練習問題Ａ

（教科書 p.94）

1 $\sqrt{648n} \div \sqrt{15}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

2 30! について，次の問に答えよ。

ただし，　$30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ である。

(1) 30! は 2 で何回割り切れるか。

(2) 30! は一の位から続けていくつの 0 が並ぶか。

3 $\frac{24}{245}$ と $\frac{54}{175}$ に同じ有理数 a を掛けると，どちらも正の整数となる。

このような有理数 a のうち，最小のものを求めよ。

4 縦の長さが 42cm，横の長さが 70cm，高さが 30cm の直方体のブロックがたくさんある。このブロックを同じ向きに並べたり積み上げたりして，立方体をつくる。立方体の 1 辺の長さができるだけ短くなるようにするとき，1 辺の長さを求めよ。また，このとき，ブロックは何個必要か。

5 $a^2 - b^2 = 24$ を満たす正の整数 a，b の組をすべて求めよ。

6 次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

（1）$113x + 41y = 1$

（2）$113x+41y=3$

7 3^{30}の一の位の数字を求めよ。

8 次の計算をせよ。

（1）$334_{(5)}+43_{(5)}$

（2）$1111_{(7)}-345_{(7)}$

（3）$201_{(3)}\times 12_{(3)}$

（4）$1230_{(4)}\div 21_{(4)}$

練習問題B

（教科書 p.95）

9 $\sqrt{n^2+48}$ が整数となるような正の整数 n をすべて求めよ。

10 2 つの正の整数 a と b が互いに素であるならば，$a+b$ と ab も互いに素であることを背理法を用いて証明せよ。

11 和が 1092，最小公倍数が 3528 であるような 2 つの正の整数の組を求めよ。

12 12で割ると 7 余り，15 で割ると 4 余り，18 で割ると 13 余るような正の整数のうち，最小のものを求めよ。

13 7 進法で表すと 3 桁の数 $\mathrm{abc}_{(7)}$ となる整数 N を，11 進法で表すと 3 桁の数 $\mathrm{cba}_{(11)}$ となった。この整数 N を 10 進法で表せ。

COLUMN　完全数と友愛数　（教科書 p.95）

完全数とは，その数自身を除いた約数の和が，その数自身と等しくなる自然数のことです。たとえば，$6 = 1 + 2 + 3$ と $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ は完全数です。完全数は小さい順に 6, 28, 496, 8128, 33550336，…と続き，2015 年 3 月現在，48 個の完全数が発見されています。

友愛数とは，2 つの自然数のうち一方のその数自身を除いた約数の和が，他方の数自身と等しくなる数のことです。たとえば，220 と 284 の 2 つの自然数について，220 のその数自身を除いた約数は 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110 で，和は 284 となり，284 のその数自身を除いた約数は 1，2，4，71，142 で，和は 220 となるから，220 と 284 は友愛数です。

発展　合同式

（教科書 p.96）

m は正の整数とする。2 つの整数 a，b に対して，$a-b$ が m で割り切れるとき，a と b は（　　　　　　　　　　）であるといい，（　　　　　　　　　　），または，（　　　　　　　　　　）と表す。この式を（　　　　　　）という。これは，a を m で割ったときの余りと，b を m で割ったときの余りが等しいことと同値である。

例 1 (1) 15 と 7 は，$15-7=8$ が 4 で割り切れるから

(2) 3 と -1 は，$3-(-1)=4$ が 4 で割り切れるから

問1 次の$\boxed{}$の中に 0，1，2，3，4 の中から適する値を選べ。

(1) $16 \equiv \boxed{} \pmod 5$　　(2) $28 \equiv \boxed{} \pmod 5$

(3) $39 \equiv \boxed{} \pmod 5$　　(4) $47 \equiv \boxed{} \pmod 5$

3 つの整数 a，b，c と正の整数 m に対して，次のことが成り立つ。

$$a \equiv b \pmod m,\ b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$$

合同式については，次のような性質が成り立つ。

合同式の性質
$a \equiv b \pmod m$，$c \equiv d \pmod m$ のとき $\boxed{1}$ $a+c \equiv b+d \pmod m$，　$a-c \equiv b-d \pmod m$ $\boxed{2}$ $ac \equiv bd \pmod m$ $\boxed{3}$ $a^n \equiv b^n \pmod m$　　ただし，n は正の整数

問2 5 を法として合同な 2 つの整数の組の例を 2 組あげ，公式の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$が成り立つことを確かめよ。

例題 1 2^{30} を 9 で割ったときの余りを求めよ。

解 $2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$ であるから

問3 17^{10} を 5 で割ったときの余りを求めよ。

例題 2 任意の整数の3乗は，7を法として 0，1，-1 のいずれかに合同であることを証明せよ。

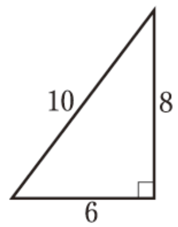
解 a を整数とする。a を 7 で割ったときの余りは 0 から 6 までのいずれかになるが，
$6 \equiv -1 \pmod 7$，$5 \equiv -2 \pmod 7$，$4 \equiv -3 \pmod 7$ より，7を法として a は $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$
のいずれかに合同である。
ここで，7 を法として
$a \equiv 0$ のとき
$a \equiv 1$ のとき　　　　$a \equiv -1$ のとき
$a \equiv 2$ のとき　　　　$a \equiv -2$ のとき
$a \equiv 3$ のとき　　　　，　　　　$a \equiv -3$ のとき
よって，a^3 は 7 を法として　　　　のいずれかに合同である。

問4 次の命題を証明せよ。
(1) a を整数とするとき，a^2 は 3 を法として 0 または 1 に合同である。

(2) 整数 a，b，c が等式 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき，a，b のいずれか一方は 3 の倍数である。

COLUMN　周の長さと面積の値が等しい三角形　（教科書 p.98）

右の図のような 3 辺の長さが 6，8，10 の直角三角形があります。この三角形の周の長さは 24 で，面積も 24 です。



このように，3 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい直角三角形は他にも存在するか調べてみよう。

直角をはさむ 2 辺の長さを x，y（$1 \leqq x \leqq y$ で，x，y は整数）とします。

このとき

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy \quad \cdots\cdots①$$

課題 1 ①はどのような関係を表しているか説明してみよう。

①を整理すると　$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy - (x + y)$

両辺を 2 乗すると　$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 - xy(x + y) + (x + y)^2$

整理すると　$xy\{xy - 4(x + y) + 8\} = 0$

$x \neq 0$，$y \neq 0$ より　$xy \neq 0$

よって

$$xy - 4(x + y) + 8 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

課題 2 ②を解いて，わかることを説明してみよう。

課題 3 4 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい長方形は存在するか調べてみよう。

3 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい直角三角形以外の三角形は存在するか調べてみよう。

練習問題Ａ

（教科書 p.94）

1 $\sqrt{648n} \div \sqrt{15}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

$\sqrt{648n} \div \sqrt{15} = \sqrt{2^3 \cdot 3^4 n} \div \sqrt{3 \cdot 5}$

$= \sqrt{\frac{2^3 \cdot 3^3 n}{5}} = 2 \cdot 3\sqrt{\frac{2 \cdot 3n}{5}}$

ゆえに，条件を満たす最小の正の整数nは

$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

2 30! について，次の問に答えよ。
ただし， $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ である。

（1）30! は 2 で何回割り切れるか。

1 から 30 までの整数のうち，

2 の倍数は	$30 = 2 \times 15$	より	15 個
4 の倍数は	$30 = 4 \times 7 + 2$	より	7 個
8 の倍数は	$30 = 8 \times 3 + 6$	より	3 個
16 の倍数は	$30 = 16 \times 1 + 14$	より	1 個

$15 + 7 + 3 + 1 = 26$ であるから，30! は，2 で 26 回割り切れる。

（2）30! は一の位から続けていくつの 0 が並ぶか。

求める 0 の個数は，30! に含まれる因数 10 の個数である。因数 10 は $10 = 2 \cdot 5$ と素因数分解される。
よって, 1, 2, 3, ⋯, 30 に含まれる因数 2 の個数が因数 5 の個数より多いから, 因数 5 の個数を調べればよい。
1，2，3，⋯，30 に含まれる

5 の倍数は，$30 = 5 \cdot 6$ より　6 個

25 の倍数は，$30 = 25 \cdot 1 + 5$ より　1 個

したがって，1，2，3，⋯，30 に含まれる因数 5 の個数は全部で

$6 + 1 = 7$（個）

ゆえに，30! は一の位から続けて，0 が 7 個並ぶ。

3 $\frac{24}{245}$ と $\frac{54}{175}$ に同じ有理数 a を掛けると，どちらも正の整数となる。
このような有理数 a のうち，最小のものを求めよ。

$a = \frac{m}{n}$（m と n は互いに素，$n \neq 0$）とおくと

$\frac{24}{245}a = \frac{24m}{245n}$，$\frac{54}{175}a = \frac{54m}{175n}$

この 2 数がどちらも正の整数になるとき，m は 245 と 175 の公倍数，n は 24 と 54 の公約数である。
よって，a が最小となるのは，m が 245 と 175 の最小公倍数，n が 24 と 54 の最大公約数となるときである。

$245 = 5 \cdot 7^2$，$175 = 5^2 \cdot 7$

よって，245 と 175 の最小公倍数は

$5^2 \cdot 7^2 = 1225$

$24 = 2^3 \cdot 3$，$54 = 2 \cdot 3^3$

よって，24 と 54 の最大公約数は　$2 \cdot 3 = 6$

したがって，求める有理数aは

$a = \frac{1225}{6}$

4 縦の長さが 42cm，横の長さが 70cm，高さが 30cm の直方体のブロックがたくさんある。このブロックを同じ向きに並べたり積み上げたりして，立方体をつくる。立方体の 1 辺の長さができるだけ短くなるようにするとき，1 辺の長さを求めよ。また，このとき，ブロックは何個必要か。

立方体の 1 辺の長さが最も短くなるのは, 直方体のブロックの縦の長さと横の長さと高さの最小公倍数のときである。

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$，$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$，$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

であるから，42 と 70 と 30 の最小公倍数は

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

よって，求める立方体の 1 辺の長さは　210cm

また，ブロックの個数は

$(210 \div 42) \times (210 \div 70) \times (210 \div 30)$

$= 5 \times 3 \times 7 = 105$　（個）

5 $a^2-b^2=24$ を満たす正の整数 a，b の組をすべて求めよ。

$a^2-b^2=24$ より

$(a+b)(a-b)=24$ ……①

ここで，$(a+b)+(a-b)=2a$ であるから，

$(a+b)+(a-b)$ は偶数となる。したがって，$a+b$，$a-b$ はともに偶数かともに奇数となる。

①から，$a+b$ と $a-b$ の積が偶数であるから，$a+b$ と $a-b$ はともに偶数となる。

さらに　$a+b>a-b$　かつ　$a+b>0$

であることを考慮すると，①を満たす $a+b$ と $a-b$ の組は

$\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=2 \end{cases}$，$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=4 \end{cases}$

したがって，求める正の整数 a，b の組は

$\begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$，$\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$

6 次の１次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $113x+41y=1$

ユークリッドの互除法により，113 と 41 の最大公約数を調べる。

$113=41\cdot2+31$ ……①

$41=31\cdot1+10$ ……②

$31=10\cdot3+1$ ……③

$10=1\cdot10$

よって，113 と 41の最大公約数が 1 であるから，互いに素である。ここで，①，②，③ において，余り以外の項を移項すると

$113-41\cdot2=31$ ……④

$41-31\cdot1=10$ ……⑤

$31-10\cdot3=1$ ……⑥

⑤を⑥に代入すると

$31-(41-31\cdot1)\cdot3=1$

左辺を変形すると

$31\cdot4+41\cdot(-3)=1$ ……⑦

④を⑦に代入すると

$(113-41\cdot2)\cdot4+41\cdot(-3)=1$

左辺を変形すると

$113\cdot4+41\cdot(-11)=1$ ……⑧

$113x+41y=1$ と⑧の差をとると

$113(x-4)+41(y+11)=0$

$113(x-4)=-41(y+11)$ ……⑨

ここで，113 と 41 は互いに素であるから，$x-4$ は 41 の倍数である。

よって，n を整数として

$x-4=41n$　すなわち　$x=41n+4$

これを⑨に代入すると

$y+11=-113n$　すなわち　$y=-113n-11$

したがって，求めるすべての整数解は

$\begin{cases} x=41n+4 \\ y=-113n-11 \end{cases}$　（n は整数）

(2) $113x+41y=3$

(1)より$113x+41y=1$の 1 組の整数解は $x=4$, $y=-11$ であるから

$113\cdot 4+41\cdot(-11)=1$ ……①

①の両辺に 3 を掛けて

$113\cdot 12+41\cdot(-33)=3$ ……②

したがって，1 次不定方程式

$113x+41y=3$ ……③

の 1 組の整数解は

$$\begin{cases} x=12 \\ y=-33 \end{cases}$$

③−② より

$113(x-12)+41(y+33)=0$

$113(x-12)=-41(y+33)$ ……④

ここで，113 と41 は互いに素であるから，$x-12$ は 41 の倍数である。

よって，n を整数として

$x-12=41n$ すなわち $x=41n+12$

これを④に代入すると

$y+33=-113n$ すなわち $y=-113n-33$

したがって，求めるすべての整数解は

$$\begin{cases} x=41n+12 \\ y=-113n-33 \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

7 3^{30}の一の位の数字を求めよ。

3^1，3^2，3^3，3^4，…の一の位は

3，9，7，1，3，9，7，1，…

となるから

3，9，7，1

の 4 つの数字をこの順に繰り返すことがわかる。

$30=4\cdot 7+2$

であるから，3^{30} の一の位の数は，3，9，7，1 の 2 番目の数の 9 である。

8 次の計算をせよ。

(1) $334_{(5)}+43_{(5)}$

$334_{(5)}$ と $43_{(5)}$ をそれぞれ 10 進法で表す。

$334_{(5)}=3\cdot 5^2+3\cdot 5+4=94$

$43_{(5)}=4\cdot 5+3=23$

よって $334_{(5)}+43_{(5)}=94+23=117$

117 を 5 進法で表すと， $117=432_{(5)}$

したがって $334_{(5)}+43_{(5)}=432_{(5)}$

$$\begin{array}{r|rl} 5) & 117 & \text{余り} \\ 5) & 23 & \cdots\ 2 \\ & 4 & \cdots\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 334 \\ +\ \ 43 \\ \hline 432 \end{array}$$

(2) $1111_{(7)}-345_{(7)}$

$1111_{(7)}$ と $345_{(7)}$ をそれぞれ 10 進法で表す。

$1111_{(7)}=1\cdot 7^3+1\cdot 7^2+1\cdot 7+1=400$

$345_{(7)}=3\cdot 7^2+4\cdot 7+5=180$

よって $1111_{(7)}-345_{(7)}=400-180=220$

220 を 7 進法で表すと， $220=433_{(7)}$

したがって $1111_{(7)}-345_{(7)}=433_{(7)}$

$$\begin{array}{r|rl} 7) & 220 & \text{余り} \\ 7) & 31 & \cdots\ 3 \\ & 4 & \cdots\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ -\ \ 345 \\ \hline 433 \end{array}$$

(3) $201_{(3)}\times 12_{(3)}$

$201_{(3)}$ と $12_{(3)}$ をそれぞれ10 進法で表す。

$201_{(3)}=2\cdot 3^2+0\cdot 3+1=19$

$12_{(3)}=1\cdot 3+2=5$

よって

$201_{(3)}\times 12_{(3)}=19\times 5=95$

95 を 3 進法で表すと， $95=10112_{(3)}$

したがって $201_{(3)}\times 12_{(3)}=10112_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3) & 95 & \text{余り} \\ 3) & 31 & \cdots\ 2 \\ 3) & 10 & \cdots\ 1 \\ 3) & 3 & \cdots\ 1 \\ & 1 & \cdots\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 201 \\ \times\ \ 12 \\ \hline 1102 \\ 201\ \ \\ \hline 10112 \end{array}$$

(4) $1230_{(4)}\div 21_{(4)}$

$1230_{(4)}$ と $21_{(4)}$ をそれぞれ 10 進法で表す。

$1230_{(4)}=1\cdot 4^3+2\cdot 4^2+3\cdot 4+0=108$

$21_{(4)}=2\cdot 4+1=9$

よって $1230_{(4)}\div 21_{(4)}=108\div 9=12$

12 を 4 進法で表すと， $12=30_{(4)}$

したがって $1230_{(4)}\div 21_{(4)}=30_{(4)}$

$$\begin{array}{r|rl} 4) & 12 & \text{余り} \\ & 3 & \cdots\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 21\,\overline{)\,1230} \\ 123\ \\ \hline 00 \end{array}$$

練習問題Ｂ

（教科書 p.95）

9 $\sqrt{n^2+48}$ が整数となるような正の整数 n をすべて求めよ。

$\sqrt{n^2+48}=k$ とおくと，k は正の整数で

$n^2+48=k^2$

$k^2-n^2=48$

$(k+n)(k-n)=48$ ……①

ここで，n，k はともに正の整数であるから，$k+n$，$k-n$ も整数で

$(k+n)-(k-n)=2n>0$

よって，$k+n>k-n$ であり，$k+n$，$k-n$ はともに偶数，またはともに奇数である。

①より，$k+n$，$k-n$ の積が偶数であることから，$k+n$，$k-n$ はともに偶数である。

したがって，①より

$\begin{cases}k+n=8\\k-n=6,\end{cases}$ $\begin{cases}k+n=12\\k-n=4,\end{cases}$ $\begin{cases}k+n=24\\k-n=2\end{cases}$

ゆえに

$\begin{cases}k=7\\n=1,\end{cases}$ $\begin{cases}k=8\\n=4,\end{cases}$ $\begin{cases}k=13\\n=11\end{cases}$

すなわち $n=1,\ 4,\ 11$

10 2 つの正の整数 a と b が互いに素であるならば, $a+b$ と ab も互いに素であることを背理法を用いて証明せよ。

$a+b$ と ab が互いに素でないと仮定すると，それらの素数である公約数 p を用いて

$a+b=pm$ ……①

$ab=pn$ ……②

と表される。ただし，m，n は整数とする。

a と b は互いに素であるから，②より，素数 p は a の約数か b の約数のいずれかである。

p が a の約数であるとすると $a=pt$ （t は整数）

と表され，①より

$b=pm-a=pm-pt=p(m-t)$

となる。ここで，$m-t$ は整数であるから，b は p の倍数となり，a と b が互いに素であることに矛盾する。p が b の約数であるとしても同様に矛盾する。

よって，$a+b$ と ab は互いに素である。

11 和が 1092，最小公倍数が 3528 であるような 2 つの正の整数の組を求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，b とし，a と b の最大公約数を g とすると

$a=a'g$，$b=b'g$ ……①

とおける。ただし，a' と b' は互いに素である。

$a+b=1092$ であるから，①を代入すると

$a'g+b'g=1092$

すなわち $(a'+b')g=1092$ ……②

a と b の最小公倍数が 3528 であるから

$a'b'g=3528$ ……③

a' と b' が互いに素であるから，練習問題 10 の結果より $a'+b'$ と $a'b'$ も互いに素である。

よって，②，③から g は 1092 と 3528 の最大公約数となることがわかる。

1092 と 3528 をそれぞれ素因数分解すると

$1092=2^2\cdot3\cdot7\cdot13$

$3528=2^3\cdot3^2\cdot7^2$

となるから，最大公約数 g は $g=2^2\cdot3\cdot7=84$

これを②，③に代入すると

$a'+b'=13$ ……④

$a'b'=42$ ……⑤

よって，④，⑤を満たす互いに素な a' と b' を求めると6と7

ゆえに，求める 2 つの正の整数は

504 と 588

12 12で割ると 7 余り，15 で割ると 4 余り，18 で割ると 13 余るような正の整数のうち，最小のものを求めよ。

12 で割ると7余り，18 で割ると 13 余る正の整数を N とすると，N に 5 を加えた数は 12 でも 18 でも割り切れる。

よって $N+5=36k$

すなわち $N=36k-5$ ただし，$k\geqq1$ の整数

そこで，このような N を小さい方から並べると，31，67，103，139，…

これらの数を 15 で割った商と余りで表すと

$31=15\cdot2+1$，$67=15\cdot4+7$

$103=15\cdot6+13$，$139=15\cdot9+4$，…

したがって，15 で割った余りが 4 となる最小の整数は 139 である。

13 7 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(7)}$ となる整数 N を，11 進法で表すと 3 桁の数 $cba_{(11)}$ となった。この整数 N を 10 進法で表せ。

7 進法の 3 桁の数 $abc_{(7)}$ を 10 進法で表すと

$abc_{(7)}=a\cdot 7^2+b\cdot 7+c$ ……①

11 進法の 3 桁の数 $cba_{(11)}$ を 10 進法で表すと

$cba_{(11)}=c\cdot 11^2+b\cdot 11+a$ ……②

①，②より

$a\cdot 7^2+b\cdot 7+c=c\cdot 11^2+b\cdot 11+a$ ……③

ただし

$1\leqq a\leqq 6$，$0\leqq b\leqq 6$，$1\leqq c\leqq 6$ ……④

③より　$48a-4b-120c=0$

よって　$b=6(2a-5c)$

ここで，④より $0\leqq b\leqq 6$ であるから

$2a-5c=0$　または　$2a-5c=1$

（i）$2a-5c=0$ のとき

④を満たすのは，$a=5$，$c=2$ に限る。

このとき，$b=0$ であるから求める整数は

③より　$5\cdot 7^2+0\cdot 7+2=247$

（ii）$2a-5c=1$ のとき

④を満たすのは，$a=3$，$c=1$ に限る。

このとき，$b=6$ であるから求める整数は

③より $3\cdot 7^2+6\cdot 7+1=190$

したがって，求める整数を 10 進法で表すと，190 と 247

COLUMN 完全数と友愛数 （教科書 p.95）

完全数とは，その数自身を除いた約数の和が，その数自身と等しくなる自然数のことです。たとえば，$6=1+2+3$ と $28=1+2+4+7+14$ は完全数です。完全数は小さい順に 6, 28, 496, 8128, 33550336，…と続き，2015 年 3 月現在，48 個の完全数が発見されています。

友愛数とは，2 つの自然数のうち一方のその数自身を除いた約数の和が，他方の数自身と等しくなる数のことです。たとえば，220 と 284 の 2 つの自然数について，220 のその数自身を除いた約数は 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110 で，和は 284 となり，284 のその数自身を除いた約数は 1，2，4，71，142 で，和は 220 となるから，220 と 284 は友愛数です。

発 展　合同式

（教科書 p.96）

m は正の整数とする。2 つの整数 a，b に対して，$a-b$ が m で割り切れるとき，a と b は（　mを法として合同　）であるといい，（　$a \equiv b \pmod{m}$　），または，（　m を法として$a \equiv b$　）と表す。この式を（　合同式　）という。これは，a を m で割ったときの余りと，b を m で割ったときの余りが等しいことと同値である。

例 1
(1) 15 と 7 は，$15-7=8$ が 4 で割り切れるから
$15 \equiv 7 \pmod{4}$
(2) 3 と -1 は，$3-(-1)=4$ が 4 で割り切れるから
$3 \equiv -1 \pmod{4}$

問1 次の□の中に 0，1，2，3，4 の中から適する値を選べ。

(1) $16 \equiv \boxed{1} \pmod{5}$　　(2) $28 \equiv \boxed{3} \pmod{5}$

(3) $39 \equiv \boxed{4} \pmod{5}$　　(4) $47 \equiv \boxed{2} \pmod{5}$

3 つの整数 a，b，c と正の整数 m に対して，次のことが成り立つ。

$a \equiv b \pmod{m}$，$b \equiv c \pmod{m}$ $\Rightarrow$ $a \equiv c \pmod{m}$

合同式については，次のような性質が成り立つ。

合同式の性質

$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$　のとき
$\boxed{1}$ $a+c \equiv b+d \pmod{m}$，　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$
$\boxed{2}$ $ac \equiv bd \pmod{m}$
$\boxed{3}$ $a^n \equiv b^n \pmod{m}$　　ただし，n は正の整数

問2 5 を法として合同な 2 つの整数の組の例を 2 組あげ，公式の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$が成り立つことを確かめよ。

$m=5$ を法として合同な整数の組を $a=21$，$b=6$
と $c=19$，$d=14$ とすると
$a-b=15=5\times3$ より　$21 \equiv 6 \pmod{5}$
$c-d=5=5\times1$ より　$19 \equiv 14 \pmod{5}$
$\boxed{1}$ $a+c=40$，$b=d=20$ より
$(a+c)-(b+d)=20=5\times4$
したがって　$21+19 \equiv 6+14 \pmod{5}$
よって　$a+c \equiv b+d \pmod{m}$
また，$a-c=2$，$b-d=-8$　より
$(a-c)-(b-d)=10=5\times2$
したがって　$21-19 \equiv 6-14 \pmod{5}$
よって　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$
$\boxed{2}$ $ac=21\cdot19=399$，$bd=6\cdot14=84$ より
$ac=bd=399-84=315=5\times63$
したがって　$21\cdot19 \equiv 6\cdot14 \pmod{5}$
よって　$ac \equiv bd \pmod{m}$

例題 1 2^{30} を 9 で割ったときの余りを求めよ。

解 $2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod{9}$ であるから
$2^{30} \equiv (2^3)^{10} \equiv 8^{10} \equiv (-1)^{10} \equiv 1 \pmod{9}$
よって，2^{30} を 9 で割ったときの余りは 1 である。

問3 17^{10} を 5 で割ったときの余りを求めよ。

$17^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5}$　であるから
$17^{10} \equiv (17^2)^5 \equiv (-1)^5 \equiv 4 \pmod{5}$
よって，17^{10} を 5 で割ったときの余りは 4 である。

例題 2 任意の整数の3乗は，7を法として 0，1，-1 のいずれかに合同であることを証明せよ。

解 a を整数とする。a を 7 で割ったときの余りは 0 から 6 までのいずれかになるが，
$6 \equiv -1 \pmod 7$，$5 \equiv -2 \pmod 7$，$4 \equiv -3 \pmod 7$ より，7を法として a は $0, \pm1, \pm2, \pm3$
のいずれかに合同である。
ここで，7 を法として
$a \equiv 0$ のとき　$a^3 \equiv 0$
$a \equiv 1$ のとき　$a^3 \equiv 1$，　　$a \equiv -1$ のとき　$a^3 \equiv -1$
$a \equiv 2$ のとき　$a^3 \equiv 8 \equiv 1$，　　$a \equiv -2$ のとき　$a^3 \equiv -8 \equiv -1$
$a \equiv 3$ のとき　$a^3 \equiv 27 \equiv -1$，　　$a \equiv -3$ のとき　$a^3 \equiv -27 \equiv 1$
よって，a^3 は 7 を法として 0，1，-1 のいずれかに合同である。

問4 次の命題を証明せよ。

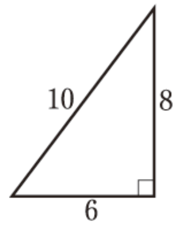
(1) a を整数とするとき，a^2 は 3 を法として 0 または 1 に合同である。

a を 3 で割ったときの余りは0，1，2 のいずれかとなるが，$5 \equiv -1 \pmod 3$ より，3を法として a は 0，±1 のいずれかに合同である。ここで，3 を法として
$a \equiv 0$　のとき　$a^2 \equiv 0$
$a \equiv 1$　のとき　$a^2 \equiv 1$
$a \equiv -1$　のとき　$a^2 \equiv 1$
よって，a^2 は 3 を法として 0 または1に合同である。

(2) 整数 a，b，c が等式 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき，a，b のいずれか一方は 3 の倍数である。

a，b がともに 3 の倍数でないと仮定する。
(1)より　$a^2 \equiv 1 \pmod 3$，$b^2 \equiv 1 \pmod 3$
であるから
$a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$
すなわち，$a^2 + b^2$ を 3 で割ると余りは 2 である。
一方，(1)より $c^2 \equiv 0$ または $1 \pmod 3$
すなわち，c^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 である。
よって，$a^2 + b^2$ と c^2 を 3 で割ったときの余りが異なるから，等号は成り立たず矛盾する。
したがって，a，b のいずれかは 3 の倍数である。

COLUMN　周の長さと面積の値が等しい三角形　（教科書 p.98）



右の図のような 3 辺の長さが 6，8，10 の直角三角形があります。この三角形の周の長さは 24 で，面積も 24 です。

このように，3 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい直角三角形は他にも存在するか調べてみよう。

直角をはさむ 2 辺の長さを x，y（$1 \leqq x \leqq y$ で，x，y は整数）とします。

このとき

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy \quad \cdots\cdots①$$

課題 1 ①はどのような関係を表しているか説明してみよう。

①を整理すると　$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy - (x + y)$

両辺を 2 乗すると　$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}x^2y^2 - xy(x + y) + (x + y)^2$

整理すると　$xy\{xy - 4(x + y) + 8\} = 0$

$x \neq 0$，$y \neq 0$ より　$xy \neq 0$

よって

$$xy - 4(x + y) + 8 = 0 \quad \cdots\cdots②$$

課題 2 ②を解いて，わかることを説明してみよう。

課題 3 4 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい長方形は存在するか調べてみよう。

3 辺の長さが整数で，その周の長さと面積の値が等しい直角三角形以外の三角形は存在するか調べてみよう。