１節 三角形と比

❶ 三角形と比

（教科書 p.108）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

三角形と比

定理　$\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 AB，AC またはそれらの延長上に，それぞれ点 D，E があるとき

［1］ DE//BC ならば

$\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC}$

$=\mathrm{DE}:\mathrm{BC}$

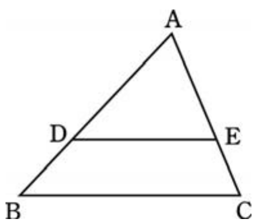
$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$

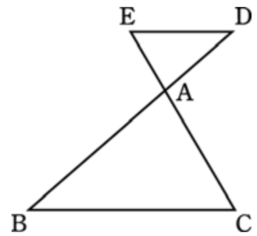
［2］ $\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC}$ ならば

DE//BC

［3］ $\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$ ならば

DE//BC





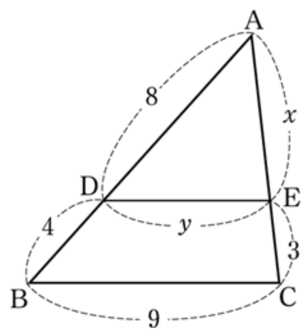
例1 右の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めてみよう。

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$

であるから

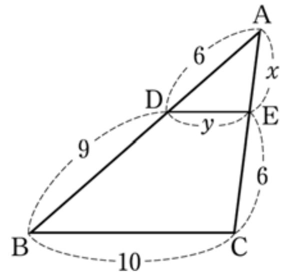
$\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=\mathrm{DE}:\mathrm{BC}$

であるから

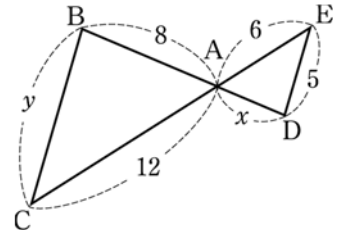


問1 下の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めよ。

(1)

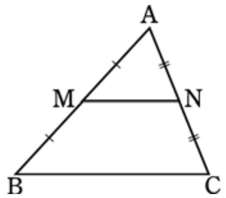


(2)

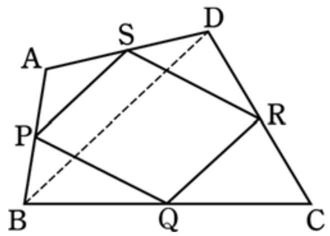


とくに, D と E がそれぞれ辺 AB, AC の中点になっているときには, 次の([1]　　　　　　　　　　)
が成り立つ。

中点連結定理
定理　△ABC の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とするとき MN//BC $\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$



問2 右の図で, 四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。このとき, 次の問に答えよ。



(1) 四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

(2) AC = BD のとき, 四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

内分と外分

(教科書 p.110)

線分 AB 上に点 P があり

AP : PB = $m : n$

であるとき,

P は AB を $m : n$ に ([2]　　　　　　　　　) という。

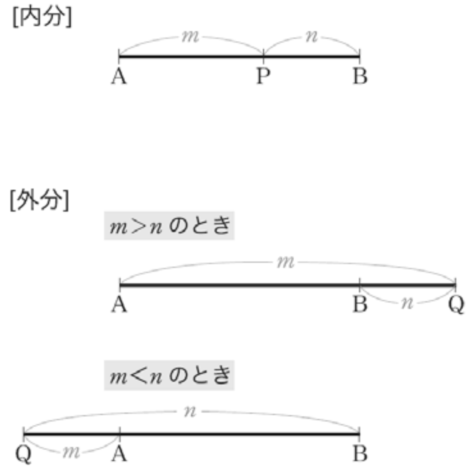
また, 線分 AB の延長上に点 Q があり

AQ : QB = $m : n$

であるとき,

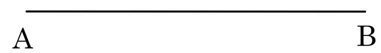
Q は AB を $m : n$ に ([3]　　　　　　　　　) という。

※線分を 1 : 1 に外分する点はない。

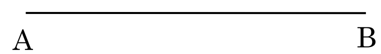


例2 線分 AB に対して, 次のように内分する点, 外分する点を図示してみよう。

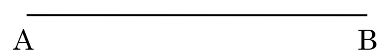
(1)　AB を 2 : 3 に内分する点 P



(2)　AB を 3 : 1 に外分する点 Q

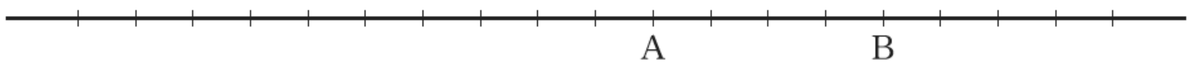


(3)　AB を 1 : 4 に外分する点 R

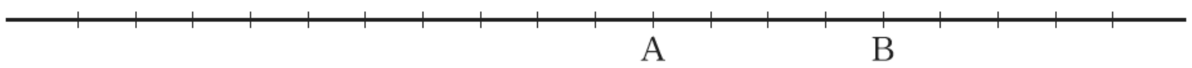


問3 次の点を下記の図に図示せよ。

(1) 線分 AB を $3:1$ に内分する点 P



(2) 線分 AB を $5:1$ に外分する点 Q



(3) 線分 AB を $2:3$ に外分する点 R

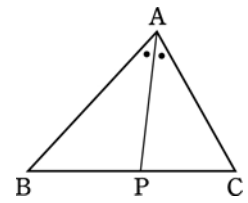
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.111）

内角の二等分線と比

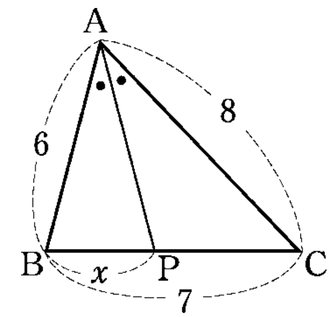
定理 $\triangle$ ABC の $\angle$A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。すなわち

$$BP : PC = AB : AC$$

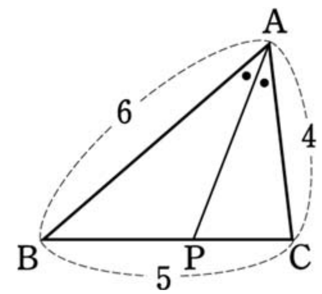


例3 右の図で，AP が $\triangle$ ABC の $\angle$A の二等分線であるとき，x を求めてみよう。

BP : PC = AB : AC であるから

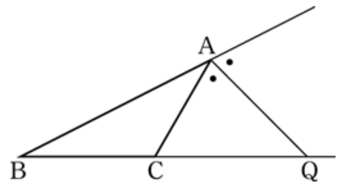


問4 $\triangle$ ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき，BP，PC の長さをそれぞれ求めよ。

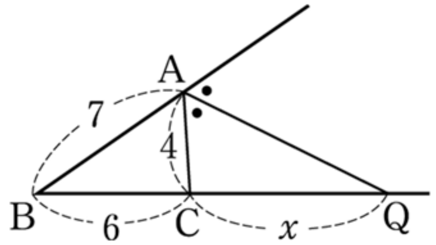


外角の二等分線と比

定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB : AC に外分する。
すなわち
BQ : QC = AB : AC

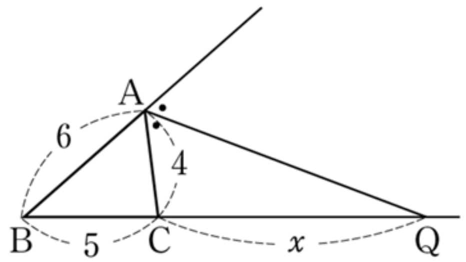


例4 右の図で，AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるとき，x を求めてみよう。
BQ : QC = AB : AC であるから



よって

問5 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



❷ 三角形の重心・外心・内心

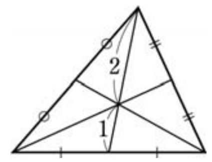
三角形の重心

（教科書 p.113）

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1]　　　　　　　　）という。

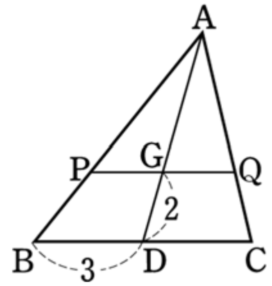
三角形の重心

定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。
その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に
内分する。



三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2]　　　　　　　　）という。

問6 右の図で，点 G は △ ABC の重心で，線分 PQ は G を通って辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2 のとき，AG，PQ の長さを求めよ。

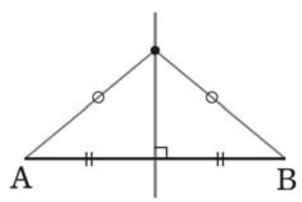


三角形の外心

（教科書 p.114）

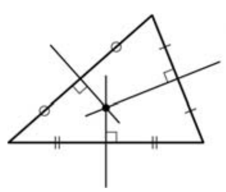
線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。また，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことから，次の定理が成り立つ。

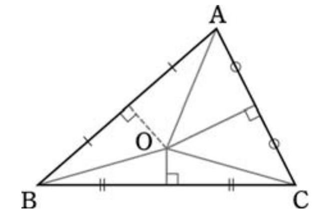


三角形の外心

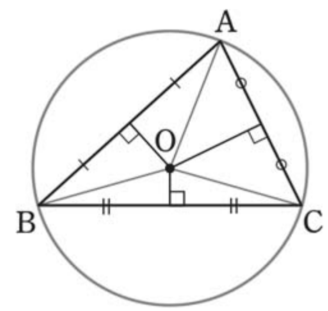
定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で
交わる。



証明　△ ABC において，2 辺 BC，CA の
垂直二等分線の交点を O とすると
OB = OC　かつ　OC = OA
であるから
OB = OA
よって，O は辺 AB の垂直二等分
線上にある。
すなわち，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。

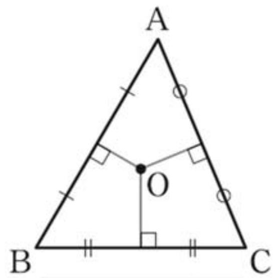


上の証明より，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3]　　　　　　　　）といい，中心 O を三角形の（[4]　　　　　　）という。



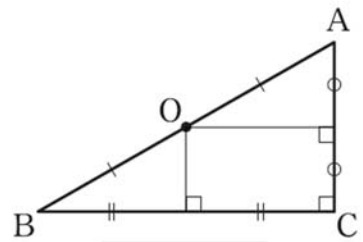
鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の外心 O の位置は，それぞれ下の図のようになる。

鋭角三角形



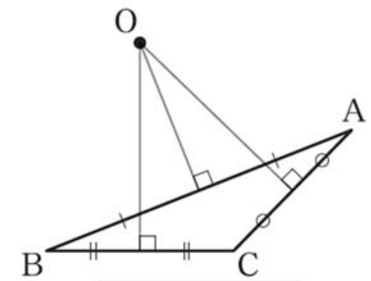
△ABCの内部

直角三角形



斜辺の中点

鈍角三角形



△ABCの外部

例5 右の図で，点 O が △ ABC の外心であり，∠OAB = 25°，∠OCA = 36° のとき，角 θ を求めよ。

点 O は△ ABC の外心であるから

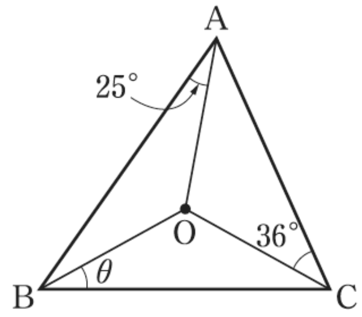
OA = OB = OC より

△ OAB，△ OBC，△ OCA は二等辺三角形である。

よって　∠OBA =

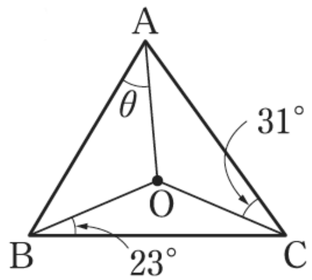
∠OAC =

∠OCB =

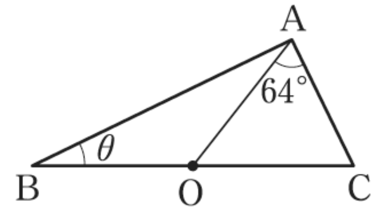


問7 下の図で，点 O が △ ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

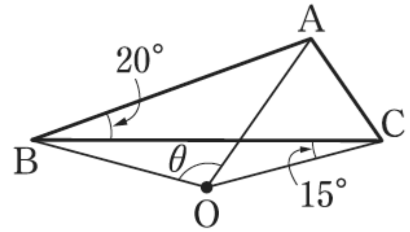
(1)



(2)



(3)

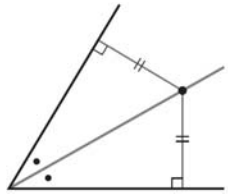


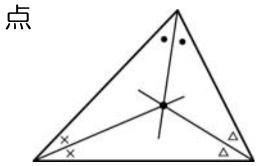
三角形の内心

（教科書 p.116）

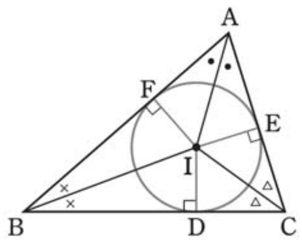
角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある。また，2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。

このことから，次の定理が成り立つ。

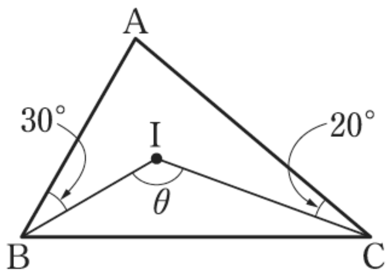


三角形の内心
定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。 

右の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は 3 点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接しているので，三角形の（5　　　　　　）といい，中心 I を三角形の（6　　　　　）という。



例6 右の図で，点 I が △ABC の内心であり，∠IBA = 30°，∠ICA = 20° のとき，角 θ を求めよ。



点 I は △ABC の内心であるから

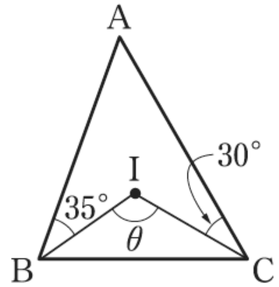
∠IBC =

∠ICB =

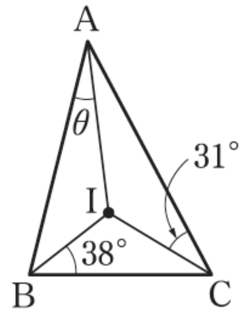
よって △IBC において

問8 下の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

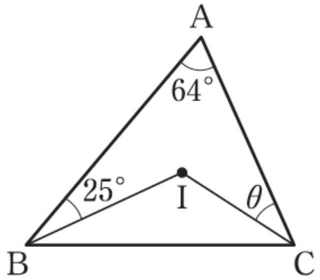
(1)



(2)



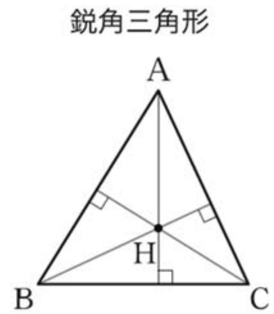
(3)

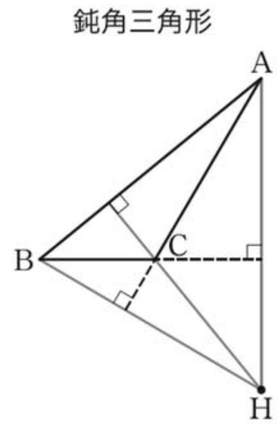


参考 三角形の垂心

（教科書 p.117）

△ABC の 3 つの頂点から対辺，またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は，1 点 H で交わる。この点 H を三角形の（[1]　　　　　　）という。





問1 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

③ 三角形の比の定理

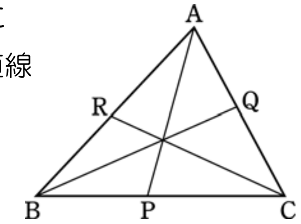
チェバの定理

（教科書 p.118）

チェバの定理

定理　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



例7 右の図で

AQ : QC = 1 : 3

AR : RB = 2 : 3

であるとき，BP : PC を求めてみよう。

チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \cdots\cdots①$$

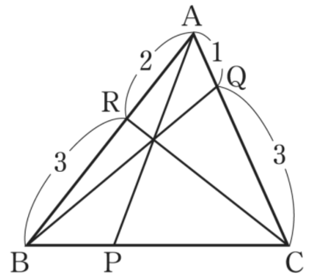
ここで

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{1} \quad \cdots\cdots②$$

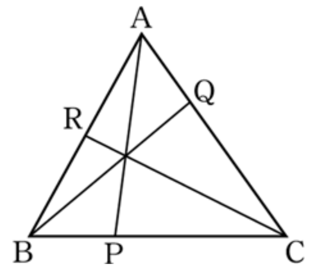
$$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots③$$

であるから，②，③を①に代入して

よって



問9 右の図で，点 Q，R がそれぞれ辺 AC，AB を次の比に内分するとき，BP : PC を求めよ。



(1)　AQ : QC = 2 : 3，AR : RB = 2 : 1

(2)　AQ : QC = 3 : 1，AR : RB = 3 : 1

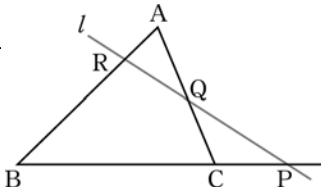
メネラウスの定理

(教科書p.120)

メネラウスの定理

定理 直線 l が△ABC の辺 BC, CA, AB, またはその延長と, それぞれ点 P, Q, R で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



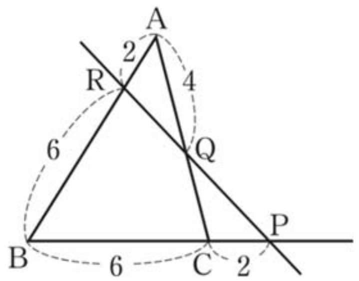
例8 右の図で, CQ の長さを求めてみよう。

メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

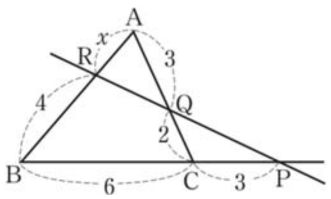
であるから

よって

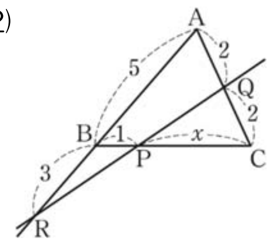


問 10 下の図で, x を求めよ。

(1)



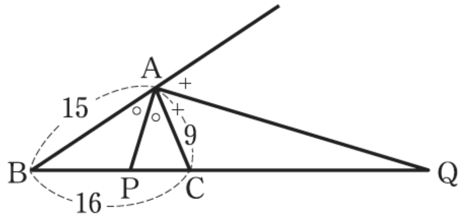
(2)



（教科書 p.121）

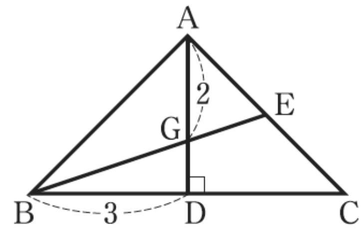
1 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 15，16，9とする。頂点 A における内角の二等分線と辺 BC との交点を P，外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき，次の長さを求めよ。

(1) BP　　(2) BQ



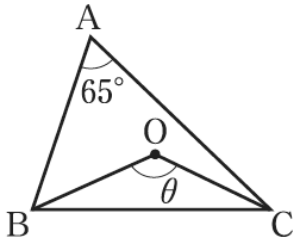
2 右の図で，点 G は △ABC の重心で，AG = 2，BD = 3，∠ADC = 90° である。次の長さを求めよ。

(1) AE　　(2) GE

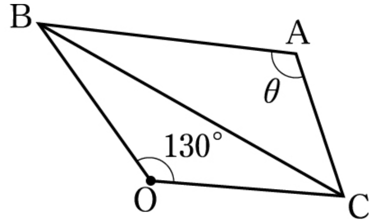


3 下の図で，点 O が △ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)

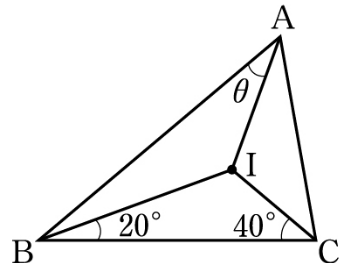


(2)

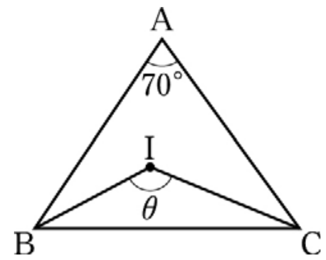


4 下の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



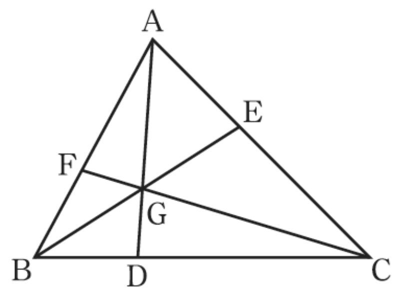
5 右の図において

$AF : FB = 3 : 2$，$AE : EC = 2 : 3$

であるとき，次の比を求めよ。

(1) $BD : DC$

(2) $AG : GD$



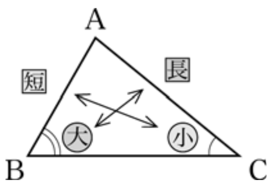
参考 辺と角の大小関係

（教科書 p.122）

一般に，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理 三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



このことを用いると，三角形の 3 辺の長さについて，以下の関係が成り立つことが示される。

三角形の 3 辺の長さの関係

定理 三角形において，2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

問1 2 辺の長さの和と他の 1 辺の長さを比較することにより，3 辺の長さが次のような △ABC が存在するかどうか調べよ。

$AB = 6$，$BC = 2$，$CA = 3$