[5]{2}\right)^2 \times \sqrt[5]{2^3}$

$= 2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = \mathbf{2}$

(2)　$\sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{81^4}$

$= 9^{\frac{1}{3}} \div 81^{\frac{4}{6}}$

$= (3^2)^{\frac{1}{3}} \div (3^4)^{\frac{4}{6}}$

$= 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{8}{3}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{8}{3}} = 3^{-2}$

$= \mathbf{\frac{1}{9}}$

❹ 指数関数とそのグラフ

（教科書 p.157）

$a > 0,\ a \neq 1$ のとき

$y = a^x$

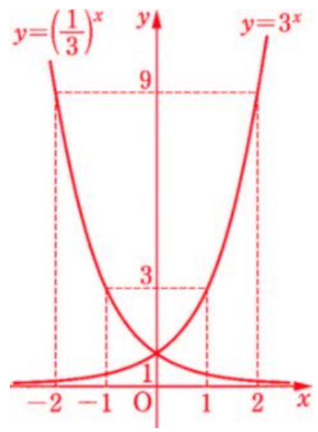
で表される関数を，a を（⑨　底　）とする（⑩　指数関数　）という。

指数関数のグラフ

（教科書 p.157）

問 13　関数 $y = 3^x$ と関数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y = 3^x$	…	0.11	0.19	0.33	0.58	1.00	1.73	3.00	5.20	9.00	…
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	…	9.00	5.20	3.00	1.73	1.00	0.58	0.33	0.19	0.11	…



指数関数の性質

（教科書 p.159）

指数関数 $y = a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

> [1]　**定義域は実数全体，値域は正の実数全体**である。
> [2]　グラフは点 $(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$ と点 $(\mathbf{1},\ \boldsymbol{a})$ を通り，x 軸が**漸近線**になる。
> [3]　$\boldsymbol{a > 1}$ **のとき，**x の値が増加すると y の値も**増加**する。
> 　　すなわち　$\boldsymbol{p < q} \iff \boldsymbol{a^p < a^q}$
> 　　$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。
> 　　すなわち　$\boldsymbol{p < q} \iff \boldsymbol{a^p > a^q}$

また，$a > 0,\ a \neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{a^p = a^q} \iff \boldsymbol{p = q}$

例題 1 2 つの数 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ の大小を比較せよ。

考え方 2 つの数を 2^x の形で表し，底が 1 より大きいから，x が増加すると 2^x も増加することを利用する。

解 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$,　$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

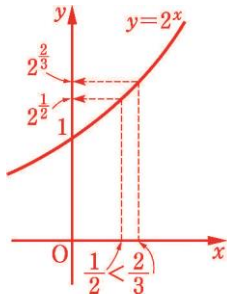
である。ここで

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$

であり，$y=2^x$ の底 2 は 1 より大きいから

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{2}{3}}$

すなわち　$\sqrt{2}<\sqrt[3]{4}$



問 14 次の 2 つの数の大小を比較せよ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$

$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$,　$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

である。ここで

$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

であり，$y=3^x$ の底 3 は 1 より大きいから

$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$

すなわち　$\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$

(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

である。ここで

$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

であり，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ の底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

すなわち　$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}>\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

指数関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.160）

例題 2 方程式 $8^x = 2^{x+4}$ を解け。

解 $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$ であるから　　$2^{3x} = 2^{x+4}$

ゆえに　$3x = x + 4$　　$\longleftarrow a^p = a^q \Longleftrightarrow p = q$

したがって　　$x = 2$

問 15 次の方程式を解け。

(1)　$9^x = \frac{1}{3}$

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ であるから

$3^{2x} = 3^{-1}$

ゆえに　$2x = -1$

したがって　$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ であるから

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

ゆえに　$2x = x - 1$

したがって　$\boldsymbol{x = -1}$

例題 3 次の不等式を解け。

(1)　$(\sqrt{3})^x < 9$　　　(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \frac{1}{16}$

解 (1)　$(\sqrt{3})^x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{\frac{x}{2}}$, $9 = 3^2$ であるから

$3^{\frac{x}{2}} < 3^2$

$y = 3^x$ の底 3 は 1 より大きいから

$\frac{x}{2} < 2$

ゆえに　　$x < 4$

(2)　$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ であるから　　$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　　$x \leqq 4$

問 16 次の不等式を解け。

(1) $4^x > 32$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$，$32 = 2^5$であるから

$2^{2x} > 2^5$

$y = 2^x$ の底 2 は 1 より大きいから

$2x > 5$

ゆえに $\boldsymbol{x > \frac{5}{2}}$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqq \frac{1}{27}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ であるから

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ の底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$2x \geqq 3$

ゆえに $\boldsymbol{x \geqq \frac{3}{2}}$

Challenge 例題 指数関数を含む方程式･不等式

（教科書 p.161）

例題 次の方程式，不等式を解け。

（1）　$9^x-2\times3^x-3=0$　　（2）　$4^{x+1}-5\times2^x+1>0$

解 （1）　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ であるから

$(3^x)^2-2\times3^x-3=0$

ここで，$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t>0$ より　$t=3$

すなわち　$3^x=3$

ゆえに　$x=1$

（2）　$4^{x+1}=4\times4^x=4\times(2^2)^x=4\times2^{2x}=4\times(2^x)^2$ であるから

$4\times(2^x)^2-5\times2^x+1>0$

ここで，$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$4t^2-5t+1>0$

$(4t-1)(t-1)>0$

$t<\frac{1}{4}$,　$1<t$

$t>0$ であるから　$0<t<\frac{1}{4}$, $1<t$

すなわち　$0<2^x<2^{-2}$, $2^0<2^x$

$t=2^x$ の底 2 は 1 より大きいから　$x<-2$, $0<x$

問1 次の方程式，不等式を解け。

（1）　$\left(\frac{1}{9}\right)^x+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-3=0$

$\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$

であるから

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^x-3=0$

ここで，$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$t>0$ より　$t=1$

すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x=1$

ゆえに　$\boldsymbol{x=0}$

（2）　$4^x-2^{x+1}-8\geqq0$

$4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2$, $2^{x+1}=2\times2^x$

であるから

$(2^x)^2-2\times2^x-8\geqq0$

ここで，$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$t^2-2t-8\geqq0$

$(t-4)(t+2)\geqq0$

$t>0$ であるから　$4\leqq t$

すなわち　$2^2\leqq2^x$

$t=2^x$ の底 2 は 1 より大きいから

$\boldsymbol{2\leqq x}$

Training

（教科書 p.162）

1　次の式を簡単にし，その結果を負の指数を用いずに表せ。

(1)　$a^2 \times a^{-4}$

$= a^{2+(-4)} = a^{-2} = \boldsymbol{\frac{1}{a^2}}$

(2)　$a^{-5} \div a^{-3} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2$

$= a^{-5} \div a^{-3} \times a^{-2}$

$= a^{-5-(-3)+(-2)} = a^{-4}$

$= \boldsymbol{\frac{1}{a^4}}$

(3)　$(a^2b^{-1})^{-3} \times a^4 \times b^{-2}$

$= a^{-6}b^3 \times a^4 \times b^{-2}$

$= a^{-6+4} \times b^{3+(-2)}$

$= a^{-2}b = \boldsymbol{\frac{b}{a^2}}$

2　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{-216}$

$= \sqrt[3]{(-6)^3} = \boldsymbol{-6}$

(2)　$\sqrt[6]{729}$

$= \sqrt[6]{3^6} = \boldsymbol{3}$

(3)　$-\sqrt[4]{625}$

$= -\sqrt[4]{5^4} = \boldsymbol{-5}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$

$= \sqrt[4]{125 \times 5} = \sqrt[4]{5^3 \times 5}$

$= \sqrt[4]{5^4} = \boldsymbol{5}$

(2)　$\sqrt[3]{100^4} \div \sqrt[3]{10^2}$

$= \sqrt[3]{\frac{100^4}{10^2}} = \sqrt[3]{\frac{100^4}{100}}$

$= \sqrt[3]{100^3} = \boldsymbol{100}$

(3)　$\left(\sqrt[4]{49}\right)^2$

$= \sqrt[4]{49^2} = \sqrt[4]{(7^2)^2} = \sqrt[4]{7^4} = \boldsymbol{7}$

(4)　$\sqrt[3]{125^2}$

$= \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2 = \boldsymbol{25}$

(5)　$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$

$= \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{\sqrt[6]{2^6}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

4　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{32^{-1}}$

$= 16^{\frac{1}{6}} \times 32^{-\frac{1}{3}}$

$= (2^4)^{\frac{1}{6}} \times (2^5)^{-\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{5}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)}$

$= 2^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)　$9^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{3^5} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

$= (3^2)^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

$= 3^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= 3^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$

$= \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$

5　関数 $y = 3^x$ のグラフと次の関数のグラフは，どのような位置関係にあるか答えよ。

(1)　$y = -3^x$

$y = -3^x$ のグラフは，$y = 3^x$ のグラフと **x 軸に関して対称**である。

(2)　$y = \frac{1}{3^x}$

$y = \frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x = (3^{-1})^x = 3^{-x}$ と変形できるから，$y = \frac{1}{3^x}$ のグラフは，$y = 3^x$のグラフと **y 軸に関して対称**である。

(3)　$y = 3^x + 1$

$y = 3^x + 1$ のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを **y 軸方向に 1 平行移動**したものである。

(4)　$y = 3^{x-1}$

$y = 3^{x-1}$ のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを **x 軸方向に 1 平行移動**したものである。

6　次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\sqrt{3},\ \sqrt[5]{9},\ \sqrt[7]{27}$

$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{2}{5}},\ \sqrt[7]{27} = 3^{\frac{3}{7}}$ である。

ここで

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

であり，$y = 3^x$ の底 3 は 1 より大きいから

$$3^{\frac{2}{5}} < 3^{\frac{3}{7}} < 3^{\frac{1}{2}}$$

すなわち　$\boldsymbol{\sqrt[5]{9} < \sqrt[7]{27} < \sqrt{3}}$

(2)　$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[8]{\frac{1}{8}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[8]{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}}$$

である。ここで

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

であり，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}}$$

すなわち　$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[8]{\frac{1}{8}}}$

7　次の方程式を解け。

(1)　$4^x = \frac{1}{8}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$,　$\frac{1}{8} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

であるから

$2^{2x} = 2^{-3}$

ゆえに　$2x = -3$

したがって　$\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}}$

(2)　$\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{x-2}$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$$

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{x-2} = \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}^{x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-6}$$

であるから

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-6}$$

ゆえに　$2x = 3x - 6$

したがって　$\boldsymbol{x = 6}$

8　次の不等式を解け。

(1)　$3^{x-1} > 27$

$3^{x-1} > 27$

$3^{x-1} > 3^3$

$y = 3^x$ の底 3 は 1 より大きいから

$x - 1 > 3$

ゆえに　$\boldsymbol{x > 4}$

(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}x}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$x - 1 \geqq \frac{3}{2}x$$

よって　$\boldsymbol{x \leqq -2}$