４節 空間図形

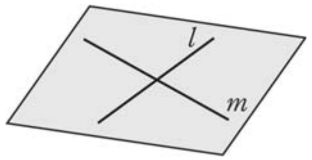
❶ 空間における直線と平面

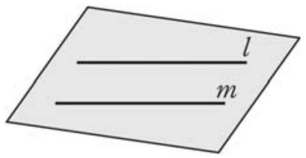
2直線の位置関係

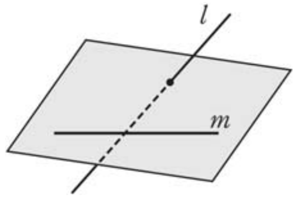
（教科書 p.143）

空間における 2 直線の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

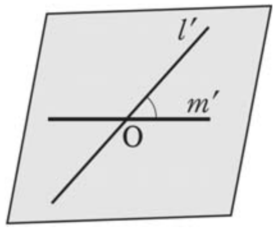
(1) （[1]　　　　　　）　(2) （[2]　　　　　　）　(3) （[3]　　　　　　）







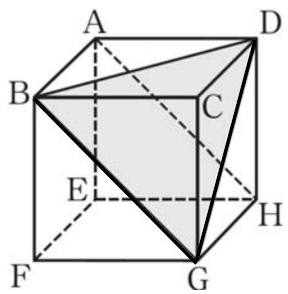
(3)の場合，右の図のように，1 点 O を通り l，m にそれぞれ平行な直線 l'，m' を引くと，l'，m' のなす角は，点 O のとり方に関係なく一定である。この角を，([4]　　　　　　)という。



(1)，(3)の場合において，とくに l，m のなす角が 90° であるとき，l と m は([5]　　　　)であるといい，([6]　　　　)と書く。垂直な 2 直線が交わるとき，それらは([7]　　　　)するという。

例1 右の図の立方体において，直線 BD と直線 AH のなす角を求めてみよう。

AH//BG であるから，BD と AH のなす角は，BD と BG のなす角に等しい。ここで，△ BGD は正三角形であるから，BD と BG のなす角は(　　　　)である。
したがって，求める角は(　　　　)である。



問1 例 1 の立方体において，次の 2 直線のなす角を求めよ。

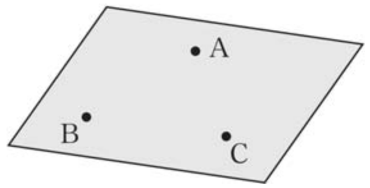
(1)　BC と GH　　(2)　AC と EF　　(3)　DG と FH

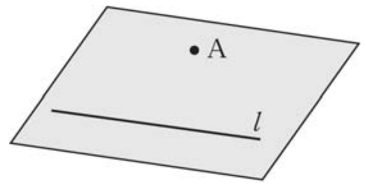
平面の決定

（教科書 p.144）

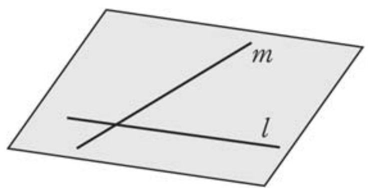
空間において，次の(1)～(4)のうちのいずれかが与えられると，下の図に示されているように，平面がただ 1 つ定まる。

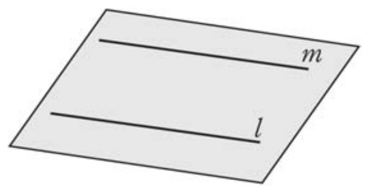
(1) ([8]　　　　　　)　(2) ([9]　　　　　　)





(3) ([10]　　　　　　)　(4) ([11]　　　　　　)



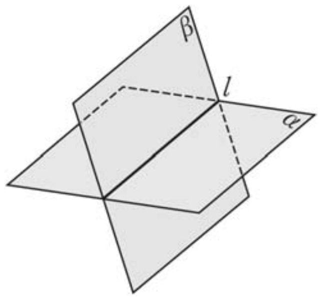


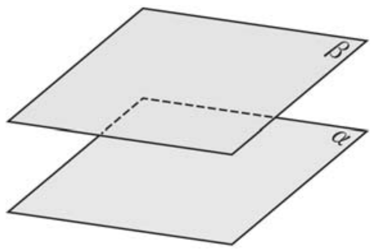
2平面の位置関係

（教科書 p.144）

空間における 2 平面の位置関係には，次の 2 つの場合がある。

(1) （[12]　　　　　　　　　）　　(2) （[13]　　　　　　　　　）





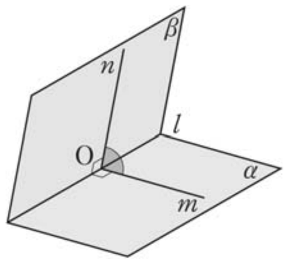
すなわち，異なる 2 平面 α，β が共有点をもつとき，この 2 平面はその点を通る 1 つの直線 l を共有する。このとき，2 平面は（[14]　　　　　　　）といい，その直線を（[15]　　　　　　）という。

これに対して，2 平面 α，β が共有点をもたないとき，この 2 平面は（[16]　　　　　　）であるといい，（[17]　　　　　　）と書く。

2平面のなす角

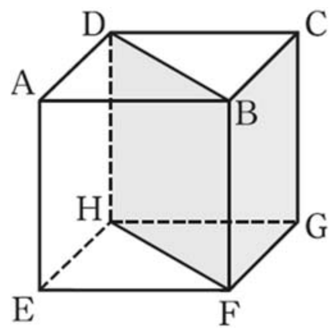
（教科書 p.145）

交わる 2 平面 α，β の交線 l 上の点Oから，交線 l に垂直な直線 m, n をそれぞれ α, β 上に引くと，m と n のなす角は，O のとり方に関係なく一定である。この角を（[18]　　　　　　）という。α，β のなす角が 90° であるとき，αと β は（[19]　　　　　）する，または（[20]　　　　　）であるといい，（[21]　　　　　）と書く。



例2 右の図の立方体において，平面 DBFH と平面 CBFG のなす角を求めてみよう。

平面 DBFH 上の直線 DB と平面 CBFG 上の直線 CB は，ともに 2 平面の交線 BF に垂直である。ここで，DB と CB のなす角は（　　　　　）であるから，平面 DBFH と平面 CBFG のなす角は（　　　　　）である。



問2 例２の立方体において，次の 2 平面のなす角を求めよ。

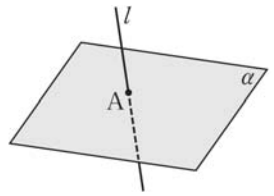
(1) AEGC と AEHD　　(2) ABCD と BFHD

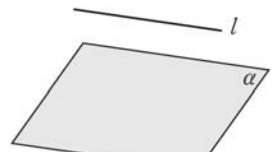
直線と平面の位置関係

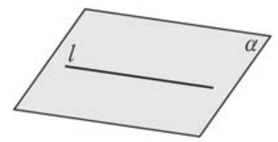
（教科書 p.145）

空間における直線と平面の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

(1)（[22]　　　　　　）　(2)（[23]　　　　　　）　(3)（[24]　　　　　　）







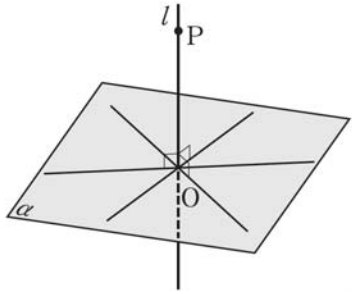
直線 l と平面 α がただ 1 つの点 A を共有するとき，l と α は（[25]　　　　　　）といい，その点 A を l と α の（[26]　　　　　）という。これに対して，l と α が共有点をもたないとき，l と α は（[27]　　　　　）であるといい，（[28]　　　　　）と書く。

また，l と α が異なる 2 点を共有するとき，l は α 上にある。

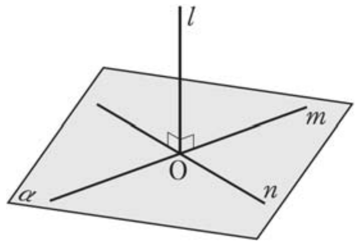
❷ 直線と平面の垂直

直線 l が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，l と α は（[1]　　　　　）する，または，（[2]　　　　　）であるといい，（[3]　　　　　）と書く。

また，平面 α 上にない点 P を通り，α に垂直な直線はただ 1 つある。このような直線を，P から α に下ろした（[4]　　　　　）という。



平面 α と交わる直線 l が，α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，直線 l は平面 α に垂直である。



例3 右の図の正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とする。このとき，平面 ABM と直線 CD が垂直であることを示してみよう。

△ACD は正三角形であるから

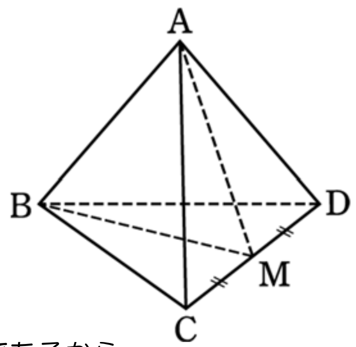
　$AM \perp CD$

△BCD は正三角形であるから

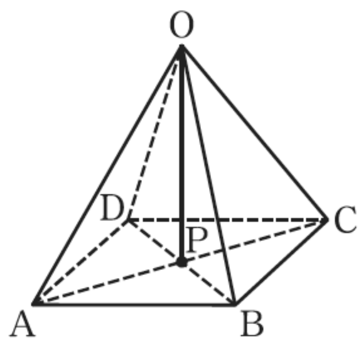
　$BM \perp CD$

よって，直線 CD は平面 ABM 上の交わる 2 直線 AM，BM に垂直であるから

　平面 $ABM \perp CD$



問3 右の図の正四角錐 $O-ABCD$ において，底面 ABCD の対角線の交点を P とする。このとき，平面 ABCD と直線 OP が垂直であることを示せ。



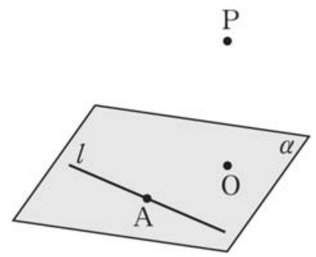
三垂線の定理

（教科書 p.147）

α を平面，P をこの平面上にない点とする。

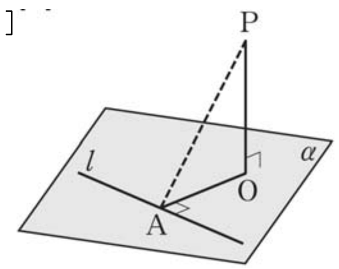
また，l を平面 α 上の直線，A を直線 l 上の点，O を平面 α 上にあって直線 l 上にはない点とする。

このとき，次のことが成り立つ。これらを（[5]　　　　　　　　）という。

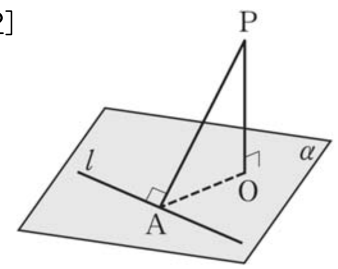


三垂線の定理
[1] $\boldsymbol{PO \perp \alpha,\ OA \perp l \Rightarrow PA \perp l}$
[2] $\boldsymbol{PO \perp \alpha,\ PA \perp l \Rightarrow OA \perp l}$
[3] $\boldsymbol{PA \perp l,\ OA \perp l,\ PO \perp AO \Rightarrow PO \perp \alpha}$

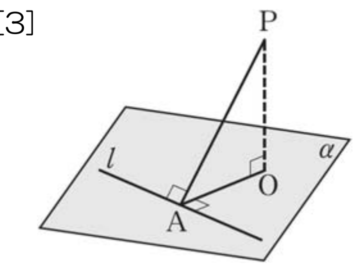
[1]



[2]



[3]



問4 上の[1]，[2]を証明せよ。

❸ 多面体の性質

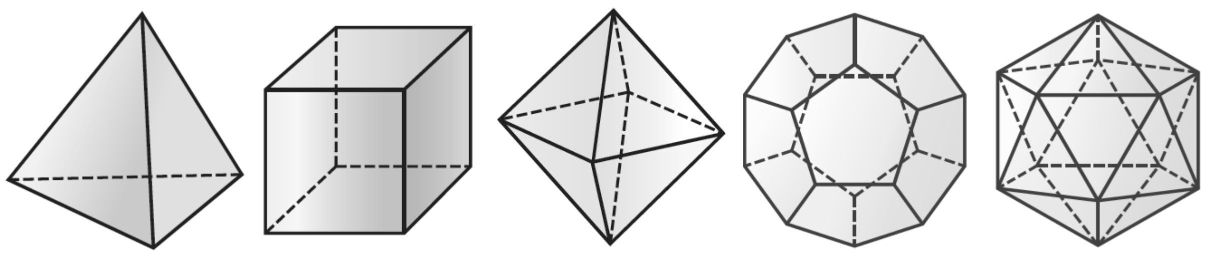
直方体や角錐のように，平面だけで囲まれた立体を（[1]　　　　　　）といい，へこみのない多面体を（[2]　　　　　　）という。

正多面体

（教科書p.148）

どの面も合同な正多角形であり，どの頂点にも同じ数の面が集まる凸多面体を（[3]　　　　　　）という。

正多面体には，次の 5 種類があることが知られている。



正四面体　正六面体（立方体）　正八面体　正十二面体　正二十面体

正十二面体の 1 つの頂点には，正五角形が 3 つ集まっている。1 つの面には頂点が 5 個あり，1 つの頂点を 3 つの面で共有しているから，頂点の個数は

$$5 \times 12 \div 3 = 20$$

また，1 つの面には辺が 5 本あり，1 つの辺を 2 つの面で共有しているから，辺の本数は

$$5 \times 12 \div 2 = 30$$

問5 正多面体の頂点や辺について，次の表を完成させよ。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5
頂点の数				20	
辺の数				30	

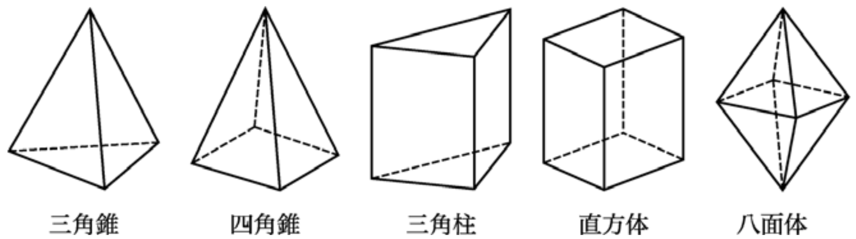
参考 オイラーの多面体定理

（教科書 p.149）

多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f として，いろいろな多面体について

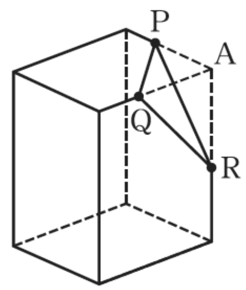
（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）

すなわち，$v-e+f$ の値を調べてみると，次の表のようになる。



多面体	三角錐	四角錐	三角柱	直方体	八面体
頂点の数（v）	4	5	6	8	6
辺の数（e）	6	8	9	12	12
面の数（f）	4	5	5	6	8
$v-e+f$	2	2	2	2	2

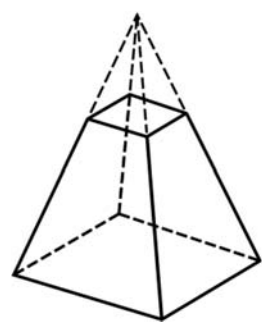
これらの多面体では，$v-e+f=2$ が成り立つ。



次に直方体の一部を右の図のように切り取ったとき，v，e，f の値は，どのように変化するか調べてみよう。

頂点は A がなくなって，新たに P，Q，R が増えるから，頂点の数 v は 2 増える。また，辺の数 e は，PQ，QR，RP の 3 増え，面の数 f は △PQR の 1 増える。よって，$2-3+1=0$ であり，$v-e+f$ の値は変化しない。

問1 四角錐の一部を右の図のように切り取ったとき，v，e，f の値はそれぞれどのように変化するかを調べよ。
また，$v-e+f$ の値は変化しないことを確かめよ。



どのような凸多面体でも

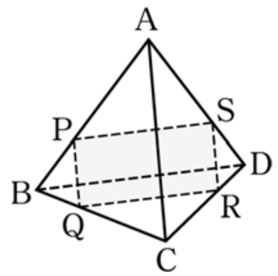
$$v-e+f=2$$

が成り立つことが知られている。これを**オイラーの多面体定理**という。

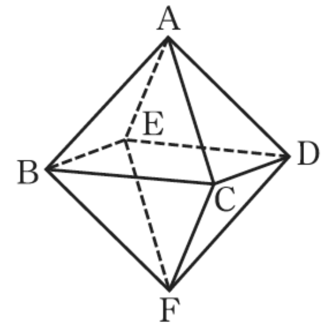
Training

（教科書p.151）

14 四面体 ABCD において，4 辺 AB，CB，CD，AD を 2 : 1 に内分する点を，それぞれ P，Q，R，S とするとき，四角形 PQRS は平行四辺形であることを証明せよ。



15 正八面体 ABCDEF において，次の 2 直線のなす角を求めよ。

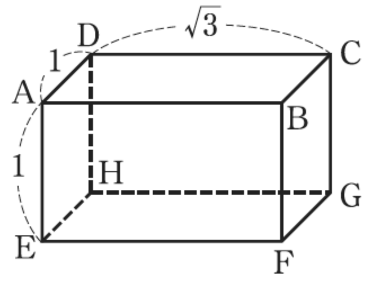


(1) AC と BF

(2) AD と BD

(3) AF と CD

16 右の図の直方体 ABCD − EFGH において，次の 2 面のなす角を求めよ。



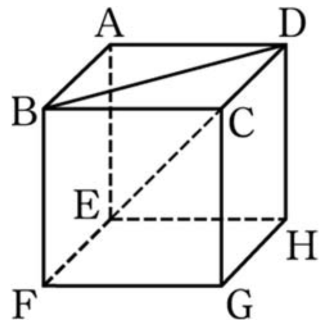
(1) 平面 DEFC と平面 HEFG

(2) 平面 BDHF と平面 CDHG

(3) 平面 DEFC と平面 AEHD

17 立方体 ABCD − EFGH において，次のことを証明せよ。

(1) 直線 BD と平面 AEGC が垂直である。



(2) CE ⊥ BD である。

18 正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とし，頂点 A から線分 BM に下ろした垂線を AH とする。このとき，AH ⊥平面 BCD となることを証明せよ。