２節 三角比の拡張

❶ 三角比と座標

（教科書 p.135）

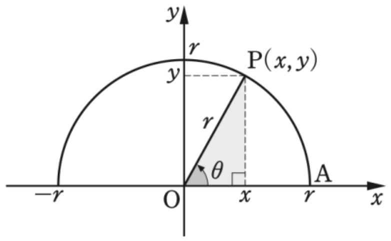
これまでは，直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきた。ここでは，座標を用いて三角比を（1　　　　　　）にまで拡張することを考えてみよう。

右の図のように，原点 O を中心とする半径 r の半円の周上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり

$\angle \mathrm{AOP} = \theta$

とする。

θ が鋭角のとき，角 θ の三角比は，半径 r と点 P の座標 $(x,\ y)$ を用いて次のように表される。



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

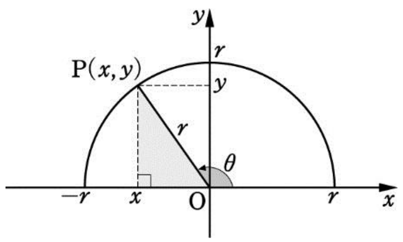
このことをもとにして，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲にある角 θ の三角比をあらためて同じ式で定義する。

拡張した三角比

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



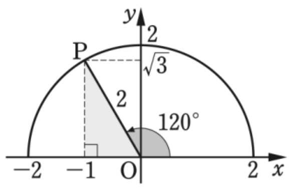
三角比の値は，角 θ だけで定まり，半径 r の大きさによらない。

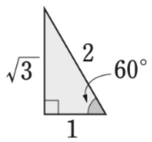
例1 $r = 2$，$\theta = 120°$ とすると，点 P の座標は $\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ であるから

$\sin 120° =$

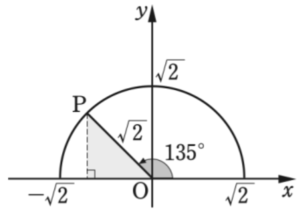
$\cos 120° =$

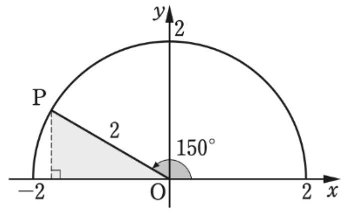
$\tan 120° =$





問1 次の図を用いて，135°，150° の三角比の値を求めよ。

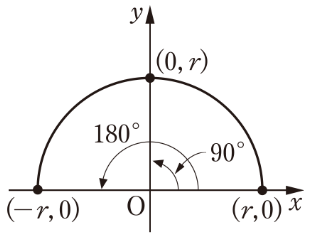




0°, 90°, 180°の三角比

（教科書 p.136）

原点 O を中心とする半径 r の円周上で，$\theta=0°$，$90°$，$180°$ によって定まる点 P の座標はそれぞれ $(r,\ 0)$，$(0,\ r)$，$(-r,\ 0)$ である。



よって，0°，90°，180° の三角比の値は次のようになる。

$\sin 0° = \frac{0}{r} = 0$,　$\cos 0° = \frac{r}{r} = 1$,　$\tan 0° = \frac{0}{r} = 0$

$\sin 90° = \frac{r}{r} = 1$,　$\cos 90° = \frac{0}{r} = 0$,　$\tan 90°$ は定義されない

$\sin 180° = \frac{0}{r} = 0$,　$\cos 180° = \frac{-r}{r} = -1$,　$\tan 180° = \frac{0}{-r} = 0$

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

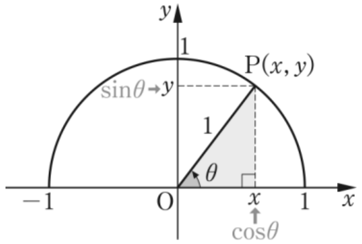
三角比の値の範囲と符号

（教科書 p.137）

　原点を中心とする半径１の円を（2　　　　　　　）という。単位円の周上で，角 θ によって定まる点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，三角比の定義から

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$\sin\theta=\dfrac{y}{1},\ \cos\theta=\dfrac{x}{1}$



である。ここで，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき

　$-1\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq1$

であるから，次のことが成り立つ。

$$-1\leqq\cos\theta\leqq1,\ \ 0\leqq\sin\theta\leqq1$$

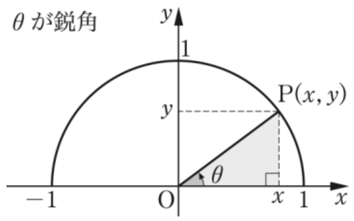
　また，右の図より

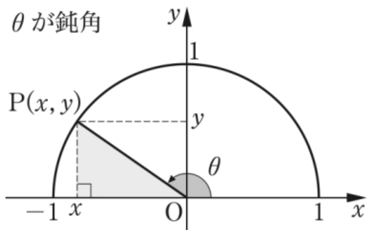
　　θ が鋭角のときは $x>0,\ y>0$

　　θ が鈍角のときは $x<0,\ y>0$

となるから，三角比の符号は下の表のようになる。

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	$+$	$+$
$\cos\theta$	$+$	$-$
$\tan\theta$	$+$	$-$





サイン，コサインの値から角を求めること

（教科書 p.138）

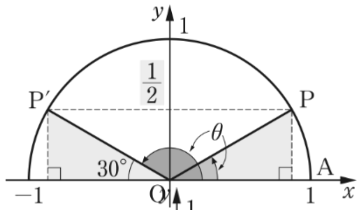
　サイン，またはコサインの値がわかっているとき，その角の大きさを単位円を利用して求めてみよう。

例題 1　$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

　（1）　$\sin\theta=\frac{1}{2}$　　（2）　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

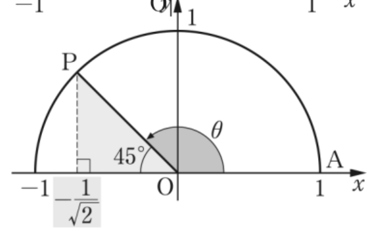
解　（1）　単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の２点 P，P′ である。

　求める角は ∠AOP，∠AOP′ であるから　$\theta=$



（2）　単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である。

　求める角は ∠AOP であるから　$\theta=$



問2 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\theta = 1$

(3) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

(4) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

タンジェントの値から角を求めること

（教科書 p.139）

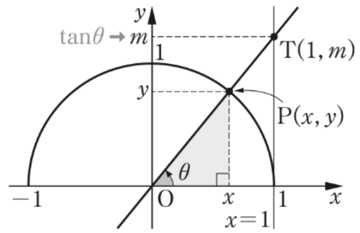
単位円の周上で，角 θ によって定まる点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ ……①

また，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点 T の座標を $(1,\ m)$ とすると

$\frac{y}{x} = \frac{m}{1}$ ……②

①，②より，次の式が成り立つ。　$\tan\theta = m$



このことを用いて，タンジェントの値がわかっているとき，その角の大きさを求めてみよう。

例題 2　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

考え方　直線 $x = 1$ 上で y 座標が $-\sqrt{3}$ となる点を定める角 θ を求めればよい。

解　直線 $x = 1$ 上に

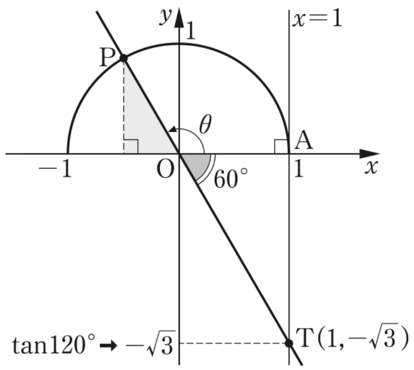
$\mathrm{T}(1, -\sqrt{3})$

をとる。

直線 OT と単位円の交点 P を右の図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

であるから　$\theta =$



問3　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1)　$\tan\theta = 1$

(2)　$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

② 三角比の性質

三角比の相互関係

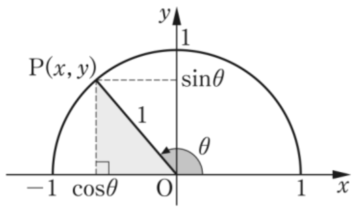
（教科書 p.140）

単位円で三角比を考えれば

$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$

であるから

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



また，三平方の定理により，$x^2 + y^2 = 1$ であるから

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

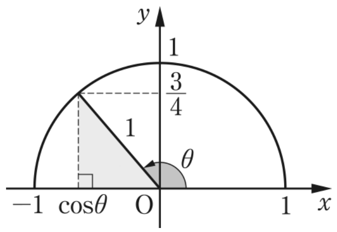
すなわち，角の範囲が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のときも次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

例題 3 $\sin\theta = \frac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$90° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

解 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta =$



$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，

$\cos\theta \leqq 0$ であるから

$\cos\theta =$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta =$

問4 次の三角比の値を求めよ。ただし，$90° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

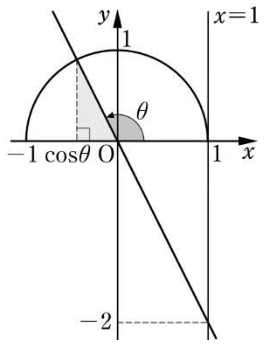
(1) $\sin\theta = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$

(2) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の場合についても，θ が鋭角のときと同様に，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

例題 4 $\tan\theta = -2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。



解 $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\frac{1}{\cos^2\theta} =$

よって　$\cos^2\theta =$

$\tan\theta < 0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta < 0$ である。

よって　$\cos\theta =$

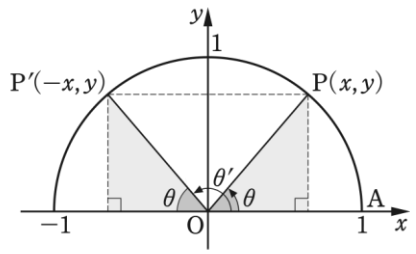
また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta =$

問5 $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

180°－θ の三角比

（教科書 p.142）



右の図のように，点 P と点 P′ は単位円の周上にあって，y 軸に関して対称であるとする。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-x,\ y)$ である。

$\angle AOP = \theta$，$\angle AOP' = \theta'$

とすると，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$，$\frac{y}{x} = \tan\theta$ であるから

$\sin\theta' = y = \sin\theta$

$\cos\theta' = -x = -\cos\theta$

$\tan\theta' = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

ここで $\theta' = 180° - \theta$ であるから，次の公式が成り立つ。

180° − θ の三角比
$\boldsymbol{\sin(180° - \theta) = \sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(180° - \theta) = -\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(180° - \theta) = -\tan\theta}$

上の公式を用いて，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。

例2 $145° = 180° - 35°$ であるから，教科書 195 ページの三角比の表により

$\sin 145° =$

$\cos 145° =$

$\tan 145° =$

問6 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

（1）　$\sin 100°$

（2）　$\cos 125°$

（3）　$\tan 162°$

参考 直線の傾きとタンジェント

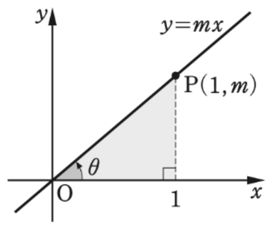
（教科書 p.143）

直線 $y=mx$ の傾き m とタンジェントの関係について考えてみよう。

直線 $y=mx$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とする。右の図で，点 $\mathrm{P}(1,\ m)$ は，直線 $y=mx$ 上の点であるから

$\tan\theta=\frac{m}{1}=m$

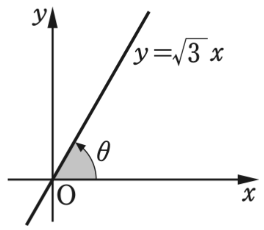
となる。すなわち，直線の傾きは，直線が x 軸の正の向きとなす角のタンジェントに等しい。



例1 直線 $y=\sqrt{3}x$ が x 軸の正の向きとなす角 θ の大きさを求めてみよう。

$\tan\theta=$

よって　$\theta=$



問1 直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ が x 軸の正の向きをなす角 θ の大きさを求めよ。

Training

（教科書 p.143）

8　$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

(3)　$\tan\theta=-1$

9 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，１つの値が次のように与えられたとき，残りの２つの値を求めよ。
ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\cos\theta = -\frac{1}{4}$

(2) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

10 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 110°$

(2) $\cos 95°$

(3) $\tan 130°$

２節 三角比の拡張

❶ 三角比と座標

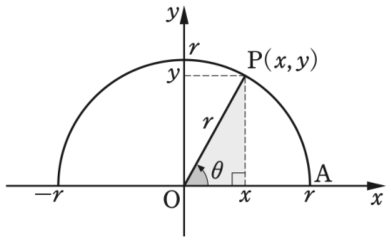
（教科書 p.135）

これまでは，直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきた。ここでは，座標を用いて三角比を（[1] 鈍角 ）にまで拡張することを考えてみよう。

右の図のように，原点 O を中心とする半径 r の半円の周上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり

$\angle \mathrm{AOP} = \theta$

とする。



θ が鋭角のとき，角 θ の三角比は，半径 r と点 P の座標 $(x,\ y)$ を用いて次のように表される。

$\sin\theta = \frac{y}{r}$，$\cos\theta = \frac{x}{r}$，$\tan\theta = \frac{y}{x}$

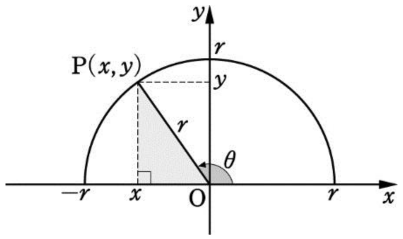
このことをもとにして，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲にある角 θ の三角比をあらためて同じ式で定義する。

拡張した三角比

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$



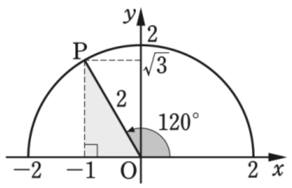
三角比の値は，角 θ だけで定まり，半径 r の大きさによらない。

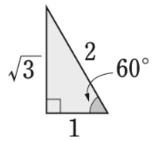
例1 $r = 2$，$\theta = 120°$ とすると，点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ であるから

$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

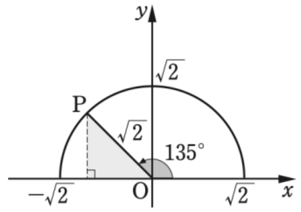
$\cos 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

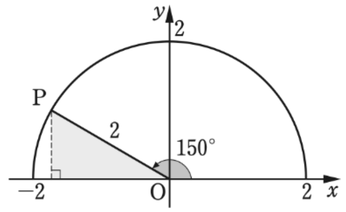
$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

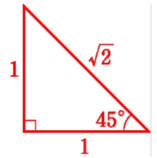




問1 次の図を用いて，135°，150° の三角比の値を求めよ。





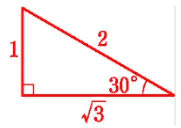


OP $= \sqrt{2}$ の図で，点 P の座標は $(-1,\ 1)$ であるから

$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135° = -1$



OP $= 2$ の図で，点 P の座標は $(-\sqrt{3},\ 1)$ であるから

$\sin 150° = \frac{1}{2}$

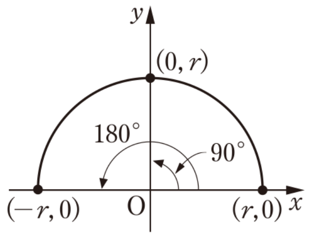
$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

0°, 90°, 180°の三角比

（教科書 p.136）

原点 O を中心とする半径 r の円周上で，$\theta = 0°$，$90°$，$180°$ によって定まる点 P の座標はそれぞれ $(r,\ 0)$，$(0,\ r)$，$(-r,\ 0)$ である。



よって，$0°$，$90°$，$180°$ の三角比の値は次のようになる。

$\sin 0° = \frac{0}{r} = 0$,　$\cos 0° = \frac{r}{r} = 1$,　$\tan 0° = \frac{0}{r} = 0$

$\sin 90° = \frac{r}{r} = 1$,　$\cos 90° = \frac{0}{r} = 0$,　$\tan 90°$ は定義されない

$\sin 180° = \frac{0}{r} = 0$,　$\cos 180° = \frac{-r}{r} = -1$,　$\tan 180° = \frac{0}{-r} = 0$

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

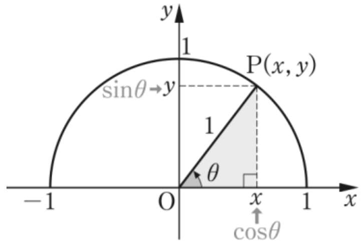
三角比の値の範囲と符号

（教科書 p.137）

原点を中心とする半径 1 の円を（[2]　単位円　）という。単位円の周上で，角 θ によって定まる点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，三角比の定義から

$$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$\sin\theta = \frac{y}{1}$，$\cos\theta = \frac{x}{1}$



である。ここで，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$

であるから，次のことが成り立つ。

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1,\quad 0 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

また，右の図より

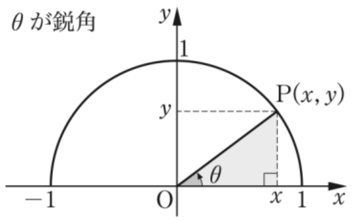
θ が鋭角のときは $x > 0$，$y > 0$

θ が鈍角のときは $x < 0$，$y > 0$

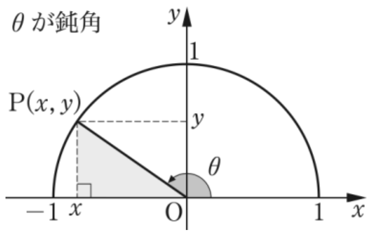
となるから，三角比の符号は下の表のようになる。

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	－
$\tan\theta$	＋	－

θ が鋭角



θ が鈍角



サイン，コサインの値から角を求めること

（教科書 p.138）

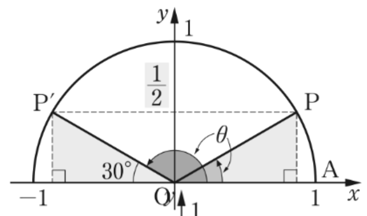
サイン，またはコサインの値がわかっているとき，その角の大きさを単位円を利用して求めてみよう。

例題 1　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

（1）　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　（2）　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

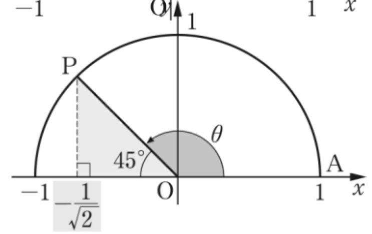
解　（1）　単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P′ である。

求める角は ∠AOP，∠AOP′ であるから　$\theta = 30°,\ 150°$



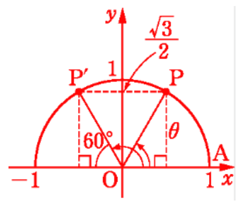
（2）　単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である。

求める角は ∠AOP であるから　$\theta = 135°$



問2 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

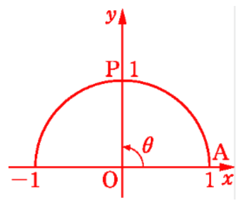


単位円の周上で，y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は，図の 2 点 P，P′ である。

求める角は ∠AOP，∠AOP′ であるから

$\theta = 60°$，$120°$

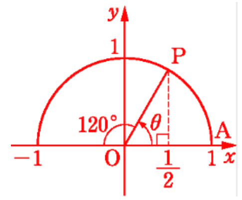
(2) $\sin\theta = 1$



単位円の周上で，y 座標が 1 となる点は，図の点 P である。
求める角は ∠AOP であるから

$\theta = 90°$

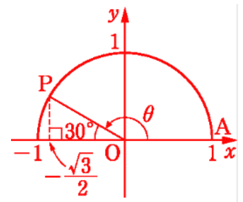
(3) $\cos\theta = \frac{1}{2}$



単位円の周上で，x 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の点 P である。
求める角は ∠AOP であるから

$\theta = 60°$

(4) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



単位円の周上で，x 座標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は，図の点 P である。

求める角は ∠AOP であるから

$\theta = 150°$

タンジェントの値から角を求めること

（教科書 p.139）

単位円の周上で，角 θ によって定まる点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

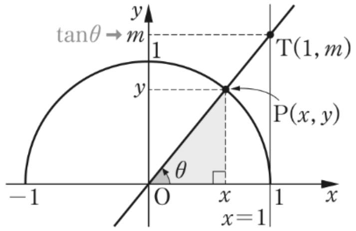
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ ……①

また，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点 T の座標を $(1,\ m)$ とすると

$\frac{y}{x} = \frac{m}{1}$ ……②

①，②より，次の式が成り立つ。 $\tan\theta = m$

このことを用いて，タンジェントの値がわかっているとき，その角の大きさを求めてみよう。



例題 2 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

考え方 直線 $x = 1$ 上で y 座標が $-\sqrt{3}$ となる点を定める角 θ を求めればよい。

解 直線 $x = 1$ 上に

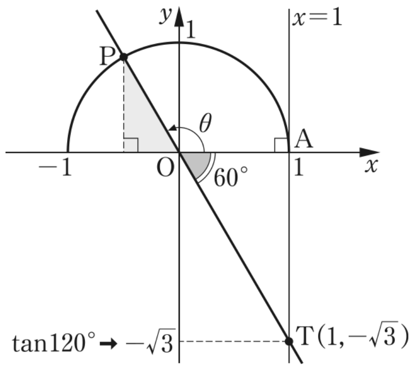
$\mathrm{T}(1, -\sqrt{3})$

をとる。

直線 OT と単位円の交点 P を右の図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

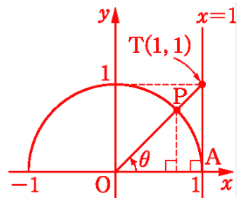
であるから $\theta = 120°$



問3 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1) $\tan\theta = 1$

直線 $x = 1$ 上に点 T(1, 1) をとる。

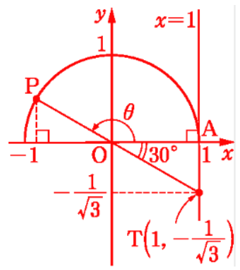


直線 OT と単位円の交点 P を図のようにとると，$\theta = \angle\mathrm{AOP}$ であるから

$\theta = 45°$

(2) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。



直線 OT と単位円の交点 P を図のようにとると，$\theta = \angle\mathrm{AOP}$ であるから

$\theta = 150°$

❷ 三角比の性質

三角比の相互関係

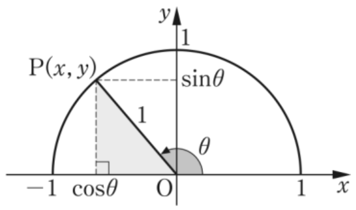
（教科書 p.140）

単位円で三角比を考えれば

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

であるから

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



また，三平方の定理により，$x^2+y^2=1$ であるから

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

すなわち，角の範囲が $0°\leqq\theta\leqq180°$ のときも次の公式が成り立つ。

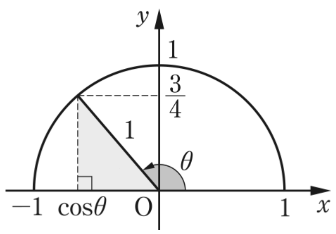
$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$，　$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

例題 3 $\sin\theta=\frac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$90°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

解 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$



$90°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，

$\cos\theta\leqq0$ であるから

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta=\frac{3}{4}\div\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3}{\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

問4 次の三角比の値を求めよ。ただし，$90°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

(1) $\sin\theta=\frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$90°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$\cos\theta\leqq0$ であるから

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$90°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$\sin\theta\geqq0$ であるから

$\sin\theta=\frac{3}{5}$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta=\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ の場合についても，θ が鋭角のときと同様に，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

例題 4 $\tan\theta=-2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

解 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

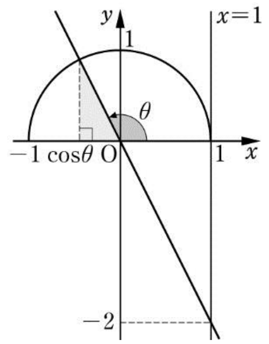
$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

$=1+(-2)^2=5$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$ である。

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt5}=-\dfrac{\sqrt5}{5}$



また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta$

$=(-2)\times\left(-\dfrac{\sqrt5}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt5}{5}$

問5 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから，$\cos\theta<0$ である。

よって

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{10}}=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta$

$=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$180°-\theta$ の三角比

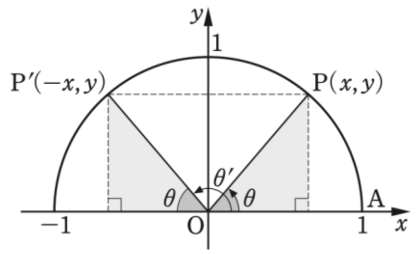
（教科書 p.142）

右の図のように，点 P と点 P′ は単位円の周上にあって，y 軸に関して対称であるとする。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-x,\ y)$ である。

$\angle\mathrm{AOP}=\theta$，$\angle\mathrm{AOP'}=\theta'$

とすると，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$\dfrac{y}{x}=\tan\theta$ であるから



$\sin\theta'=y=\sin\theta$

$\cos\theta'=-x=-\cos\theta$

$\tan\theta'=\dfrac{y}{-x}=-\dfrac{y}{x}=-\tan\theta$

ここで $\theta'=180°-\theta$ であるから，次の公式が成り立つ。

$180°-\theta$ の三角比
$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

上の公式を用いて，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。

例2 $145°=180°-35°$ であるから，教科書 195 ページの三角比の表により

$\sin145°=\sin(180°-35°)=\sin35°=0.5736$

$\cos145°=\cos(180°-35°)=-\cos35°=-0.8192$

$\tan145°=\tan(180°-35°)=-\tan35°=-0.7002$

問6 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

（1）　$\sin100°$

$\sin100°=\sin(180°-80°)$

$=\sin80°=0.9848$

（2）　$\cos125°$

$\cos125°=\cos(180°-55°)$

$=-\cos55°=-0.5736$

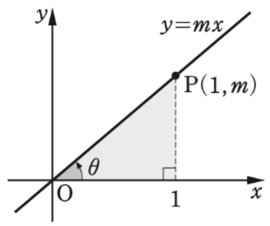
（3）　$\tan162°$

$\tan162°=\tan(180°-18°)$

$=-\tan18°=-0.3249$

参考 直線の傾きとタンジェント

（教科書 p.143）

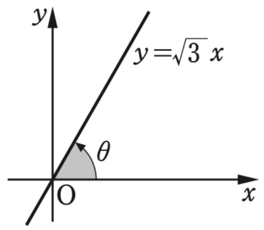


直線 $y = mx$ の傾き m とタンジェントの関係について考えてみよう。

直線 $y = mx$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とする。右の図で，点 $\mathrm{P}(1,\ m)$ は，直線 $y = mx$ 上の点であるから

$\tan\theta = \frac{m}{1} = m$

となる。すなわち，直線の傾きは，直線が x 軸の正の向きとなす角のタンジェントに等しい。



例1 直線 $y = \sqrt{3}x$ が x 軸の正の向きとなす角 θ の大きさを求めてみよう。

$\tan\theta = \sqrt{3}$

よって　$\theta = 60°$

問1 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ が x 軸の正の向きをなす角 θ の大きさを求めよ。

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

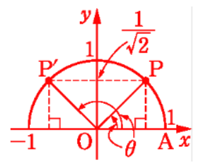
よって　$\theta = 30°$

Training

（教科書 p.143）

8　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす角 θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

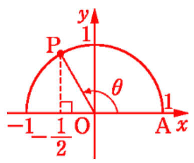


単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，図の 2 点 P，P′ である。

求める角は ∠AOP，∠AOP′ であるから

$\theta = 45°,\ 135°$

(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

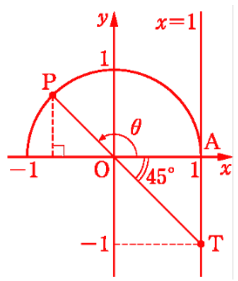


単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，図の点 P である。

求める角は ∠AOP であるから

$\theta = 120°$

(3)　$\tan\theta = -1$



直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ -1)$ をとる。

直線 OT と単位円の交点 P を図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$ であるから

$\theta = 135°$

9 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，１つの値が次のように与えられたとき，残りの２つの値を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\cos\theta = -\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \div \left(-\frac{1}{4}\right) = -\sqrt{15}$

(2) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$

(i) θ が鋭角のとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) θ が鈍角のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i)，(ii)より

$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

または

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より

よって

$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

$= 1 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$

$\tan\theta > 0$ より，θ は鋭角であるから，$\cos\theta > 0$ である。

ゆえに

$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}$

10 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 110°$

$\sin 110° = \sin(180° - 70°) = \sin 70°$

$= \sin(90° - 20°) = \cos 20°$

(2) $\cos 95°$

$\cos 95° = \cos(180° - 85°) = -\cos 85°$

$= -\cos(90° - 5°) = -\sin 5°$

(3) $\tan 130°$

$\tan 130° = \tan(180° - 50°) = -\tan 50°$

$= -\tan(90° - 40°)$

$= -\frac{1}{\tan 40°}$