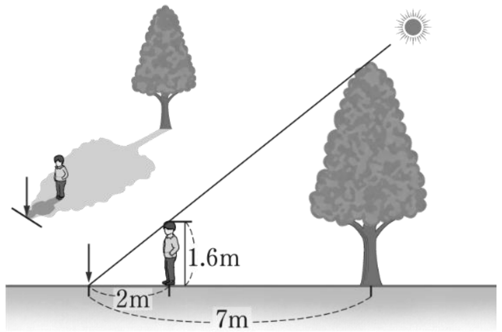
１節 鋭角の三角比

❶ 直角三角形と三角比

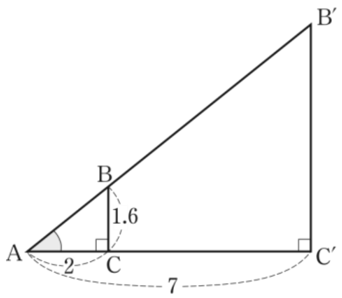
タンジェント

（教科書 p.124）

右の図のように，身長 1.6m の人が木の近くに立ち，人の影と木の影の先端が一致したとする。人の影が 2m，木の影が 7m であるとき，木の高さを求めてみよう。



まず，上の状況を下の図のように直角三角形 ABC と AB′C′ で表す。このとき △AB′C′ と △ABC は相似である。相似な三角形の辺の比は等しいから



$B'C' : AC' = BC : AC$

すなわち　$\frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC}$

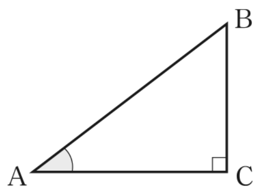
よって

$B'C' = AC' \times \frac{BC}{AC}$

ここで，$AC' = 7$，$\frac{BC}{AC} = \frac{1.6}{2} = 0.8$ であるから，求める木の高さは

$B'C' =$

一般に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AC}$ の値は，△ABC の大きさに関係なく，∠A の大きさ A だけによって定まる。



$\frac{BC}{AC}$ の値を A の（[1]　　　　　　　），または（[2]　　　　　）といい，（[3]　　　　　）で表す。

木の高さを求めるのに用いた三角形では $\tan A = \frac{1.6}{2} = 0.8$ である。

サイン・コサイン

（教科書 p.125）

タンジェントの場合と同様に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AB}$，$\frac{AC}{AB}$ の値は∠A の大きさ A だけによって定まる。

$\frac{BC}{AB}$ を A の（[4]　　　　　）または（[5]　　　　　）といい，（[6]　　　　　）で表す。

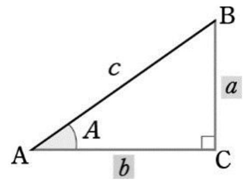
$\frac{AC}{AB}$ を A の（[7]　　　　　）または（[8]　　　　　）といい，（[9]　　　　　）で表す。

サイン，コサイン，タンジェントをまとめて（[10]　　　　　）という。

三角比

右の図の直角三角形 ABC において

$\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$，$\tan A = \frac{a}{b}$

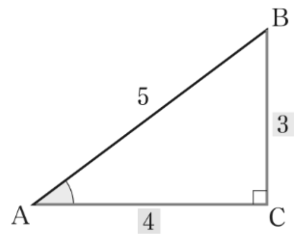


例 1 右の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めてみよう。

$\sin A$

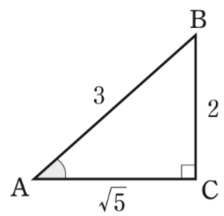
$\cos A$

$\tan A$

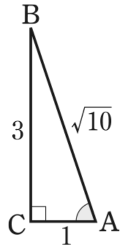


問1 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$の値を求めよ。

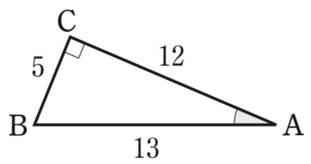
(1)



(2)



(3)

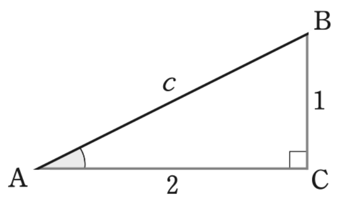


例2 右の図の直角三角形において，斜辺 AB の長さを c とすると，三平方の定理により

$c^2 =$

$c > 0$ より

c $=$

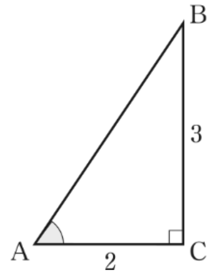


よって　$\sin A =$　　　　，

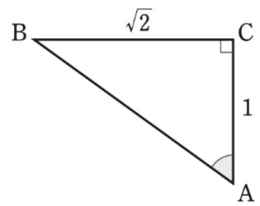
$\cos A =$

問2 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$の値を求めよ。

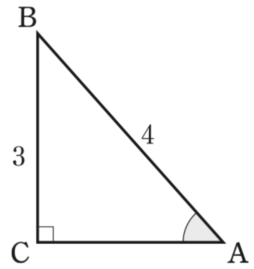
(1)



(2)



（3）



30°, 45°, 60°の三角比

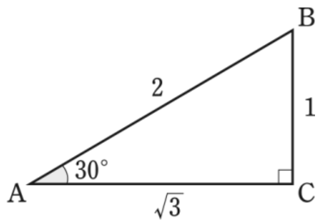
（教科書 p.126）

右の図のような $A = 30°$ の直角三角形 ABC において

$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$

$\cos A = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

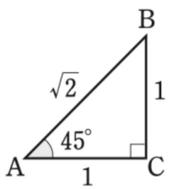


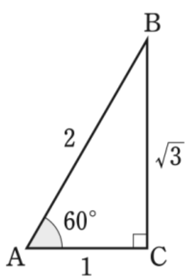
であることがわかる。

ゆえに　$\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

次の図のような直角三角形を考えることにより，$A = 45°$，$60°$ の三角比の値を求めることができる。

これらの角の三角比をまとめると右の表のようになる。





A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の表

（教科書 p.127）

教科書 195 ページの三角比の表に，0° から 90° まで 1° ごとの角に対する三角比の値を，四捨五入して小数第 4 位まで掲載してある。

右の表はその一部である。

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777

例3 上の表から

$\cos 69° =$

また，$\sin A = 0.9455$ となる A は

$A =$

問3 上の表を用いて，$\sin 69°$，$\tan 69°$ の値をそれぞれ求めよ。

問4 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

（1）$\sin 40°$

（2）$\cos 58°$

（3）$\tan 25°$

問5 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の式を満たす A を求めよ。

（1）$\sin A = 0.9659$

（2）$\cos A = 0.9205$

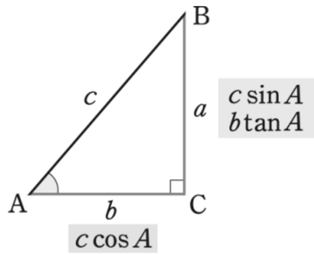
（3）$\tan A = 0.1763$

❷ 直角三角形の辺と角

（教科書 p.128）

三角比の値を用いて，直角三角形の 1 つの辺の長さから，他の辺の長さを求めることを考えよう。
右の図の直角三角形において

$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$



であるから，次の式が成り立つ。

$\boldsymbol{a=c\sin A}$

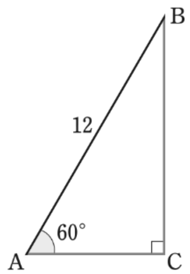
$\boldsymbol{b=c\cos A}$

$\boldsymbol{a=b\tan A}$

例4 右の図の直角三角形において

BC =

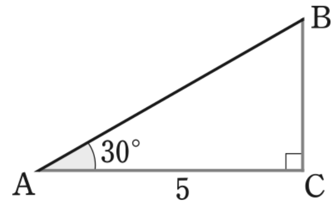
AC =



問6 ∠C = 90° の直角三角形 ABC において，AB = 8，A = 30° のとき，AC，BC を求めよ。

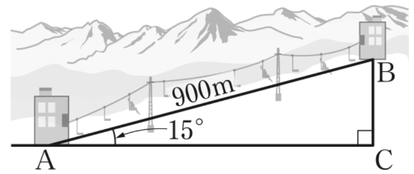
例5 右の図の直角三角形において

BC =



問7 ∠C = 90° の直角三角形 ABC において，AC = 2，A = 45° のとき，BC を求めよ。

例題 1 右の図のように，傾斜角が 15° で，2 地点 A，B 間の距離が 900m のリフトがある。A の標高が 600m であるとき，B の標高は何 m か。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。
ただし，sin 15 ° = 0.259 とする。



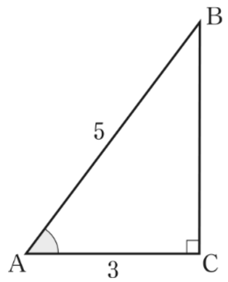
解 標高が A と同じで B の真下の点を C とすると，直角三角形 ABC において，A = 15° であるから

BC =

よって，B の標高は

問8 例題 1 において，リフトの水平方向の距離は何 m か。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。
ただし，cos 15 ° = 0.966 とする。

例6 右の図の直角三角形において，A を求めてみよう。

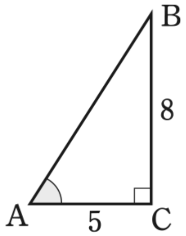


$\cos A = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} =$

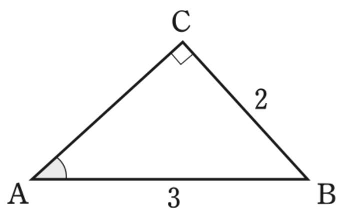
コサインがこの値に最も近い A を教科書195ページの三角比の表から求めると

問9 教科書195ページの三角比の表を用いて，次の A を求めよ。

(1)



(2)

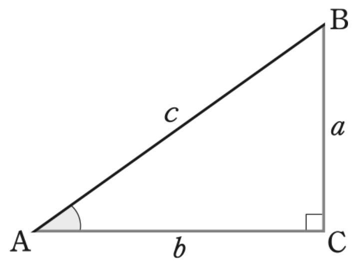


❸ 三角比の相互関係

（教科書 p.130）

三角比 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の間に成り立つ関係を調べてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において



$$\sin A = \frac{a}{c},\quad \cos A = \frac{b}{c}$$

よって

$$a = c\sin A,\quad b = c\cos A$$

ここで

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

であるから

$$\tan A = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

また，直角三角形 ABC に三平方の定理を用いると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

であるから

$$(c\sin A)^2 + (c\cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

ふつう，$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$，$\cos^2 A$ と書く。

すなわち　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

以上より，三角比について次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係
$\boldsymbol{\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}}$ $\boldsymbol{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$

例題 2　A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

解　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$\sin^2 A =$

$\sin A > 0$ であるから

$\sin A =$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \sin A \div \cos A$ より

$\tan A =$

例題２は，直角三角形を利用して，次のように解いてもよい。

別解　$\cos A = \frac{5}{7}$ であるから，A は右の図の直角三角形 ABC の ∠A の大きさである。

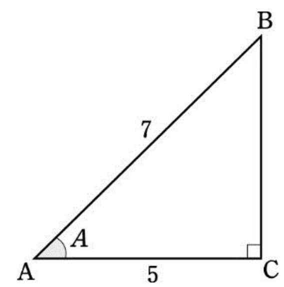
三平方の定理により

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 =$

であるから，$\mathrm{BC} > 0$ より

$\mathrm{BC} =$

よって　$\sin A =$



$\tan A =$

問 10 A が鋭角で，$\sin A=\frac{1}{4}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

等式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1=\frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで，$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2$ であるから，次の公式が成り立つ。

$$\mathbf{1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}}$$

例題 3 A が鋭角で，$\tan A=2\sqrt{2}$ のとき，$\cos A$，$\sin A$の値を求めよ。

解 $1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$ より

$\frac{1}{\cos^2 A}=$

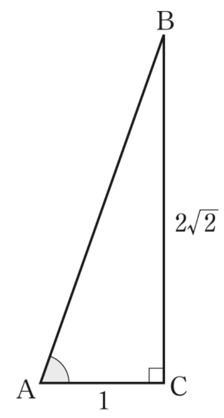
よって　$\cos^2 A=$

$\cos A>0$ であるから

$\cos A=$

また，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ より

$\sin A=$



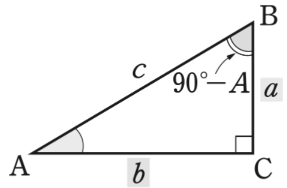
問 11 A が鋭角で，$\tan A=3$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

90°－Aの三角比

（教科書 p.133）

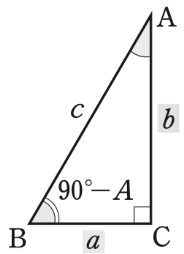
右上の図の直角三角形において，A の三角比は

$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$



また，右下の図をもとに B の三角比は

$\sin B=\frac{b}{c}$，$\cos B=\frac{a}{c}$，$\tan B=\frac{b}{a}$



ここで，$B=90°-A$ であるから，次の公式が
成り立つことがわかる。

$90°-A$ の三角比
$\sin(90°-A)=\cos A$ $\cos(90°-A)=\sin A$ $\tan(90°-A)=\frac{1}{\tan A}$

上の公式を用いれば，鋭角の三角比はすべて 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例7 $\sin 63°=$

$\cos 63°=$

$\tan 63°=$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

（1） $\sin 87°$

（2） $\cos 56°$

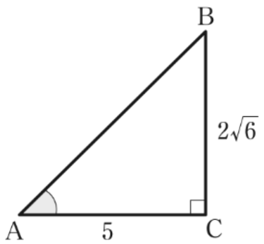
（3） $\tan 72°$

Training

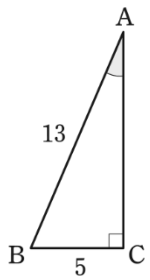
（教科書 p.134）

1 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

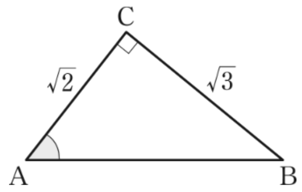
(1)



(2)



(3)



(1)

(2)

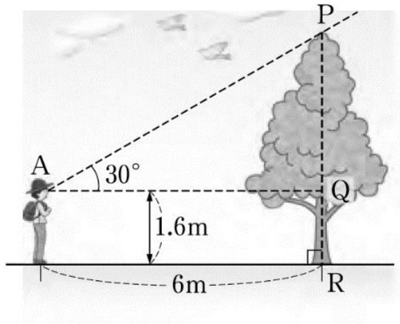
(3)

2 △ABC において，次の値を求めよ。

(1) $\mathrm{AB}=5$，$A=45°$，$C=90°$ のとき，AC，BC

(2) $\mathrm{AB}=4$，$A=90°$，$B=60°$ のとき，AC，BC

3 平地に立っている木の根元から 6m 離れた地点に立って，木の上端を見上げるときの仰角，すなわち，右の図の $\angle$QAP は 30° であった。目の高さを 1.6m とすると，木の高さは何 m か。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。
ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とする。



4 A が鋭角で，$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

5 A が鋭角で，$\cos A=\frac{3}{8}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

6 A が鋭角で，$\tan A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

7 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 62°$

(2) $\cos 78°$

(3) $\tan 80°$

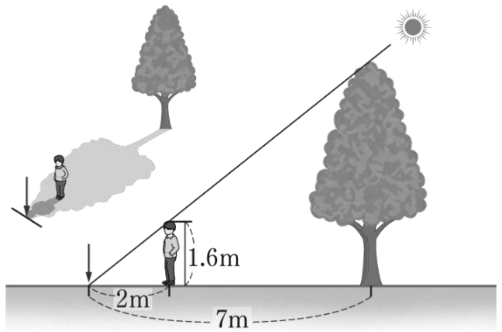
１節 鋭角の三角比

❶ 直角三角形と三角比

タンジェント

（教科書 p.124）

右の図のように，身長 1.6m の人が木の近くに立ち，人の影と木の影の先端が一致したとする。人の影が 2m，木の影が 7m であるとき，木の高さを求めてみよう。



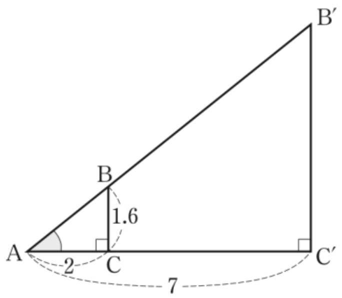
まず，上の状況を下の図のように直角三角形 ABC と AB′C′ で表す。このとき △AB′C′ と △ABC は相似である。相似な三角形の辺の比は等しいから

$B'C' : AC' = BC : AC$

すなわち $\frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC}$

よって

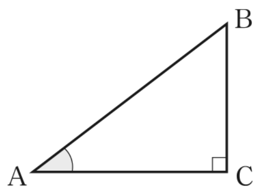
$B'C' = AC' \times \frac{BC}{AC}$



ここで，$AC' = 7$，$\frac{BC}{AC} = \frac{1.6}{2} = 0.8$ であるから，求める木の高さは

$B'C' = 7 \times 0.8 = 5.6$（m）

一般に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AC}$ の値は，△ABC の大きさに関係なく，∠A の大きさ A だけによって定まる。



$\frac{BC}{AC}$ の値を A の（[1] タンジェント ），または（[2] 正接 ）といい，（[3] $\tan A$ ）で表す。

木の高さを求めるのに用いた三角形では $\tan A = \frac{1.6}{2} = 0.8$ である。

サイン・コサイン

（教科書 p.125）

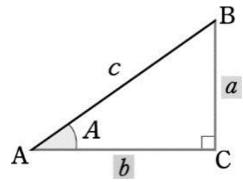
タンジェントの場合と同様に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AB}$，$\frac{AC}{AB}$ の値は∠A の大きさ A だけによって定まる。

$\frac{BC}{AB}$ を A の（[4] サイン ）または（[5] 正弦 ）といい，（[6] $\sin A$ ）で表す。

$\frac{AC}{AB}$ を A の（[7] コサイン ）または（[8] 余弦 ）といい，（[9] $\cos A$ ）で表す。

サイン，コサイン，タンジェントをまとめて（[10] 三角比 ）という。

三角比
右の図の直角三角形 ABC において $\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$，$\tan A = \frac{a}{b}$

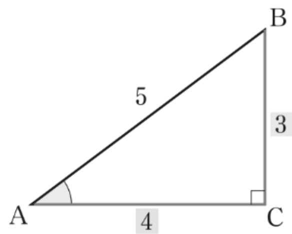


例 1 右の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めてみよう。

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$

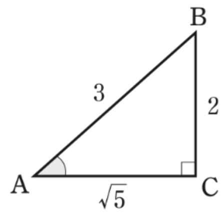
$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$



問1 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$の値を求めよ。

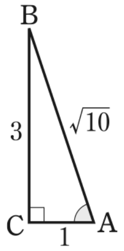
（1）



$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$，$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2)

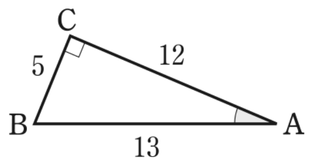


$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{1} = 3$

(3)



$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$，$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$

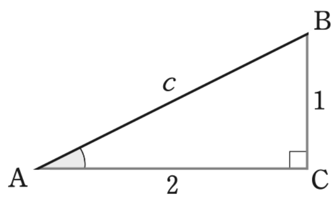
$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$

例2 右の図の直角三角形において，斜辺 AB の長さを c とすると，三平方の定理により

$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$c > 0$ より

$c = \sqrt{5}$

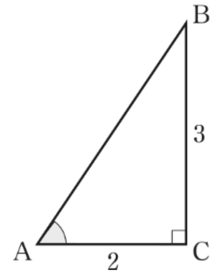


よって　$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

問2 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$の値を求めよ。

(1)



$AB = \sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$

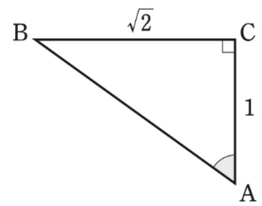
であるから

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{2}$

(2)



$AB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

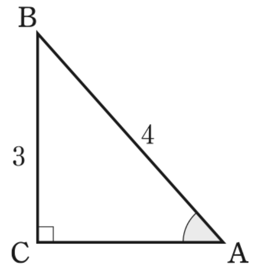
であるから

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

（3）



$AC=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

であるから

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4}$，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

30°, 45°, 60°の三角比

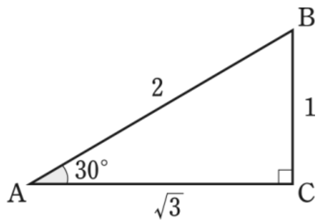
（教科書 p.126）

右の図のような $A=30°$ の直角三角形 ABC において

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

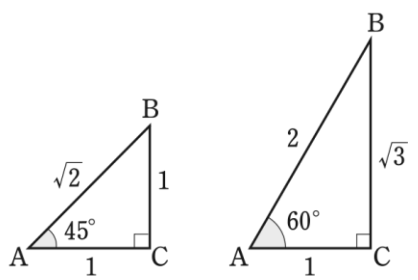


であることがわかる。

ゆえに　$\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$

次の図のような直角三角形を考えることにより，$A=45°$，$60°$ の三角比の値を求めることができる。

これらの角の三角比をまとめると右の表のようになる。



A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の表

（教科書 p.127）

教科書 195 ページの三角比の表に，0° から 90° まで 1° ごとの角に対する三角比の値を，四捨五入して小数第 4 位まで掲載してある。

右の表はその一部である。

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777

例3 上の表から

$\cos 69°=$ 　0.3584

また，$\sin A=0.9455$ となる A は

$A=$ 　71°

問3 上の表を用いて，$\sin 69°$，$\tan 69°$ の値をそれぞれ求めよ。

$\sin 69°=0.9336$

$\tan 69°=2.6051$

問4 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

（1）$\sin 40°$

$\sin 40°=0.6428$

（2）$\cos 58°$

$\cos 58°=0.5299$

（3）$\tan 25°$

$\tan 25°=0.4663$

問5 教科書 195 ページの三角比の表を用いて，次の式を満たす A を求めよ。

（1）$\sin A=0.9659$

$A=75°$

（2）$\cos A=0.9205$

$A=23°$

（3）$\tan A=0.1763$

$A=10°$

❷ 直角三角形の辺と角

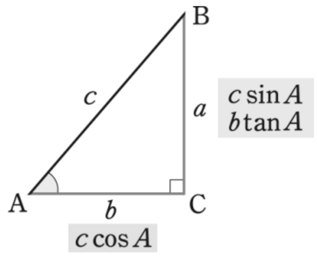
（教科書 p.128）

三角比の値を用いて，直角三角形の 1 つの辺の長さから，他の辺の長さを求めることを考えよう。
右の図の直角三角形において

$$\sin A = \frac{a}{c},\quad \cos A = \frac{b}{c},\quad \tan A = \frac{a}{b}$$

であるから，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a = c\sin A}$$
$$\boldsymbol{b = c\cos A}$$
$$\boldsymbol{a = b\tan A}$$



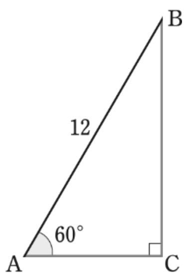
例4 右の図の直角三角形において

$BC = AB\sin A$

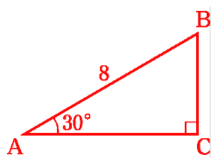
$= 12\sin 60° = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

$AC = AB\cos A$

$= 12\cos 60° = 12 \times \frac{1}{2} = 6$



問6 ∠C = 90° の直角三角形 ABC において，AB = 8，$A = 30°$ のとき，AC，BC を求めよ。



$AC = AB\cos 30°$

$= 8\cos 30°$

$= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$BC = AB\sin 30°$

$= 8\sin 30°$

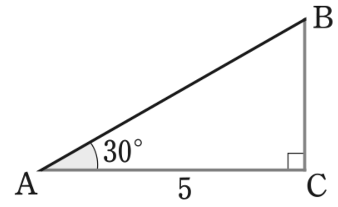
$= 8 \times \frac{1}{2} = 4$

例5 右の図の直角三角形において

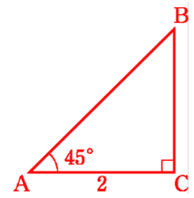
$BC = AC\tan A$

$= 5\tan 30°$

$= 5 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$



問7 ∠C = 90° の直角三角形 ABC において，AC = 2，$A = 45°$ のとき，BC を求めよ。

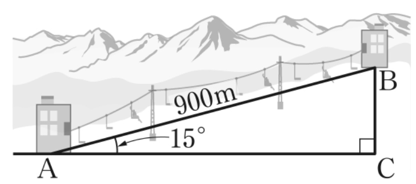


$BC = AC\tan 45°$

$= 2\tan 45°$

$= 2 \times 1 = 2$

例題 1 右の図のように，傾斜角が 15° で，2 地点 A，B 間の距離が 900m のリフトがある。A の標高が 600m であるとき，B の標高は何 m か。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。
ただし，$\sin 15° = 0.259$ とする。



解 標高が A と同じで B の真下の点を C とすると，直角三角形 ABC において，$A = 15°$ であるから

$BC = AB\sin 15°$ ←── $BC = AB\sin A$

$= 900 \times 0.259 = 233.1$

よって，B の標高は　$600 + 233.1 = 833.1 \fallingdotseq 833$（m）

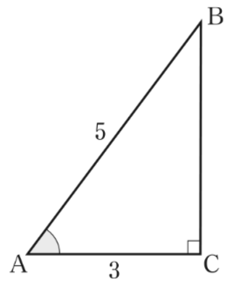
問8 例題 1 において，リフトの水平方向の距離は何 m か。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。
ただし，$\cos 15° = 0.966$ とする。

$AC = AB\cos 15°$

$= 900 \times 0.966$

$= 869.4 \fallingdotseq 869$ (m)

例6 右の図の直角三角形において，A を求めてみよう。



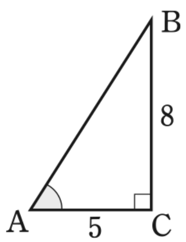
$\cos A = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{3}{5} = 0.6$

コサインがこの値に最も近い A を教科書195ページの三角比の表から求めると

$A \fallingdotseq 53°$

問9 教科書195ページの三角比の表を用いて，次の A を求めよ。

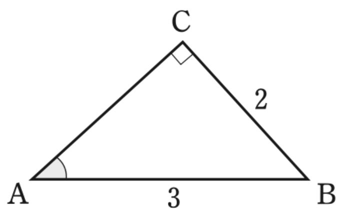
(1)



$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{8}{5} = 1.6$

三角比の表より　$A \fallingdotseq 58°$

(2)



$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{2}{3} = 0.6666\cdots$

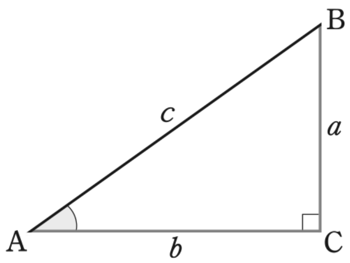
三角比の表より　$A \fallingdotseq 42°$

③ 三角比の相互関係

（教科書 p.130）

三角比 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の間に成り立つ関係を調べてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において



$$\sin A = \frac{a}{c},\quad \cos A = \frac{b}{c}$$

よって

$$a = c\sin A,\quad b = c\cos A$$

ここで

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

であるから

$$\tan A = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

また，直角三角形 ABC に三平方の定理を用いると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

であるから

$$(c\sin A)^2 + (c\cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

ふつう，$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$，$\cos^2 A$ と書く。

すなわち　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

以上より，三角比について次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係
$\boldsymbol{\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}}$ $\boldsymbol{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$

例題 2　A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

解　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

$\sin A > 0$ であるから

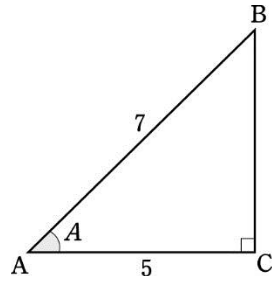
$$\sin A = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

また，$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \sin A \div \cos A$ より

$$\tan A = \frac{2\sqrt{6}}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

例題２は，直角三角形を利用して，次のように解いてもよい。

別解　$\cos A = \frac{5}{7}$ であるから，A は右の図の直角三角形 ABC の ∠A の大きさである。



三平方の定理により

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 7^2 - 5^2 = 24$

であるから，$\mathrm{BC} > 0$ より

$$\mathrm{BC} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

よって　$\sin A = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

$$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

問 10 A が鋭角で，$\sin A=\frac{1}{4}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ であるから

$\cos^2 A=1-\sin^2 A$

$=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$\cos A>0$ であるから

$\cos A=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\div\cos A=\frac{1}{4}\div\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

等式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1=\frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで，$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2$ であるから，次の公式が成り立つ。

$$\mathbf{1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}}$$

例題 3 A が鋭角で，$\tan A=2\sqrt{2}$ のとき，$\cos A$，$\sin A$の値を求めよ。

解 $1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$ より

$\frac{1}{\cos^2 A}=1+\tan^2 A$

$=1+\left(2\sqrt{2}\right)^2=1+8=9$

よって　$\cos^2 A=\frac{1}{9}$

$\cos A>0$ であるから

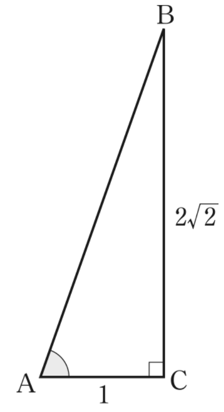
$\cos A=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

また，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ より

$\sin A=\tan A\cdot\cos A$

$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$



問 11 A が鋭角で，$\tan A=3$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

$1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$ より

$\frac{1}{\cos^2 A}=1+\tan^2 A=1+3^2=10$

よって　$\cos^2 A=\frac{1}{10}$

$\cos A>0$ であるから

$\cos A=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

また，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ より

$\sin A=\tan A\cdot\cos A$

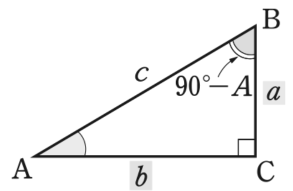
$=3\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

90°－Aの三角比

（教科書 p.133）

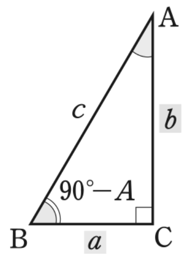
右上の図の直角三角形において，Aの三角比は

$\sin A = \frac{a}{c}$， $\cos A = \frac{b}{c}$， $\tan A = \frac{a}{b}$



また，右下の図をもとにBの三角比は

$\sin B = \frac{b}{c}$， $\cos B = \frac{a}{c}$， $\tan B = \frac{b}{a}$



ここで，$B = 90° - A$であるから，次の公式が成り立つことがわかる。

90° − Aの三角比
$\sin(90° - A) = \cos A$ $\cos(90° - A) = \sin A$ $\tan(90° - A) = \frac{1}{\tan A}$

上の公式を用いれば，鋭角の三角比はすべて 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例7

$\sin 63° = \sin(90° - 27°)$
$= \cos 27°$

$\cos 63° = \cos(90° - 27°)$
$= \sin 27°$

$\tan 63° = \tan(90° - 27°)$
$= \frac{1}{\tan 27°}$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

（1） $\sin 87°$

$\sin 87° = \sin(90° - 3°)$
$= \cos 3°$

（2） $\cos 56°$

$\cos 56° = \cos(90° - 34°)$
$= \sin 34°$

（3） $\tan 72°$

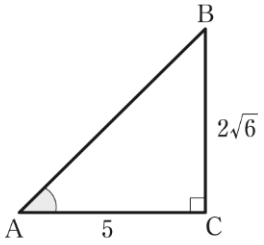
$\tan 72° = \tan(90° - 18°)$
$= \frac{1}{\tan 18°}$

Training

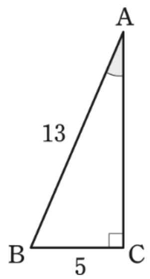
（教科書 p.134）

1 次の図で，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

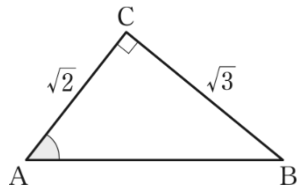
(1)



(2)



(3)



(1) $AB=\sqrt{5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{49}=7$ であるから

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{7}$

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

(2) $AC=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$ であるから

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$

(3) $AB=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}$ であるから

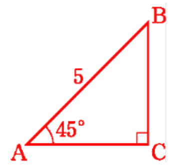
$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

2 $\triangle ABC$ において，次の値を求めよ。

(1) $AB=5$，$A=45°$，$C=90°$ のとき，AC，BC



$AC=AB\cos 45°$

$=5\cos 45°$

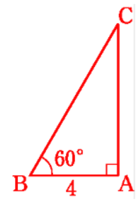
$=5\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$BC=AB\sin 45°$

$=5\sin 45°$

$=5\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) $AB=4$，$A=90°$，$B=60°$ のとき，AC，BC



$AC=AB\tan 60°$

$=4\tan 60°$

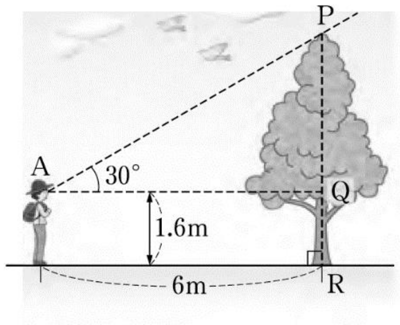
$=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$\cos 60°=\frac{AB}{BC}$ であるから

$BC=\frac{AB}{\cos 60°}=AB\div\cos 60°$

$=4\div\frac{1}{2}=8$

3 平地に立っている木の根元から 6m 離れた地点に立って，木の上端を見上げるときの仰角，すなわち，右の図の $\angle QAP$ は $30°$ であった。目の高さを 1.6m とすると，木の高さは何 m か。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。
ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とする。



目の高さから木の上端までの高さは

$PQ = AQ\tan 30° = 6\tan 30°$

$= 6\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

$= 2\times 1.73 = 3.46$

したがって，木の高さは

$1.6 + 3.46 = 5.06 \fallingdotseq 5.1\ (\mathrm{m})$

4 A が鋭角で，$\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = \frac{9}{10}$

$\cos A > 0$ であるから

$\cos A = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \sin A \div \cos A$

$= \frac{\sqrt{10}}{10} \div \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}$

$= \frac{1}{3}$

5 A が鋭角で，$\cos A = \frac{3}{8}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}$

$\sin A > 0$ であるから

$\sin A = \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \sin A \div \cos A$

$= \frac{\sqrt{55}}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{55}}{8}\times\frac{8}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

6 A が鋭角で，$\tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ より

$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

よって　$\cos^2 A = \frac{2}{3}$

$\cos A > 0$ であるから

$\cos A = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ より

$\sin A = \tan A \cdot \cos A$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7 次の三角比を $45°$ 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 62°$

$\sin 62° = \sin(90° - 28°)$

$= \cos 28°$

(2) $\cos 78°$

$\cos 78° = \cos(90° - 12°)$

$= \sin 12°$

(3) $\tan 80°$

$\tan 80° = \tan(90° - 10°)$

$= \frac{1}{\tan 10°}$