3 節 整数の性質の活用

1 記数法

（教科書 p.84）

10 ずつの集まりを考えて数を表す方法を（1　　　　　　　　）という。

10 進法では，0 から 9 までの 10 個の数字を用いて，各桁は右から順に 1，10，10^2，10^3，…の位を表している。したがって，たとえば 345 は

$$345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \quad \cdots\cdots ①$$

のように表すこともできる。

問1 10 進法で表された数 6578 を上の①の形で表せ。

10 進法に対して，2 ずつの集まりを考えて数を表す方法を（2　　　　　　　　）という。

これからは，たとえば 11001 が 2 進法で表された数であることを示すために，$11001_{(2)}$ と書くことにする。

2進法と10進法

（教科書 p.85）

例 1 2 進法で表された数 $11001_{(2)}$ は

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 25$$

であるから，10 進法で表すと（　　　　）となる。

問2 次の 2 進法で表された数を 10 進法で表せ。

(1) $101_{(2)}$

(2) $1010_{(2)}$

(3) $11111_{(2)}$

例 2 10 進法で表された数 22 を 2 進法で表してみよう。

右の計算より，22 を 2 進法で表すと

（　　　　　　　　）

となる。

$$\begin{array}{rrl} 2\,) & \underline{22} & \quad 余り \\ 2\,) & \underline{11} & \cdots\ 0 \\ 2\,) & \underline{5} & \cdots\ 1 \\ 2\,) & \underline{2} & \cdots\ 1 \\ & 1 & \cdots\ 0 \end{array}$$

問3 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表せ。

(1) 18

(2) 32

(3) 125

例3 2 進法で表された小数 $1.101_{(2)}$ を 10 進法の小数で表してみよう。

$$1.101_{(2)} = 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2^2} + 1\cdot\frac{1}{2^3}$$
$$=$$

したがって，$1.101_{(2)}$ を 10 進法で表すと

となる。

問4 次の 2 進法で表された小数を 10 進法の小数で表せ。

(1) $1.11_{(2)}$

(2) $11.01_{(2)}$

(3) $0.1101_{(2)}$

2進法の計算

（教科書 p.87）

例4 2 進法で表された数の足し算，引き算をしてみよう。

(1) $111_{(2)} + 101_{(2)} =$

$$\begin{array}{r} 111 \\ +\ 101 \\ \hline \end{array}$$

(2) $1001_{(2)} - 110_{(2)} =$

$$\begin{array}{r} 1001 \\ -\ 110 \\ \hline \end{array}$$

問5 次の 2 進法で表された数の計算をせよ。

(1) $11011_{(2)} + 1110_{(2)}$

(2) $10100_{(2)} - 1101_{(2)}$

例5 2 進法で表された数の掛け算，割り算をしてみよう。

(1) $101_{(2)} \times 101_{(2)} =$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 101 \\ \hline \end{array}$$

(2) $11001_{(2)} \div 101_{(2)} =$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 101 \overline{)11001} \end{array}$$

問6 次の 2 進法で表された数の計算をせよ。

(1) $111_{(2)} \times 11_{(2)}$

(2) $10101_{(2)} \div 111_{(2)}$

n 進法

（教科書 p.88）

一般に，n 進法についても，10 進法や 2 進法と同様に考えることができる。たとえば，8 進法で表された数 $273_{(8)}$ は次のように表される。

$$273_{(8)} = 2\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 3$$

例 6 (1) 3 進法で表された $1212_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$1212_{(3)} =$

(2) 10 進法で表された数 73 を 3 進法で表すと，右の計算より

$73 =$

$$\begin{array}{r|l}
3 \,) & 73 \quad \text{余り} \\
3 \,) & 24 \;\cdots\; 1 \\
3 \,) & 8 \;\cdots\; 0 \\
 & 2 \;\cdots\; 2
\end{array}$$

問7 次の 3 進法で表された数を 10 進法で表し，10 進法で表された数を 3 進法で表せ。

(1) $12021_{(3)}$

(2) 172

例題 1 $431_{(5)}$ を 3 進法で表せ。

解 $431_{(5)}$ を 10 進法で表すと

次に，　　を 3 進法で表すと，右の計算より

ゆえに　$431_{(5)} =$

$$\begin{array}{r|l}
3 \,) & 116 \quad \text{余り} \\
3 \,) & 38 \;\cdots\; 2 \\
3 \,) & 12 \;\cdots\; 2 \\
3 \,) & 4 \;\cdots\; 0 \\
 & 1 \;\cdots\; 1
\end{array}$$

問8 次の数を 3 進法で表せ。

(1) $11101_{(2)}$

(2) $2020_{(5)}$

2 小数と分数

（教科書 p.89）

整数ではない有理数を小数で表すと，$\frac{1}{8} = 0.125$ のように（[1]　　　　　　　）となる場合と，

$\frac{7}{22} = 0.3181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$ のように（[2]　　　　　　　）となる場合がある。

有限小数となる分数

（教科書 p.89）

分母の素因数が 2 と 5 だけであるような分数は，分母と分子に適当な数を掛けることによって分母を 10^n の形にすることができるから，有限小数となる。

それ以上約分できない分数を（[3]　　　　　　　）という。上のことから，既約分数が有限小数となる条件は次のようになる。

既約分数が有限小数となる条件
分母の素因数が 2 と 5 だけである既約分数 $\Longleftrightarrow$ 有限小数

例 7 (1) $\frac{1}{40}$ は分母が $40 = 2^3 \cdot 5$ であるから，

(2) $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ は分母が $15 = 3 \cdot 5$ であるから，

問9 次の分数のうち，有限小数となるものを選べ。

① $\frac{3}{20}$　　② $\frac{2}{105}$　　③ $\frac{5}{128}$　　④ $\frac{9}{240}$

循環小数となる分数

（教科書 p.90）

循環小数において，くり返し現れる数字の配列を（[4]　　　　　　　）という。

例 8 $\frac{1}{7}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めてみよう。

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ であるから，循環節は（　　　　　　　）である。

すなわち，循環節は 6 桁であり

であるから，求める数字は 142857 の（　　　　　）番目の（　　　　）である。

問 10 $\frac{6}{13}$ を小数で表したとき，小数第 150 位の数字を求めよ。

参 考　部屋割り論法

（教科書 p.91）

「部屋割り論法」とよばれる論法がある。これは「n 個の部屋に n 人より多くの人を割り振る場合，少なくとも 1 部屋には 2 人以上の人が入ることになる」という論法である。

b を a で割ることを続けると，余りは 1，2，3，…，$a-1$ のいずれかになるから，a 回割り算をする間に同じ余りが現れるとしたが，このことは部屋割り論法をもとにしている。すなわち，余りが 1，2，3，…，$a-1$ になることを，それぞれ $(a-1)$ 個の部屋のいずれかに入れると考え，割り算で現れる a 個の余りを $(a-1)$ 個の部屋に入れると，少なくとも 1 部屋に 2 個以上入ることになる。

部屋割り論法を用いて，次の整数の性質を考えてみよう。

> 10 個の整数が与えられたとき，その中には，差が 9 の倍数となるような 2 個の整数が少なくとも 1 組ある。

すべての整数は，9 で割ったときの余りによって

$$9k,\ 9k+1,\ 9k+2,\ \cdots,\ 9k+8 \qquad (k\text{は整数})$$

の 9 個に分類される。与えられた 10 個の整数は，それぞれこのいずれかに含まれている。このとき，部屋割り論法により，少なくとも 2 個の整数は同じ分類に含まれるから，9 で割ったときの余りが等しい。ここで，その 2 個の数の差をとると，9 で割ったときの余りが 0 となるから，9 の倍数となる。

したがって，与えられた 10 個の整数の中には，差が 9 の倍数となるような 2 個の整数が少なくとも 1 組ある。

問 題

（教科書 p.92）

20 2 進法で表された数$1011011_{(2)}$を 10 進法で表せ。
また，10 進法で表された数 81 を 2 進法で表せ。

21 次の2 進法で表された小数を10 進法の小数で表せ。
(1) $0.1111_{(2)}$

(2) $101.011_{(2)}$

22 次の計算をせよ。
(1) $1011_{(2)} \times 1101_{(2)}$

(2) $101_{(2)} \times 11_{(2)} + 110_{(2)}$

23 7 進法で表された数 $352_{(7)}$ を 3 進法で表せ。また，5 進法で表せ。

24 $\frac{2}{3}$ より大きく 1 より小さい既約分数 $\frac{7}{n}$ が有限小数になるような正の整数 n をすべて求めよ。

COLUMN 記数法と循環小数

（教科書 p. 92）

3 進法で表された有限小数 $0.1_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$1\cdot\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$$

となり，循環小数となる。

このように，1 つの数でも，表し方によって，有限小数となったり循環小数となったりする。

たとえば，$\frac{7}{9}$ は，10 進法の小数では，次のように循環小数となる。

$$\frac{7}{9}=0.7777\cdots=0.\dot{7}$$

しかし，3 進法の小数では

$$\frac{7}{9}=\frac{2\cdot3+1}{3^2}=2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2}$$

より，有限小数 $0.21_{(3)}$ となる。

参考　大小関係を利用した絞り込みと不定方程式

（教科書 p.93）

$a\leqq b\leqq c$ かつ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ を満たす正の整数 a，b，c の組をすべて求めてみよう。

$1\leqq a\leqq b\leqq c$ であるから　$\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{b}\leqq\frac{1}{a}$

よって　$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$

したがって

すなわち　$a=$

（ i ）$a=1$ のとき，　　　　　　となり，これを満たす b，c は存在しない。

（ ii ）$a=2$ のとき，　　　　　　より

よって

ここで，$2\leqq b\leqq c$ より，$0\leqq b-2\leqq c-2$ であるから

$$\begin{cases} \\ \end{cases}\qquad\begin{cases} \\ \end{cases}\qquad \text{ゆえに}\ \begin{cases}b=\\c=\end{cases},\ \begin{cases}b=\\c=\end{cases}$$

（ iii ）$a=3$ のとき，　　　　　　より

よって

ここで，$3\leqq b\leqq c$ より，$3\leqq 2b-3\leqq 2c-3$ であるから

$$\begin{cases} \\ \end{cases}\qquad \text{ゆえに}\ \begin{cases}b=\\c=\end{cases}$$

（ i ），（ ii ），（ iii ）より，求める正の整数 a，b，c の組は

3節 整数の性質の活用

1 記数法

（教科書 p.84）

10 ずつの集まりを考えて数を表す方法を（[1] 10 進法 ）という。

10 進法では，0 から 9 までの 10 個の数字を用いて，各桁は右から順に 1，10，10^2，10^3，…の位を表している。したがって，たとえば 345 は

$$345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \quad \cdots\cdots①$$

のように表すこともできる。

問1 10 進法で表された数 6578 を上の①の形で表せ。

$6578 = 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$

10 進法に対して，2 ずつの集まりを考えて数を表す方法を（[2] 2 進法 ）という。

これからは，たとえば 11001 が 2 進法で表された数であることを示すために，$11001_{(2)}$ と書くことにする。

2進法と10進法

（教科書 p.85）

例1 2 進法で表された数 $11001_{(2)}$ は

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 25$$

であるから，10 進法で表すと（ 25 ）となる。

問2 次の 2 進法で表された数を 10 進法で表せ。

(1) $101_{(2)}$

$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 5$

であるから，10 進法で表すと 5 となる。

(2) $1010_{(2)}$

$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 10$

であるから，10 進法で表すと 10 となる。

(3) $11111_{(2)}$

$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 31$

であるから，10 進法で表すと 31 となる。

例2 10 進法で表された数 22 を 2 進法で表してみよう。

右の計算より，22 を 2 進法で表すと

（ $10110_{(2)}$ ）

となる。

2)22 余り
2)11 … 0
2) 5 … 1
2) 2 … 1
　 1 … 0

問3 次の 10 進法で表された数を 2 進法で表せ。

(1) 18

$10010_{(2)}$

2) 18 余り
2) 9 …0
2) 4 …1
2) 2 …0
　 1 …0

(2) 32

$100000_{(2)}$

2) 32 余り
2) 16 …0
2) 8 …0
2) 4 …0
2) 2 …0
　 1 …0

(3) 125

$1111101_{(2)}$

2) 125 余り
2) 62 …1
2) 31 …0
2) 15 …1
2) 7 …1
2) 3 …1
　 1 …1

例3 2 進法で表された小数 $1.101_{(2)}$ を 10 進法の小数で表してみよう。

$1.101_{(2)} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3}$

$= \frac{13}{8} = 1.625$

したがって，$1.101_{(2)}$ を 10 進法で表すと

1.625

となる。

問4 次の 2 進法で表された小数を 10 進法の小数で表せ。

(1) $1.11_{(2)}$

$1.11_{(2)} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2}$

$= \frac{7}{4} = 1.75$

(2) $11.01_{(2)}$

$11.01_{(2)} = 1 \cdot 2 + 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2}$

$= \frac{13}{4} = 3.25$

(3) $0.1101_{(2)}$

$0.1101_{(2)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4}$

$= \frac{13}{16} = 0.8125$

2進法の計算

（教科書 p.87）

例4 2 進法で表された数の足し算，引き算をしてみよう。

(1) $111_{(2)} + 101_{(2)} = 1100_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ +\ 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

(2) $1001_{(2)} - 110_{(2)} = 11_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1001 \\ -\ 110 \\ \hline 11 \end{array}$$

問5 次の 2 進法で表された数の計算をせよ。

(1) $11011_{(2)} + 1110_{(2)}$

$11011_{(2)} + 1110_{(2)} = 101001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ +\ 1110 \\ \hline 101001 \end{array}$$

(2) $10100_{(2)} - 1101_{(2)}$

$10100_{(2)} - 1101_{(2)} = 111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10100 \\ -\ 1101 \\ \hline 111 \end{array}$$

例5 2 進法で表された数の掛け算，割り算をしてみよう。

(1) $101_{(2)} \times 101_{(2)} = 11001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11001 \end{array}$$

(2) $11001_{(2)} \div 101_{(2)} = 101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 101 \overline{)11001} \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

問6 次の 2 進法で表された数の計算をせよ。

(1) $111_{(2)} \times 11_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 11 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline 10101 \end{array}$$

$111_{(2)} \times 11_{(2)} = 10101_{(2)}$

(2) $10101_{(2)} \div 111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 111 \overline{)10101} \\ \underline{111} \\ 111 \\ \underline{111} \\ 0 \end{array}$$

$10101_{(2)} \div 111_{(2)} = 11_{(2)}$

n 進法

（教科書 p.88）

一般に，n 進法についても，10 進法や 2 進法と同様に考えることができる。たとえば，8 進法で表された数 $273_{(8)}$ は次のように表される。

$$273_{(8)}=2\cdot 8^2+7\cdot 8+3$$

例 6 (1) 3 進法で表された $1212_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$1212_{(3)}=1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+1\cdot 3+2=50$$

(2) 10 進法で表された数 73 を 3 進法で表すと，右の計算より

$$73=2201_{(3)}$$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 73 & \text{余り} \\ 3 & 24 & \cdots\ 1 \\ 3 & 8 & \cdots\ 0 \\ & 2 & \cdots\ 2 \end{array}$$

問7 次の 3 進法で表された数を 10 進法で表し，10 進法で表された数を 3 進法で表せ。

(1) $12021_{(3)}$

$=1\cdot 3^4+2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+2\cdot 3+1=142$

(2) 172

$=20101_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 172 & \text{余り} \\ 3 & 57 & \cdots\ 1 \\ 3 & 19 & \cdots\ 0 \\ 3 & 6 & \cdots\ 1 \\ & 2 & \cdots\ 0 \end{array}$$

例題 1 $431_{(5)}$ を 3 進法で表せ。

解 $431_{(5)}$ を 10 進法で表すと

$$431_{(5)}=4\cdot 5^2+3\cdot 5+1=116$$

次に， 116 を 3 進法で表すと，右の計算より

$$116=11022_{(3)}$$

ゆえに $431_{(5)}=11022_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 116 & \text{余り} \\ 3 & 38 & \cdots\ 2 \\ 3 & 12 & \cdots\ 2 \\ 3 & 4 & \cdots\ 0 \\ & 1 & \cdots\ 1 \end{array}$$

問8 次の数を 3 進法で表せ。

(1) $11101_{(2)}$

$11101_{(2)}$ を 10 進法で表すと $11101_{(2)}=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+1=29$

次に，29 を 3 進法で表すと，

$29=1002_{(3)}$

ゆえに $11101_{(2)}=1002_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 29 & \text{余り} \\ 3 & 9 & \cdots\ 2 \\ 3 & 3 & \cdots\ 0 \\ & 1 & \cdots\ 0 \end{array}$$

(2) $2020_{(5)}$

$2020_{(5)}$ を 10 進法で表すと $2020_{(5)}=2\cdot 5^3+0\cdot 5^2+2\cdot 5+0=260$

次に，260 を 3 進法で表すと，

$260=100122_{(3)}$

ゆえに $2020_{(5)}=100122_{(3)}$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 260 & \text{余り} \\ 3 & 86 & \cdots\ 2 \\ 3 & 28 & \cdots\ 2 \\ 3 & 9 & \cdots\ 1 \\ 3 & 3 & \cdots\ 0 \\ & 1 & \cdots\ 0 \end{array}$$

2 小数と分数

（教科書 p.89）

整数ではない有理数を小数で表すと，$\frac{1}{8}=0.125$ のように（1 有限小数 ）となる場合と，$\frac{7}{22}=0.3181818\cdots=0.3\dot{1}\dot{8}$ のように（2 循環小数 ）となる場合がある。

有限小数となる分数

（教科書 p.89）

分母の素因数が 2 と 5 だけであるような分数は，分母と分子に適当な数を掛けることによって分母を 10^n の形にすることができるから，有限小数となる。

それ以上約分できない分数を（3 既約分数 ）という。上のことから，既約分数が有限小数となる条件は次のようになる。

既約分数が有限小数となる条件
分母の素因数が 2 と 5 だけである既約分数 $\Longleftrightarrow$ 有限小数

例 7 (1) $\frac{1}{40}$ は分母が $40=2^3\cdot5$ であるから，有限小数となる。

(2) $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$ は分母が $15=3\cdot5$ であるから，有限小数とならない。

問9 次の分数のうち，有限小数となるものを選べ。

① $\frac{3}{20}$　② $\frac{2}{105}$　③ $\frac{5}{128}$　④ $\frac{9}{240}$

① 分母が $20=2^2\cdot5$ であるから，有限小数となる。
② 分母が $105=3\cdot5\cdot7$ であるから，有限小数とならない。
③ 分母が $128=2^7$ であるから，有限小数となる。
④ 分母が $80=2^4\cdot5$ であるから，有限小数となる。
したがって，有限小数は ①，③，④

循環小数となる分数

（教科書 p.90）

循環小数において，くり返し現れる数字の配列を（4 循環節 ）という。

例 8 $\frac{1}{7}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めてみよう。

$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$ であるから，循環節は（ 142857 ）である。

すなわち，循環節は 6 桁であり

$100=6\cdot16+4$

であるから，求める数字は 142857 の（ 4 ）番目の（ 8 ）である。

問 10 $\frac{6}{13}$ を小数で表したとき，小数第 150 位の数字を求めよ。

$\frac{6}{13}=0.\dot{4}6153\dot{8}$ であるから，循環節は 461538 である。
すなわち，循環節は 6 桁であり

$150=6\cdot25$

であるから，求める数字は 461538 の 6 番目の 8 である。

参 考　部屋割り論法

（教科書 p.91）

「部屋割り論法」とよばれる論法がある。これは「n 個の部屋に n 人より多くの人を割り振る場合，少なくとも 1 部屋には 2 人以上の人が入ることになる」という論法である。

b を a で割ることを続けると，余りは 1，2，3，…，$a-1$ のいずれかになるから，a 回割り算をする間に同じ余りが現れるとしたが，このことは部屋割り論法をもとにしている。すなわち，余りが 1，2，3，…，$a-1$ になることを，それぞれ $(a-1)$ 個の部屋のいずれかに入れると考え，割り算で現れる a 個の余りを $(a-1)$ 個の部屋に入れると，少なくとも 1 部屋に 2 個以上入ることになる。

部屋割り論法を用いて，次の整数の性質を考えてみよう。

> 10 個の整数が与えられたとき，その中には，差が 9 の倍数となるような 2 個の整数が少なくとも 1 組ある。

すべての整数は，9 で割ったときの余りによって

$$9k,\ 9k+1,\ 9k+2,\ \cdots,\ 9k+8 \qquad (k\text{は整数})$$

の 9 個に分類される。与えられた 10 個の整数は，それぞれこのいずれかに含まれている。このとき，部屋割り論法により，少なくとも 2 個の整数は同じ分類に含まれるから，9 で割ったときの余りが等しい。ここで，その 2 個の数の差をとると，9 で割ったときの余りが 0 となるから，9 の倍数となる。

したがって，与えられた 10 個の整数の中には，差が 9 の倍数となるような 2 個の整数が少なくとも 1 組ある。

問 題

（教科書 p.92）

20 2 進法で表された数$1011011_{(2)}$ を 10 進法で表せ。
また，10 進法で表された数 81 を 2 進法で表せ。

$1011011_{(2)} = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1$

$= 91$

81を2 進法で表すと，

$81 = 1010001_{(2)}$

		余り
2)	81	
2)	40	… 1
2)	20	… 0
2)	10	… 0
2)	5	… 0
2)	2	… 1
	1	… 0

21 次の2 進法で表された小数を10 進法の小数で表せ。

(1) $0.1111_{(2)}$

$= 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2^2} + 1\cdot\frac{1}{2^3} + 1\cdot\frac{1}{2^4}$

$= \frac{15}{16} = 09375$

(2) $101.011_{(2)}$

$= 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2^2} + 1\cdot\frac{1}{2^3}$

$= \frac{43}{8} = 5.375$

22 次の計算をせよ。

(1) $1011_{(2)} \times 1101_{(2)}$

$= 10001111_{(2)}$

(2) $101_{(2)} \times 11_{(2)} + 110_{(2)}$

$= 1111_{(2)} + 110_{(2)} = 10101_{(2)}$

(1)
$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\quad 1101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline 10001111 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\quad 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ +\quad 110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

23 7 進法で表された数 $352_{(7)}$ を 3 進法で表せ。また，5 進法で表せ。

$352_{(7)}$ を 10 進法で表すと

$352_{(7)} = 3\cdot 7^2 + 5\cdot 7 + 2$

$= 184$

184 を 3 進法で表すと

$184 = 20211_{(3)}$

したがって　$352_{(7)} = 20211_{(3)}$

また，184 を5 進法で表すと，

$184 = 1214_{(5)}$

したがって　$352_{(7)} = 1214_{(5)}$

		余り
3)	184	
3)	61	… 1
3)	20	… 1
3)	6	… 2
	2	… 0

		余り
5)	184	
5)	36	… 4
5)	7	… 1
	1	… 2

24 $\frac{2}{3}$ より大きく 1 より小さい既約分数 $\frac{7}{n}$ が有限小数になるような正の整数 n をすべて求めよ。

$\frac{2}{3} < \frac{7}{n} < 1$　より　$1 < \frac{n}{7} < \frac{3}{2}$

よって，　$7 < n < \frac{21}{2}$　……①

①を満たす正の整数 n は　$n = 8,\ 9,\ 10$

この中で，既約分数 $\frac{7}{n}$ が有限小数となる n は

$n = 8,\ 10$

COLUMN 記数法と循環小数

（教科書 p. 92）

3 進法で表された有限小数 $0.1_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$1\cdot\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$$

となり，循環小数となる。

このように，1 つの数でも，表し方によって，有限小数となったり循環小数となったりする。

たとえば，$\frac{7}{9}$ は，10 進法の小数では，次のように循環小数となる。

$$\frac{7}{9}=0.7777\cdots=0.\dot{7}$$

しかし，3 進法の小数では

$$\frac{7}{9}=\frac{2\cdot3+1}{3^2}=2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2}$$

より，有限小数 $0.21_{(3)}$ となる。

参 考　大小関係を利用した絞り込みと不定方程式

（教科書 p.93）

$a\leqq b\leqq c$ かつ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ を満たす正の整数 a，b，c の組をすべて求めてみよう。

$1\leqq a\leqq b\leqq c$ であるから　$\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{b}\leqq\frac{1}{a}$

よって　$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$

したがって　$1\leqq\frac{3}{a}$　ゆえに　$a\leqq3$

すなわち　$a=1,\ 2,\ 3$

（ⅰ）$a=1$ のとき，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$　となり，これを満たす b，c は存在しない。

（ⅱ）$a=2$ のとき，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$　より　$bc-2b-2c=0$

よって　$(b-2)(c-2)=4$

ここで，$2\leqq b\leqq c$ より，$0\leqq b-2\leqq c-2$ であるから

$$\begin{cases}b-2=1\\c-2=4,\end{cases}\quad\begin{cases}b-2=2\\c-2=2\end{cases}\quad\text{ゆえに}\quad\begin{cases}b=3\\c=6,\end{cases}\quad\begin{cases}b=4\\c=4\end{cases}$$

（ⅲ）$a=3$ のとき，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$ より　$2bc-3b-3c=0$

よって　$(2b-3)(2c-3)=9$

ここで，$3\leqq b\leqq c$ より，$3\leqq 2b-3\leqq 2c-3$ であるから

$$\begin{cases}2b-3=3\\2c-3=3\end{cases}\quad\text{ゆえに}\quad\begin{cases}b=3\\c=3\end{cases}$$

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より，求める正の整数 a，b，c の組は

$$\begin{cases}a=2\\b=3\\c=6,\end{cases}\quad\begin{cases}a=2\\b=4\\c=4,\end{cases}\quad\begin{cases}a=3\\b=3\\c=3\end{cases}$$