

2節 円の性質

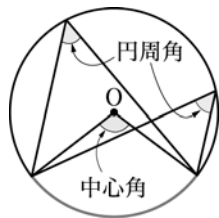
1 円周角の定理

(教科書 p.124)

中心角と円周角については、次の定理が成り立つ。

円周角の定理

定理 [1] 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。



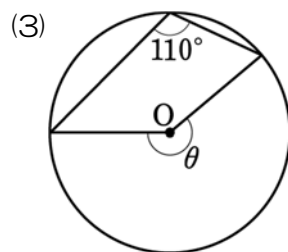
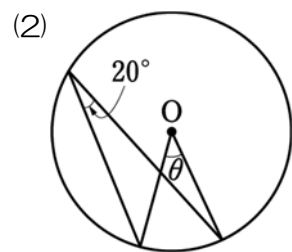
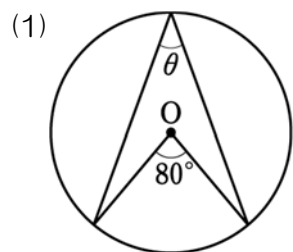
[2] 1つの円で、大きさが等しい円周角に対する弧の長さは等しい。



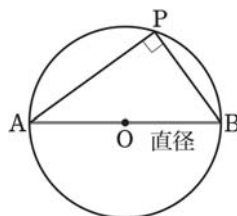
[3] 1つの円で、長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。

上の定理の[2], [3]は、半径の等しい2つの円についても成り立つ。

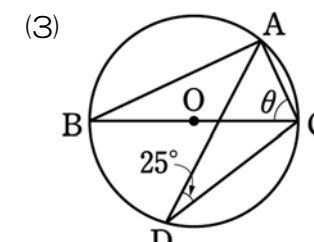
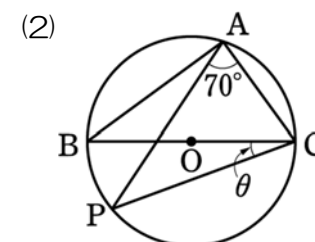
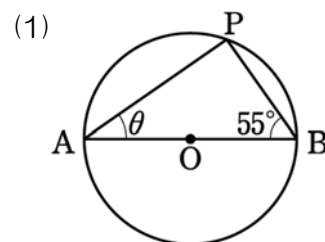
問1 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、 O は円の中心である。



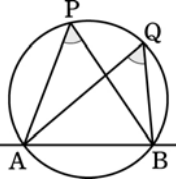
円 O において、直径 AB を引くと、弧 AB に対する中心角は 180° であるから、円周角の定理により、弧 AB に対する円周角は 90° となる。したがって、線分 AB を直径とする円周上に A, B とは異なる点 P をとると $\angle APB = 90^\circ$ である。



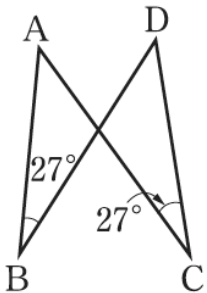
問2 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、 O は円の中心である。

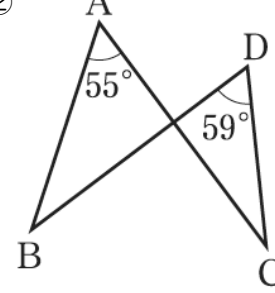


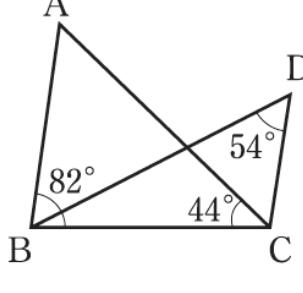
円周角の定理については、その逆が成り立つ。

円周角の定理の逆	
<p>定理 4点A, B, P, Qについて, P, Qが 直線ABに関して同じ側にあつて $\angle APB = \angle AQB$ ならば, この4点は同一円周上にある。</p>	

問3 次のうち, 4点A, B, C, Dが同一円周上にあるものはどれか。

① 

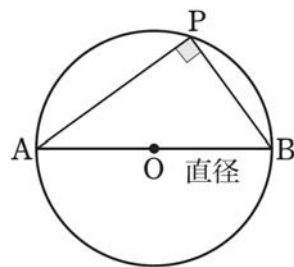
② 

③ 

2点A, Bに対し

$$\angle APB = 90^\circ$$

となる点Pは, ABを直径とする円周上にある。

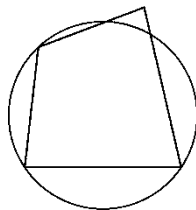


2 円に内接する四角形

四角形の4つの頂点が1つの円周上にあるとき、その四角形は円に
() という。

三角形は必ず円に内接するが、四角形は円に内接するとはかぎらない。
円に内接する四角形の性質について考えてみよう。

(教科書 p.126)



円に内接する四角形

定理 円に内接する四角形では、次の[1],

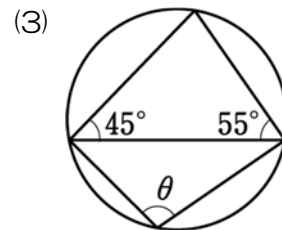
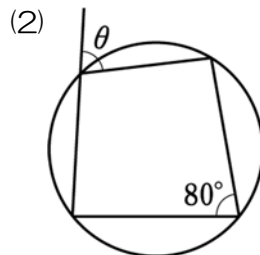
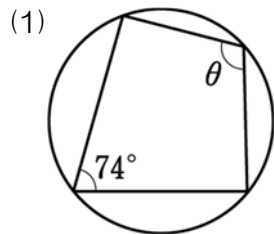
[2] が成り立つ。

[1] 対角の和は 180° である。

[2] 外角は、それと隣り合う内角の対角
に等しい。



問4 下の図で、角 θ を求めよ。



円に内接する四角形の定理は、その逆も成り立つ。

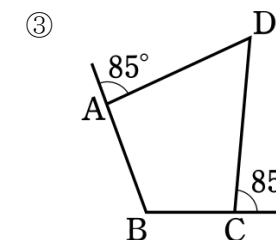
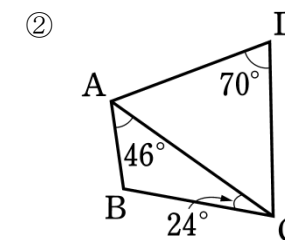
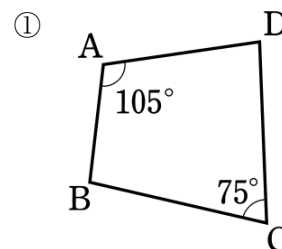
四角形が円に内接する条件

定理 次の[1], [2]のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

[1] 1組の対角の和が 180° である。

[2] 1つの外角が、それと隣り合う内角の対角に等しい。

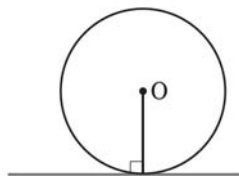
問5 次の四角形 ABCD のうち、円に内接するものはどれか。



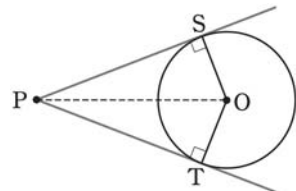
3 円と接線

(教科書 p.128)

直線と円がただ1点を共有するとき、この直線は円に
 (1) 接線 といひ、この直線を円の (2) 接線、その
 共有点を (3) 接点 といふ。このとき、円の接線は、接点を通
 る半径に垂直である。

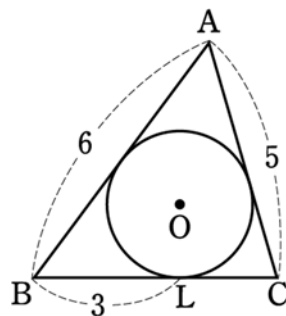


接線の長さ
定理 円の外部の1点からその円に引いた2本の接線において、その点から2つの接点までの距離は等しい。



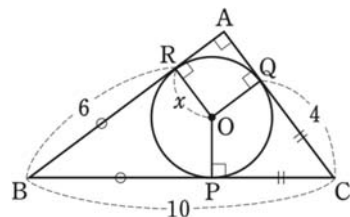
円外の点から接点までの距離を (4) 接線の長さ といふ。
 円の2本の接線がつくる角の二等分線上に、その円の中心がある。

問6 右の図で、円Oは△ABCの内接円で、Lは接点である。AB = 6, AC = 5, BL = 3 のとき、BC の長さを求めよ。



例題 1 右の図で、円 O は直角三角形 ABC の内接円で、 P, Q, R は接点である。 $BP = 6, CP = 4$ のとき、円 O の半径を求めよ。

解 四角形 $AROQ$ は正方形であるから、円 O の半径を x とおくと



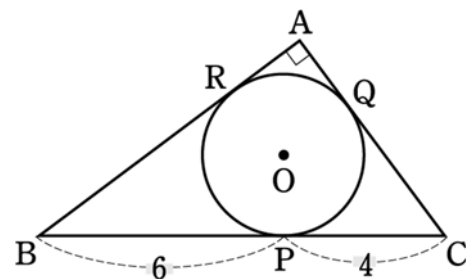
$$AR = AQ = x$$

一方

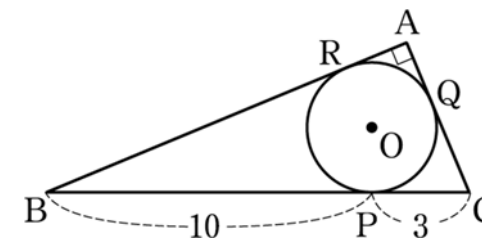
$$BR = BP = 6$$

$$CQ = CP = 4$$

であるから、 $\triangle ABC$ に三平方の定理を用いて



問7 右の図で、円 O は直角三角形 ABC の内接円で、 P, Q, R は接点である。 $BP = 10, CP = 3$ のとき、円 O の半径と AB, AC の長さをそれぞれ求めよ。



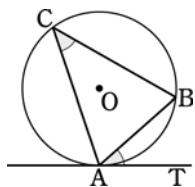
4 接線と弦のつくる角

(教科書 p.130)

円の接線と接点を通る弦のつくる角について、次の定理が成り立つ。

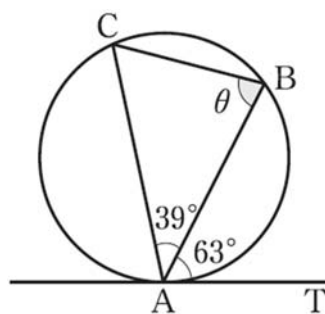
接線と弦のつくる角

定理 円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

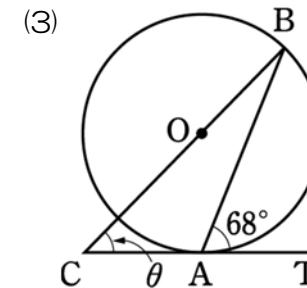
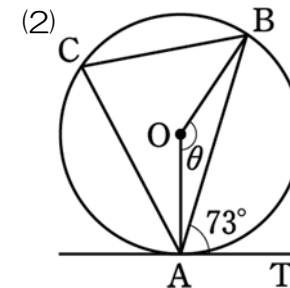
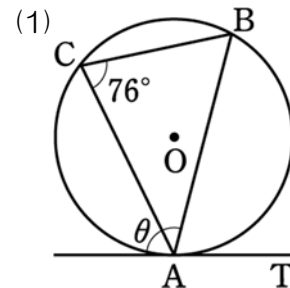


例1 右の図で、直線 AT が点 A で円に接しているとき、角 θ を求めよう。

接線と弦のつくる角の定理により、

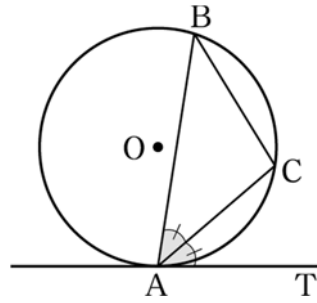


問8 下の図で、AT は円 O の接線、A は接点である。角 θ を求めよ。

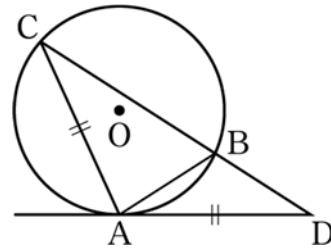


例題 右の図で、ATは円Oの接線、Aは接点である。弦ACが $\angle BAT$ を2等分するとき、 $\triangle ABC$ は
2 二等辺三角形であることを証明せよ。

解



問9 右の図で、ADは円Oの接線、Aは接点である。AC = ADであるとき、BA = BDであることを証明せよ。



5 方べきの定理

(教科書 p.132)

点Pを通る2直線と円Oとの4つの交点が与えられたとき、Pとこれらの点の間の距離には次の(1)が成り立つ。

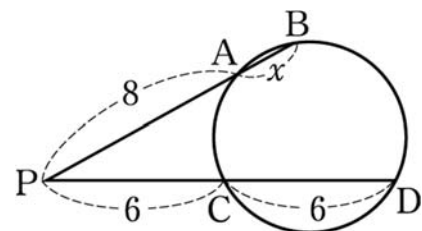
方べきの定理(1)

定理 点Pを通る2直線が、円Oとそれぞれ2点A, Bと2点C, Dで交わるとき

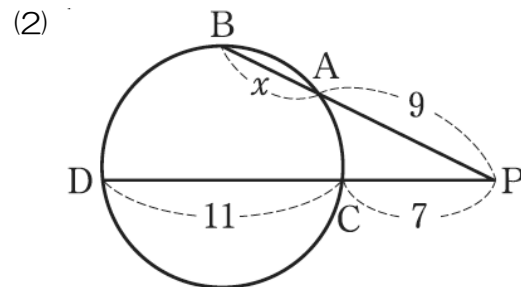
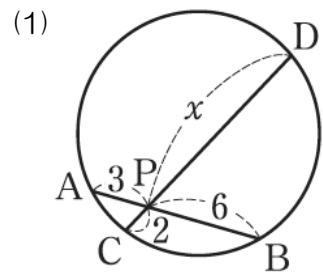
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

例2 右の図で、 x を求めてみよう。

方べきの定理により



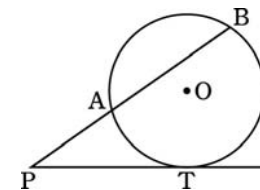
問10 下の図で、 x を求めよ。



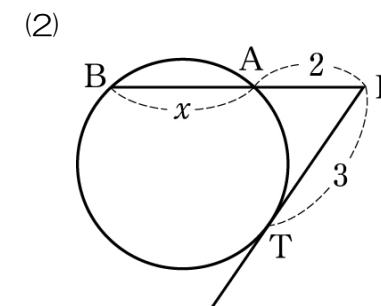
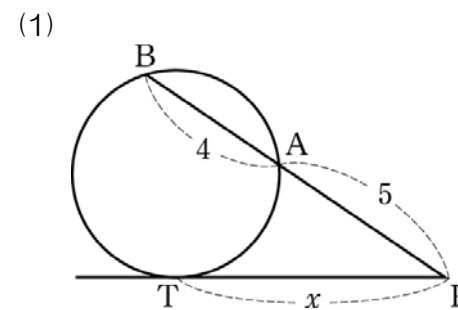
方べきの定理(2)

定理 点Pを通る2直線の一方が円Oと2点A, Bで交わり、もう一方が点Tで接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



問11 下の図で、PTは接線、Tは接点である。 x を求めよ。



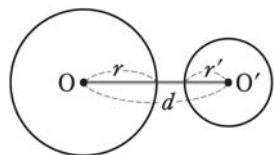
6 2つの円

(教科書 p.134)

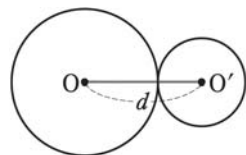
半径の異なる2つの円の位置関係については、下の図のように5通りの場合が考えられる。

(2)のような場合には2つの円は(1))といい、(4)のような場合には(2))という。いずれの場合も2つの円は1点を共有しており、その点を(3))という。

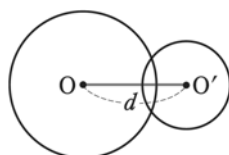
(1) 互いに外部にある



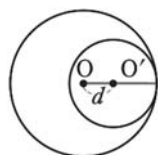
(2) (1))



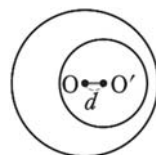
(3) 2点で交わる



(4) (2))



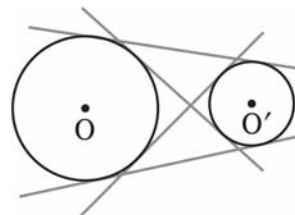
(5) 一方が他方を含む



2つの円の位置関係は、それらの円の半径 r , r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし、 $r > r'$ とする。

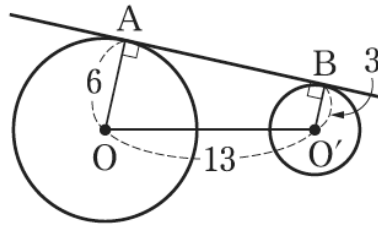
(1)	$d > r + r'$	互いに外部にある
(2)	$d = r + r'$	外接する
(3)	$r - r' < d < r + r'$	2点で交わる
(4)	$r - r' = d$	内接する
(5)	$r - r' > d$	一方が他方を含む

また、右の図のように1本の直線が2つの円の接線となることがある。このような接線を、2円の(4))という。

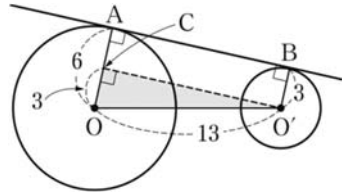


問12 共通接線の本数は、上の5つの位置関係でどのように変わるか。

例題 3 右の図で、直線 AB は2つの円 O, O' の共通接線、 A, B は接点である。円 O, O' の半径はそれぞれ $6, 3$ で、中心間の距離 OO' は 13 である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。



解

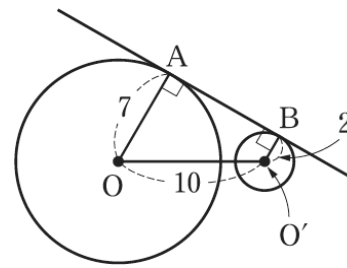


図のように、点 O' から線分 AO に垂線 $O'C$ を下ろす。

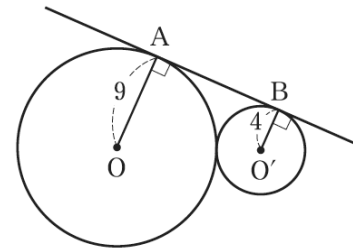
四角形 $ACO'B$ は長方形となるから

問 13 下の図で、直線 AB は2つの円 O, O' の共通接線、 A, B は接点である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)

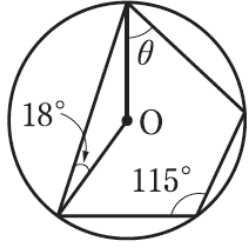


円 O と円 O' は外接する

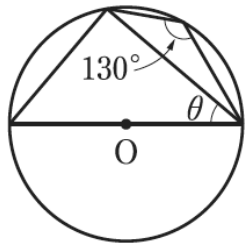
(教科書 p.136)

6 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、 O は円の中心である。

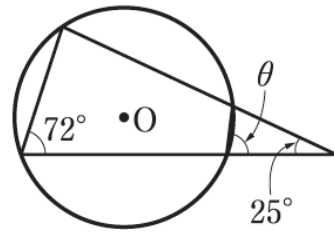
(1)



(2)

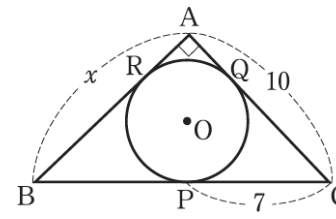


(3)

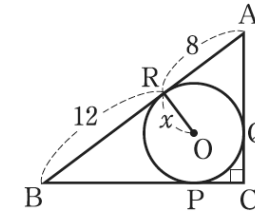


7 下の図で、円 O は直角三角形 ABC の内接円で、 P, Q, R は接点である。 x を求めよ。

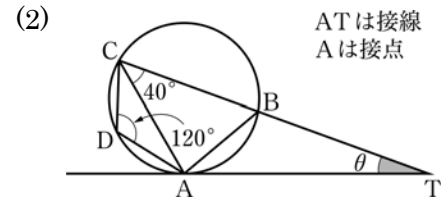
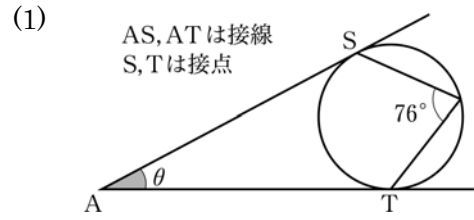
(1)



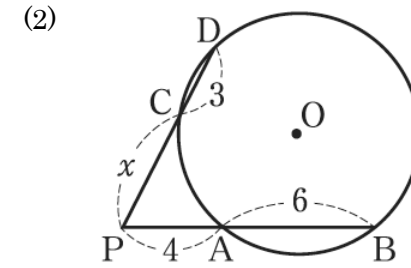
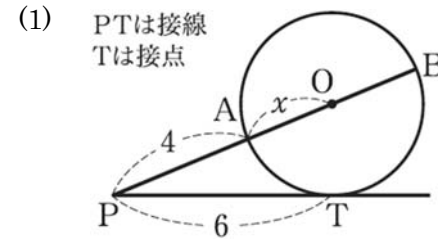
(2)



8 下の図で、角 θ を求めよ。



9 下の図で、 x を求めよ。ただし、 O は円の中心である。



10 右の図で、直線 AB は2つの円 O, O' の共通接線、 A, B は接点である。円 O, O' の半径がそれぞれ $6, 3$ で、中心間の距離 OO' が 13 である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。

