2 節 ユークリッドの互除法と不定方程式

1 除法の性質と整数の分類

除法の性質

（教科書 p.71）

一般に，整数の割り算において，次の（1　　　　　　　　）が成り立つ。

除法の性質
a を整数，b を正の整数とし，a を b で割ったときの商を q， 余りを r とすると $a = bq + r$，　$0 \leqq r < b$

上の除法の性質において，整数aが負の数のときは，次の例のように考える。

例 1　$-77 =$（　　　　　　　　）であるから，-77 を 6 で割ったときの商は（　　　　　），余りは（　　　　）である。

問1　次の整数 a と正の整数 b について，a を b で割ったときの商 q および余り r を求め，$a = bq + r$ の形で表せ

(1)　$a = 41$，$b = 9$

(2)　$a = -41$，$b = 9$

(3)　$a = 108$，$b = 14$

(4)　$a = -108$，$b = 14$

例題 1　2 つの整数 a，b について，a を 6 で割ると 5 余り，bを 6 で割ると 4 余る。このとき，次の問に答えよ。

(1)　a を 3 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　ab を 6 で割ったときの余りを求めよ。

解　a を 6 で割ると 5 余るから，k を整数として

$$a = 6k + 5$$

と表される。

また，b を 6 で割ると 4 余るから，l を整数として

$$b = 6l + 4$$

と表される。

(1)　$a =$

ゆえに，a を 3 で割ったときの余りは（　　　　）である。

(2)　$ab =$

ゆえに，ab を 6 で割ったときの余りは（　　　　）である。

問2　2 つの整数 a，b について，a を 12 で割ると 7 余り，b を 12 で割ると 5 余る。このとき，次の問に答えよ。

(1)　a を 4 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　ab を 12 で割ったときの余りを求めよ。

整数の分類

（教科書 p.73）

すべての整数を，ある正の整数で割ったときの余りによって分類することを考えてみよう。

たとえば，すべての整数を 2 で割ったときの余り 0 と 1 で分類したものが偶数と奇数であるから，k を整数として

偶数　$2k$，　　奇数　$2k+1$

と表される。

$$\begin{cases} \text{偶数} & \cdots, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots \\ \text{奇数} & \cdots, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots \end{cases}$$

一般に，すべての整数は正の整数 m で割ったときの余りによって分類すると，次のように表すことができる。

$\boldsymbol{mk}$，$\boldsymbol{mk+1}$，$\boldsymbol{mk+2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{mk+(m-1)}$　（kは整数）

例 2 すべての整数を 5 で割ったときの余りによって分類すると

問3 例２にならって，すべての整数を 6 で割ったときの余りによって分類せよ。

連続する整数の積

（教科書 p.74）

n を整数とするとき，連続する 2 つの整数 n，$n+1$ の一方は 2 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 2 の倍数である。

また，連続する 3 つの整数 n，$n+1$，$n+2$ のうち，少なくとも 1 つは 2 の倍数であり，さらにどれか 1 つは 3 の倍数である。ここで，2 と 3 は互いに素であるから，$n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である。

問4 n を整数とする。因数分解を利用することにより，次のことを証明せよ。

(1) n^2-n は 2 の倍数である。

(2) n^3-n は 6 の倍数である。

例 3 整数 n について，n^2 を 3 で割ったときの余りは，0 または 1 であることを示してみよう。

整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k$，　$3k+1$，　$3k+2$　（kは整数）

となる。

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n^2=$

$n^2=$

$n^2=$

ゆえに，n^2 を 3 で割ったときの余りは，

問5 整数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 または 1 であることを示せ。

応用 例題 2 n が整数のとき，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

証明 $N=n(n+1)(2n+1)$とおく。

N が 6 の倍数であることを示すためには，N が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい。

〔１〕 $n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。

よって，N も 2 の倍数である。

〔２〕 整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k,\quad 3k+1,\quad 3k+2$ （kは整数）

それぞれの場合について，N を k で表すと

$n=3k$ のとき

$N=$

$n=3k+1$ のとき

$N=$

$n=3k+2$ のとき

$N=$

よって，N は（　　　　　）の倍数である。

〔1〕,〔2〕より，N は（　　　　　）の倍数である。

すなわち，$n(n+1)(2n+1)$ は（　　　　　）の倍数である。

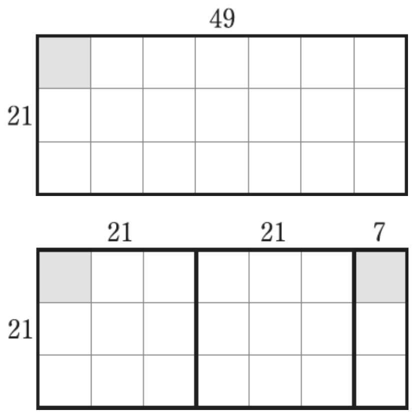
問6 n が整数のとき，$n(n+1)(5n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

2 ユークリッドの互除法

（教科書 p.76）

2 つの整数 49 と 21 の最大公約数は 7 である。

この最大公約数 7 は，右の図のような縦の長さが 21，横の長さが 49 の長方形を，正方形で敷き詰めるときの最も大きい正方形の 1 辺の長さである。



ここで，49 を 21 で割ると，除法の性質より

$$49 = 21 \cdot 2 + 7$$

となるから，はじめの長方形から 1 辺の長さが 21 の正方形を 2 つ取り除くと，縦の長さが 21，横の長さが 7 の長方形が残る。

図から，残った長方形に敷き詰めることができる最も大きい正方形の 1 辺の長さも 7 であることがわかる。

したがって，49 と 21 の最大公約数は，21 と 7 の最大公約数に等しい。

一般に，2 つの正の整数 a と b の最大公約数について，次のことが成り立つ。

互除法の原理
a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。 $r = 0$ のとき a と b の最大公約数は，b である。

互除法の原理を用いて，156 と 120 の最大公約数を求めてみよう。

$156 = 120 \cdot 1 + 36$ であるから

156 と 120 の最大公約数は，120 と 36 の最大公約数に等しい。

$120 = 36 \cdot 3 + 12$ であるから

120 と 36 の最大公約数は，36 と 12 の最大公約数に等しい。

$36 = 12 \cdot 3$ であるから，余りが 0 となり，

36 と 12 の最大公約数は 12 である。

すなわち，156 と 120 の最大公約数は 12 である。

このような割り算を，余りが 0 になるまでくり返すことによって，2 つの正の整数の最大公約数を必ず求めることができる。

この方法を（[1]　　　　　　　　　　）という。

例 4 ユークリッドの互除法を用いて，899 と 696 の最大公約数を求めよ。

$899 = 696 \cdot 1 + 203$

$696 =$

（899 と 696 の最大公約数）

＝（696 と 203 の最大公約数）

＝（203 と 87 の最大公約数）

＝（87 と 29 の最大公約数）

よって，899 と 696 の最大公約数は 29 である。

問7 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 315，255

(2) 7327，4741

参 考 **互除法の原理の証明**

（教科書 p.78）

2 つの正の整数 a，b について，次の互除法の原理を証明してみよう。

互除法の原理

a をb で割ったときの商を q，余りを rとすると
$r \neq 0$ のとき
a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

a と b の最大公約数を m，b と rの最大公約数を n とする。
除法の性質により
$a = bq + r \quad (0 < r < b)$ ……①
これより
$r = a - bq$ ……②
〔１〕 ②より，a と b の公約数は r の約数である。
すなわち，a とb の公約数は，b と r の公約数でもある。
とくに，a と b の最大公約数 m は，b と r の公約数となるから
$m \leqq n$
〔２〕 ①より，b と r の公約数は a の約数である。
すなわち，b と r の公約数は，a と b の公約数でもある。
とくに，b と r の最大公約数 n は，a と b の公約数となるから
$n \leqq m$
〔１〕,〔２〕より，$m = n$
したがって，a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

3 2元1次不定方程式

（教科書 p.79）

a，b，c を整数とするとき，x，y についての方程式

$$ax + by = c$$

を（[1]　　　　　　　　　）という。また，2 元 1 次不定方程式を満たす整数 x，y の組を，その 2 元 1 次不定方程式の（[2]　　　　　　　）という。

1次不定方程式 $ax+by=0$ の解法

（教科書 p.79）

互いに素である 2 つの整数について，次のような性質がある。

互いに素である 2 つの整数 a，b と整数 x，y について，$ax = by$ が成り立つとき，x は b の倍数であり，y は a の倍数である。

例 5 $2x = 3y$ が成り立つとき，2 と 3 は互いに素であるから，整数 x は（　　　　　　）であり，整数 y は（　　　　　　）である。

問8 次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $7x - 5y = 0$

(2) $5x + 6y = 0$

1次不定方程式 $ax+by=c$ の解法

（教科書 p.80）

1 次不定方程式は，1 組の整数解を見つけることによって，すべての整数解を求めることができる。

例題 3 1 次不定方程式 $5x + 3y = 7$ のすべての整数解を求めよ。

解 1 次不定方程式　$5x + 3y = 7$　　　　……①

の整数解の 1 組は $x = 2$，$y = -1$ であるから

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 7 \quad \cdots\cdots②$$

①－②より

すなわち　　　　　　　　　……③

ここで，5 と 3 は互いに素であるから，$x - 2$ は（　　　　　）の倍数である。

よって，n を整数として

と表される。これを③に代入して変形すると

したがって，求めるすべての整数解は

問9 1 組の整数解を見つけることによって，次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

（1） $5x-7y=1$

⑵ $3x+5y=45$

1次不定方程式とユークリッドの互除法

（教科書 p.81）

a と b が互いに素であるとき，1 次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解は，ユークリッドの互除法を用いて求めることができる。

例題 4 1 次不定方程式 $163x+78y=1$ の 1 組の整数解を求めよ。

解 ユークリッドの互除法により，163 と 78 の最大公約数を調べる。

$163=78\cdot2+7$ ……①

$78=7\cdot11+1$ ……②

$7=1\cdot7$

よって，163 と 78 は，最大公約数が（　　　　）であるから，互いに素である。

ここで，①，②において，余り以外の項を移項すると

$163-78\cdot2=7$ ……③

$\cdot$ ……④

③を④に代入すると

$163-78\cdot2$ $\cdot$

左辺を変形すると

$\cdot$ $\cdot$

したがって，1 次不定方程式 $163x+78y=1$ の 1 組の整数解は

問 10 1 次不定方程式 $223x+105y=1$ の 1 組の整数解を求めよ。

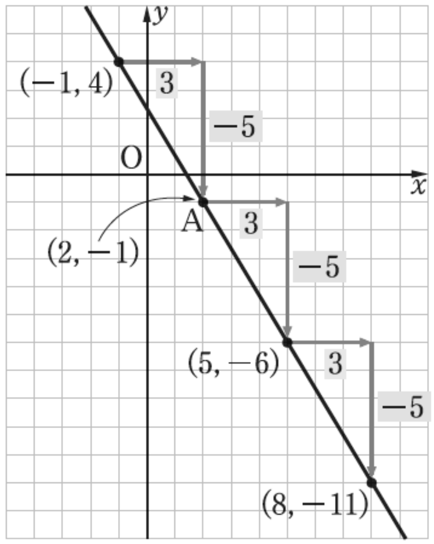
$223-105\cdot2=13$

-105 2

参 考　１次不定方程式の整数解の図形的意味

（教科書 p.82）

1 次不定方程式 $5x+3y=7$ ……①
とその整数解を図形的に考えてみよう。
①は　$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}$
と変形できるから，直線を表す。



ここで，①の整数解の 1 組である $x=2$，$y=-1$ を点 A$(2,\ -1)$ に対応させると，点 A は①の表す直線上の点であることがわかる。

このように，①の整数解は，①の直線上の x 座標と y 座標がともに整数であるような点の座標に対応している。

一方，①の表す直線は傾きが（　　　　　）であるから，点 A$(2,\ -1)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -5 だけ移動した点 $(5,\ -6)$ もこの直線上の点である。

同様に，n を整数とすると，点 A$(2,\ -1)$ を x 軸方向に $3n$，y 軸方向に $-5n$ だけ移動した点 $(3n+2,\ -5n-1)$ はすべて①の直線上にある。

よって，1 次不定方程式①のすべての整数解は次のように表される。

一般に，1 次不定方程式 $ax+by=c$ について，a と b が互いに素であり，1 組の整数解が $x=\alpha$，$y=\beta$ であるとき，この 1 次不定方程式は傾きが $-\frac{a}{b}$ の直線を表すから，この 1 次不定方程式のすべての整数解は

と表される。

問 題

（教科書 p.83）

11 2つの整数 a，b について，a を8で割ると7余り，b を12で割ると9余る。このとき，ab を4で割ったときの余りを求めよ。

12 15で割っても，18で割っても余りが11となるような正の整数をすべて求めよ。

13 nが整数のとき，次の式は6の倍数であることを証明せよ。

（1）$9n^2-3n$

（2）$n(n-1)(2n-1)$

14 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 759，161

(2) 8723，4235

15 $\frac{437}{551}$ を約分せよ。

16 次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $13x-5y=2$

(2) $93x+40y=1$

17 3 で割ると 1 余り，5 で割ると 2 余るような 2 桁の整数のうち最大のものを求めよ。

18 自然数 N を 3 で割ると商は q，余りは 2 である。また，N を 2 で割ると余りは 1 である。このとき，次の問に答えよ。

(1) q を 2 で割ったときの余りを求めよ。

(2) N を 6 で割ったときの余りを求めよ。

19 ある菓子が 5 個入りの箱と 8 個入りの箱で売られている。この 2 種類の箱を購入して，ちょうど 90 個の菓子を用意したい。5 個入りの箱と 8 個入りの箱の個数の組み合わせをすべて求めよ。ただし，1 種類の箱のみで購入してもよいものとする。

2 節 ユークリッドの互除法と不定方程式

1 除法の性質と整数の分類

除法の性質

（教科書 p.71）

一般に，整数の割り算において，次の（[1] 除法の性質 ）が成り立つ。

除法の性質
a を整数，b を正の整数とし，a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると $a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b$

上の除法の性質において，整数aが負の数のときは，次の例のように考える。

例 1 $-77 =$（ $6 \cdot (-13) + 1$ ）であるから，-77 を 6 で割ったときの商は（ -13 ），余りは（ 1 ）である。

問1 次の整数 a と正の整数 b について，a を b で割ったときの商 q および余り r を求め，$a = bq + r$ の形で表せ

(1) $a = 41$，$b = 9$

商は 4，余りは 5 であるから，　$41 = 9 \cdot 4 + 5$

(2) $a = -41$，$b = 9$

商は -5，余りは 4 であるから，　$-41 = 9 \cdot (-5) + 4$

(3) $a = 108$，$b = 14$

商は 7，余りは 10 であるから，　$108 = 14 \cdot 7 + 10$

(4) $a = -108$，$b = 14$

商は -8，余りは 4 であるから，　$-108 = 14 \cdot (-8) + 4$

例題 1 2 つの整数 a，b について，a を 6 で割ると 5 余り，bを 6 で割ると 4 余る。このとき，次の問に答えよ。

(1) a を 3 で割ったときの余りを求めよ。

(2) ab を 6 で割ったときの余りを求めよ。

解 a を 6 で割ると 5 余るから，k を整数として

$$a = 6k + 5$$

と表される。

また，b を 6 で割ると 4 余るから，l を整数として

$$b = 6l + 4$$

と表される。

(1) $a = 6k + 5$

$= 3 \cdot 2k + 5$

$= 3(2k + 1) + 2$

ゆえに，a を 3 で割ったときの余りは（ 2 ）である。

(2) $ab = (6k + 5)(6l + 4)$

$= 36kl + 24k + 30l + 20$

$= 6(6kl + 4k + 5l + 3) + 2$

ゆえに，ab を 6 で割ったときの余りは（ 2 ）である。

問2 2 つの整数 a，b について，a を 12 で割ると 7 余り，b を 12 で割ると 5 余る。このとき，次の問に答えよ。

(1) a を 4 で割ったときの余りを求めよ。

(2) ab を 12 で割ったときの余りを求めよ。

a を 12 で割ると 7 余るから，k を整数として

$$a = 12k + 7$$

と表される。

また，b を 12 で割ると 5 余るから，l を整数として

$$b = 12l + 5$$

と表される。

(1) $a = 12k + 7 = 4 \cdot 3k + 7 = 4(3k + 1) + 3$

ゆえに，a を 4 で割ったときの余りは 3 である。

(2) $ab = (12k + 7)(12l + 5) = 144kl + 60k + 84l + 35 = 12(12kl + 5k + 7l + 2) + 11$

ゆえに，ab を 12 で割ったときの余りは 11 である。

整数の分類

（教科書 p.73）

すべての整数を，ある正の整数で割ったときの余りによって分類することを考えてみよう。

たとえば，すべての整数を 2 で割ったときの余り 0 と 1 で分類したものが偶数と奇数であるから，k を整数として

偶数　$2k$，　　奇数　$2k+1$

と表される。

$$\begin{cases} \text{偶数} & \cdots,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots \\ \text{奇数} & \cdots,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots \end{cases}$$

一般に，すべての整数は正の整数 m で割ったときの余りによって分類すると，次のように表すことができる。

$\boldsymbol{mk},\ \boldsymbol{mk+1},\ \boldsymbol{mk+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{mk+(m-1)}$　（kは整数）

例 2 すべての整数を 5 で割ったときの余りによって分類すると

$5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$　（kは整数）

問3 例２にならって，すべての整数を 6 で割ったときの余りによって分類せよ。

$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$　（kは整数）

連続する整数の積

（教科書 p.74）

n を整数とするとき，連続する 2 つの整数 n, $n+1$ の一方は 2 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 2 の倍数である。

また，連続する 3 つの整数 n，$n+1$，$n+2$ のうち，少なくとも 1 つは 2 の倍数であり，さらにどれか 1 つは 3 の倍数である。ここで，2 と 3 は互いに素であるから，$n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である。

問4 n を整数とする。因数分解を利用することにより，次のことを証明せよ。

(1) n^2-n は 2 の倍数である。

$n^2-n=(n-1)n$

連続する 2 つの整数 $n-1$, n の一方は 2 の倍数であるから，$(n-1)n$ は 2 の倍数である。

よって，n^2-n は 2 の倍数である。

(2) n^3-n は 6 の倍数である。

$n^3-n=(n-1)n(n+1)$

連続する 3 つの整数 $n-1$，n，$n+1$ のうち，少なくとも 1 つは 2 の倍数であり，さらにどれか 1 つは 3 の倍数である。

ここで，2 と 3 は互いに素であるから，

$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数である。

よって，n^3-n は 6 の倍数である。

例 3 整数 n について，n^2 を 3 で割ったときの余りは，0 または 1 であることを示してみよう。

整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k$，　$3k+1$，　$3k+2$　（kは整数）

となる。

それぞれの場合について，n^2 を求めると

$n^2=(3k)^2$

$=9k^2=3\cdot3k^2$

$n^2=(3k+1)^2$

$=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n^2=(3k+2)^2$

$=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

ゆえに，n^2 を 3 で割ったときの余りは，0 または 1 である。

問5 整数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 または 1 であることを示せ。

整数 n を 4 で割ったときの余りによって分類すると

$4k$，　$4k+1$，　$4k+2$，　$4k+3$　（kは整数）

となる。

それぞれの場合について，n^2を求めると

$n^2=(4k)^2$

$=16k^2=4\cdot4k^2$

$n^2=(4k+1)^2$

$=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$

$n^2=(4k+2)^2$

$=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)$

$n^2=(4k+3)^2$

$=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1$

ゆえに，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 または 1 である。

応用例題 2 n が整数のとき，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

証明 $N=n(n+1)(2n+1)$とおく。
N が 6 の倍数であることを示すためには，N が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい。
〔１〕 $n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。
よって，N も 2 の倍数である。
〔２〕 整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k$,　$3k+1$,　$3k+2$　（kは整数）

それぞれの場合について，N を k で表すと
$n=3k$ のとき
$N=3k(3k+1)(6k+1)$

$n=3k+1$ のとき
$N=(3k+1)(3k+2)(6k+3)$
$=3(3k+1)(3k+2)(2k+1)$

$n=3k+2$ のとき
$N=(3k+2)(3k+3)(6k+5)$
$=3(3k+2)(k+1)(6k+5)$
よって，N は（　3　）の倍数である。
〔１〕,〔２〕より，N は（　6　）の倍数である。
すなわち，$n(n+1)(2n+1)$ は（　6　）の倍数である。

問6 n が整数のとき，$n(n+1)(5n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

$N=n(n+1)(5n+1)$ とおく。
N が 6 の倍数であることを示すためには，N が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい。
〔１〕 $n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。
よって，N も 2 の倍数である。
〔２〕 整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k$,　$3k+1$,　$3k+2$　（kは整数）

それぞれの場合について，N を k で表すと
$n=3k$ のとき
$N=3k(3k+1)(15k+1)$
$n=3k+1$ のとき
$N=(3k+1)(3k+2)(15k+6)$
$=3(3k+1)(3k+2)(5k+2)$
$n=3k+2$ のとき
$N=(3k+2)(3k+3)(15k+11)$
$=3(3k+2)(k+1)(15k+11)$
よって，N は 3 の倍数である。
〔１〕,〔２〕より，N は 6 の倍数である。
すなわち，$n(n+1)(5n+1)$ は 6 の倍数である。

2 ユークリッドの互除法

（教科書 p.76）

2 つの整数 49 と 21 の最大公約数は 7 である。

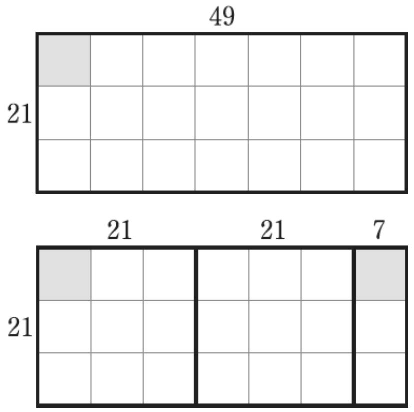
この最大公約数 7 は，右の図のような縦の長さが 21，横の長さが 49 の長方形を，正方形で敷き詰めるときの最も大きい正方形の 1 辺の長さである。

ここで，49 を 21 で割ると，除法の性質より

$49 = 21 \cdot 2 + 7$

となるから，はじめの長方形から 1 辺の長さが 21 の正方形を2つ取り除くと，縦の長さが 21，横の長さが 7 の長方形が残る。

図から，残った長方形に敷き詰めることができる最も大きい正方形の 1 辺の長さも 7 であることがわかる。



したがって，49 と 21 の最大公約数は，21 と 7 の最大公約数に等しい。

一般に，2 つの正の整数 a と b の最大公約数について，次のことが成り立つ。

互除法の原理
a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。 $r = 0$ のとき a と b の最大公約数は，b である。

互除法の原理を用いて，156 と 120 の最大公約数を求めてみよう。

$156 = 120 \cdot 1 + 36$ であるから

156 と 120 の最大公約数は，120 と 36 の最大公約数に等しい。

$120 = 36 \cdot 3 + 12$ であるから

120 と 36 の最大公約数は，36 と 12 の最大公約数に等しい。

$36 = 12 \cdot 3$ であるから，余りが 0 となり，

36 と 12 の最大公約数は 12 である。

すなわち，156 と 120 の最大公約数は 12 である。

このような割り算を，余りが 0 になるまでくり返すことによって，2 つの正の整数の最大公約数を必ず求めることができる。

この方法を（[1] ユークリッドの互除法 ）という。

例 4 ユークリッドの互除法を用いて，899 と 696 の最大公約数を求めよ。

$899 = 696 \cdot 1 + 203$

$696 = 203 \cdot 3 + 87$

$203 = 87 \cdot 2 + 29$

$87 = 29 \cdot 3$

（899 と 696 の最大公約数）
＝（696 と 203 の最大公約数）
＝（203 と 87 の最大公約数）
＝（87 と 29 の最大公約数）

よって，899 と 696 の最大公約数は 29 である。

問7 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 315，255

$315 = 255 \cdot 1 + 60$

$255 = 60 \cdot 4 + 15$

$60 = 15 \cdot 4$

よって，315 と 255 の最大公約数は 15 である。

(2) 7327，4741

$7327 = 4741 \cdot 1 + 2586$

$4741 = 2586 \cdot 1 + 2155$

$2586 = 2155 \cdot 1 + 431$

$2155 = 431 \cdot 5$

よって，7327 と 4741 の最大公約数は 431 である。

参 考　互除法の原理の証明

（教科書 p.78）

2 つの正の整数 a，b について，次の互除法の原理を証明してみよう。

互除法の原理
a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると $r \neq 0$ のとき a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

a と b の最大公約数を m，b と r の最大公約数を n とする。
除法の性質により

$a = bq + r$ （$0 < r < b$）　……①

これより

$r = a - bq$　……②

〔1〕 ②より，a と b の公約数は r の約数である。
すなわち，a と b の公約数は，b と r の公約数でもある。
とくに，a と b の最大公約数 m は，b と r の公約数となるから

$m \leqq n$

〔2〕 ①より，b と r の公約数は a の約数である。
すなわち，b と r の公約数は，a と b の公約数でもある。
とくに，b と r の最大公約数 n は，a と b の公約数となるから

$n \leqq m$

〔1〕,〔2〕より，$m = n$
したがって，a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

3 2元1次不定方程式

（教科書 p.79）

a，b，c を整数とするとき，x，y についての方程式

$$ax+by=c$$

を（[1] 2 元 1 次不定方程式 ）という。また，2 元 1 次不定方程式を満たす整数 x，y の組を，その 2 元 1 次不定方程式の（[2] 整数解 ）という。

1次不定方程式 $ax+by=0$ の解法

（教科書 p.79）

互いに素である 2 つの整数について，次のような性質がある。

互いに素である 2 つの整数 a，b と整数 x，y について，$ax=by$ が成り立つとき，x は b の倍数であり，y は a の倍数である。

例 5 $2x=3y$ が成り立つとき，2 と 3 は互いに素であるから，整数 x は（ 3 の倍数 ）であり，整数 y は（ 2 の倍数 ）である。

問8 次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $7x-5y=0$

$7x-5y=0$ ……①

①を変形すると　$7x=5y$ ……②

ここで，7 と 5 は互いに素であるから，x は 5 の倍数である。

よって，　$x=5n$　（n は整数） ……③

③を②に代入すると　$7\cdot 5n=5y$

よって，　$y=7n$

すなわち，①のすべての整数解は

$$\begin{cases} x=5n \\ y=7n \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

(2) $5x+6y=0$

$5x+6y=0$ ……①

①を変形すると　$5x=-6y$ ……②

ここで，5 と 6 は互いに素であるから，x は 6 の倍数である。

よって，　$x=6n$　（nは整数） ……③

③を②に代入すると　$5\cdot 6n=-6y$

よって，　$y=-5n$

すなわち，①のすべての整数解は

$$\begin{cases} x=6n \\ y=-5n \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

1次不定方程式 $ax+by=c$ の解法

（教科書 p.80）

1 次不定方程式は，1 組の整数解を見つけることによって，すべての整数解を求めることができる。

例題 3 1 次不定方程式 $5x+3y=7$ のすべての整数解を求めよ。

解 1 次不定方程式　$5x+3y=7$ ……①

の整数解の 1 組は $x=2$，$y=-1$ であるから

$5\cdot 2+3\cdot(-1)=7$ ……②

①－②より　$5(x-2)+3(y+1)=0$

すなわち　$5(x-2)=-3(y+1)$ ……③

ここで，5 と 3 は互いに素であるから，$x-2$ は（ 3 ）の倍数である。

よって，n を整数として

$x-2=3n$　すなわち　$x=3n+2$

と表される。これを③に代入して変形すると

$y+1=-5n$　すなわち　$y=-5n-1$

したがって，求めるすべての整数解は

$$\begin{cases} x=3n+2 \\ y=-5n-1 \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

問9 1 組の整数解を見つけることによって，次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $5x-7y=1$

$5x-7y=1$ ……①

の整数解の1組は $x=3$，$y=2$ であるから

$5\cdot3-7\cdot2=1$ ……②

①−②より　$5(x-3)-7(y-2)=0$

すなわち　$5(x-3)=7(y-2)$ ……③

ここで，5 と 7 は互いに素であるから，$x-3$ は 7 の倍数である。

よって，n を整数として

$x-3=7n$　すなわち　$x=7n+3$

と表される。これを③に代入して変形すると

$y-2=5n$　すなわち　$y=5n+2$

したがって，求めるすべての整数解は

$$\begin{cases} x=7n+3 \\ y=5n+2 \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

(2) $3x+5y=45$

$3x+5y=45$ ……①

の整数解の 1組は $x=0$，$y=9$ であるから

$3\cdot0+5\cdot9=45$ ……②

①−②より　$3(x-0)+5(y-9)=0$

すなわち　$3x=-5(y-9)$ ……③

ここで，3 と 5 は互いに素であるから，x は 5 の倍数である。

よって，n を整数として

$x=5n$

と表される。これを③に代入して変形すると

$y-9=-3n$　すなわち　$y=-3n+9$

したがって，求めるすべての整数解は

$$\begin{cases} x=5n \\ y=-3n+9 \end{cases} \quad (n\text{ は整数})$$

1次不定方程式とユークリッドの互除法

（教科書 p.81）

a と b が互いに素であるとき，1 次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解は，ユークリッドの互除法を用いて求めることができる。

例題 4 1 次不定方程式 $163x+78y=1$ の 1 組の整数解を求めよ。

解 ユークリッドの互除法により，163 と 78 の最大公約数を調べる。

$163=78\cdot2+7$ ……①

$78=7\cdot11+1$ ……②

$7=1\cdot7$

よって，163 と 78 は，最大公約数が（　1　）であるから，互いに素である。

ここで，①，②において，余り以外の項を移項すると

$163-78\cdot2=7$ ……③

$78-7\cdot11=1$ ……④

③を④に代入すると

$78-(163-78\cdot2)\cdot11=1$

左辺を変形すると

$163\cdot(-11)+78\cdot23=1$

したがって，1 次不定方程式 $163x+78y=1$ の 1 組の整数解は

$$\begin{cases} x=-11 \\ y=23 \end{cases}$$

問 10 1 次不定方程式 $223x+105y=1$ の 1 組の整数解を求めよ。

ユークリッドの互除法により，223 と 105 の最大公約数を調べる。

$223=105\cdot2+13$ ……①

$105=13\cdot8+1$ ……②

$13=1\cdot13$

よって，223 と 105 は，最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

ここで，①，②において，余り以外の項を移項すると

$223-105\cdot2=13$ ……③

$105-13\cdot8=1$ ……④

③を④に代入すると　$105-(223-105\cdot2)\cdot8=1$

左辺を変形すると　$223\cdot(-8)+105\cdot17=1$

したがって，1 次不定方程式 $223x+105y=1$ の 1 組の整数解は

$$\begin{cases} x=-8 \\ y=17 \end{cases}$$

参 考　1 次不定方程式の整数解の図形的意味

（教科書 p.82）

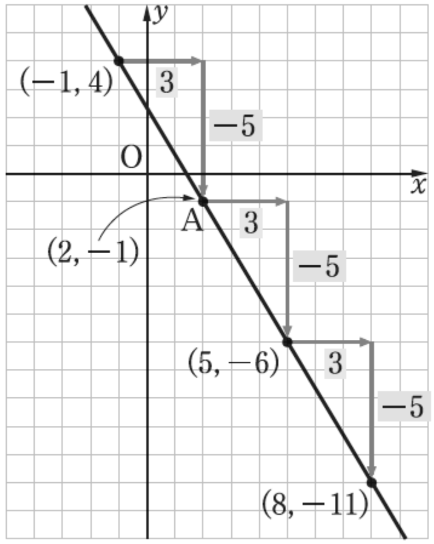
1 次不定方程式 $5x+3y=7$ ……①

とその整数解を図形的に考えてみよう。

①は $y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}$

と変形できるから，直線を表す。

ここで，①の整数解の 1 組である $x=2$，$y=-1$ を点 $\mathrm{A}(2,\ -1)$ に対応させると，点 A は①の表す直線上の点であることがわかる。



このように，①の整数解は，①の直線上の x 座標と y 座標がともに整数であるような点の座標に対応している。

一方，①の表す直線は傾きが（　$-\frac{5}{3}$　）であるから，点 $\mathrm{A}(2,\ -1)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -5 だけ移動した点 $(5,\ -6)$ もこの直線上の点である。

同様に，n を整数とすると，点 $\mathrm{A}(2,\ -1)$ を x 軸方向に $3n$，y 軸方向に $-5n$ だけ移動した点 $(3n+2,\ -5n-1)$ はすべて①の直線上にある。

よって，1 次不定方程式①のすべての整数解は次のように表される。

$$\begin{cases} x=3n+2 \\ y=-5n-1 \end{cases}\quad (n \text{ は整数})$$

一般に，1 次不定方程式 $ax+by=c$ について，a と b が互いに素であり，1 組の整数解が $x=\alpha$，$y=\beta$ であるとき，この 1 次不定方程式は傾きが $-\frac{a}{b}$ の直線を表すから，この 1 次不定方程式のすべての整数解は

$$\begin{cases} x=bn+\alpha \\ y=-an+\beta \end{cases}\quad (n \text{ は整数})$$

と表される。

問 題

（教科書 p.83）

11 2 つの整数 a，b について，a を 8 で割ると 7 余り，b を 12 で割ると 9 余る。このとき，ab を 4 で割ったときの余りを求めよ。

a を 8 で割ると 7 余るから，k を整数として

$a = 8k + 7$

と表される。

また，b を 12 で割ると 9 余るから，l を整数として

$b = 12l + 9$

と表される。このとき，

$$\begin{aligned} ab &= (8k+7)(12l+9) \\ &= 96kl + 72k + 84l + 63 \\ &= 4(24kl + 18k + 21l + 15) + 3 \end{aligned}$$

ゆえに，ab を 4 で割ったときの余りは 3 である。

12 15 で割っても，18 で割っても余りが 11 となるような正の整数をすべて求めよ。

求める正の整数を N とし，N を 15 で割った商を x，N を 18 で割った商を y とすると

$N = 15x + 11 = 18y + 11$ ……①

ただし，x，y は負でない整数である。

①より　$15x + 11 = 18y + 11$

すなわち　$15x = 18y$

両辺を 15 と 18 の最大公約数 3 で割ると

$5x = 6y$ ……②

5 と 6 は互いに素であるから，x は 6 の負でない倍数である。よって

$x = 6n$　$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

これを②に代入すると，$y = 5n$

したがって求めるすべての正の整数は，①より

$90n + 11$　$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

13 n が整数のとき，次の式は 6 の倍数であることを証明せよ。

(1) $9n^2 - 3n$

$N = 9n^2 - 3n$ とおく。N が 6 の倍数であることを示すためには，N が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい。

〔1〕$N = 3(3n^2 - n)$ であるから，N は 3 の倍数である。

〔2〕整数 n を 2 で割ったときの余りによって分類すると

$2k$,　$2k + 1$　（kは整数）

それぞれの場合について，N を k で表すと

$n = 2k$ のとき

$N = 9(2k)^2 - 3(2k) = 2(18k^2 - 3k)$

$n = 2k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} N &= 9(2k+1)^2 - 3(2k+1) = 36k^2 + 30k + 6 \\ &= 2(18k^2 + 15k + 3) \end{aligned}$$

よって，N は 2 の倍数である。

〔1〕，〔2〕より，N は 6 の倍数である。

すなわち，$9n^2 - 3n$ は 6 の倍数である。

(2) $n(n-1)(2n-1)$

$N = n(n-1)(2n-1)$ とおく。N が 6 の倍数であることを示すためには，N が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい。

〔1〕$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。

〔2〕整数 n を 3 で割ったときの余りによって分類すると

$3k$,　$3k + 1$,　$3k + 2$　（kは整数）

それぞれの場合について，N を k で表すと

$n = 3k$ のとき

$N = 3k(3k - 1)(6k - 1)$

$n = 3k + 1$ のとき

$N = (3k + 1)3k(6k + 1) = 3k(3k + 1)(6k + 1)$

$n = 3k + 2$ のとき

$N = (3k + 2)(3k + 1)(6k + 3) = 3(3k + 2)(3k + 1)(2k + 1)$

よって，N は 3 の倍数である。

〔1〕，〔2〕より，N は 6 の倍数である。

すなわち，$n(n-1)(2n-1)$ は 6 の倍数である。

14 ユークリッドの互除法を用いて，次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 759，161

$759 = 161 \cdot 4 + 115$

$161 = 115 \cdot 1 + 46$

$115 = 46 \cdot 2 + 23$

$46 = 23 \cdot 2$

よって，759 と 161 の最大公約数は 23 である。

(2) 8723，4235

$8723 = 4235 \cdot 2 + 253$

$4235 = 253 \cdot 16 + 187$

$253 = 187 \cdot 1 + 66$

$187 = 66 \cdot 2 + 55$

$66 = 55 \cdot 1 + 11$

$55 = 11 \cdot 5$

よって，8723 と 4235 の最大公約数は 11 である。

15 $\frac{437}{551}$ を約分せよ。

ユークリッドの互除法を用いて，551 と 437 の最大公約数を求めると

$551 = 437 \cdot 1 + 114$

$437 = 114 \cdot 3 + 95$

$114 = 95 \cdot 1 + 19$

$95 = 19 \cdot 5$

よって，551 と 437 の最大公約数は 19 である。

したがって

$$\frac{437}{551} = \frac{19 \cdot 23}{19 \cdot 29} = \frac{23}{29}$$

16 次の 1 次不定方程式のすべての整数解を求めよ。

(1) $13x - 5y = 2$

$13x - 5y = 2$ ……①

の整数解の1組は，$x = -1$，$y = -3$ であるから

$13 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3) = 2$ ……②

①−②より　$13(x + 1) - 5(y + 3) = 0$

すなわち　$13(x + 1) = 5(y + 3)$ ……③

ここで，13 と 5 は互いに素であるから，$x + 1$ は 5 の倍数である。

よって，n を整数として

$x + 1 = 5n$　すなわち　$x = 5n - 1$

これを③に代入して変形すると

$y + 3 = 13n$　すなわち　$y = 13n - 3$

したがって，求めるすべての整数解は

$$\begin{cases} x = 5n - 1 \\ y = 13n - 3 \end{cases}$$ （n は整数）

(2) $93x+40y=1$

ユークリッドの互除法を用いて

$93x+40y=1$ ……①

の１組の整数解を求める。

そのために，ユークリッドの互除法により，93 と 40 の最大公約数を求める。

$93=40\cdot 2+13$ ……②

$40=13\cdot 3+1$ ……③

$13=1\cdot 13$

よって，93 と 40 は最大公約数が 1 であるから，互いに素である。

余り以外の項を移項すると，②，③は

$93-40\cdot 2=13$ ……④

$40-13\cdot 3=1$ ……⑤

④を⑤に代入すると

$40-(93-40\cdot 2)\cdot 3=1$

左辺を変形すると

$93\cdot(-3)+40\cdot 7=1$ ……⑥

したがって，①の１組の整数解は

$\begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$

①−⑥より　$93(x+3)+40(y-7)=0$

すなわち　$93(x+3)=-40(y-7)$ ……⑦

93 と 40 は互いに素であるから，⑦より $x+3$ は 40 の倍数である。

よって，n を整数として

$x+3=40n$　すなわち　$x=40n-3$

これを⑦に代入して変形すると

$y-7=-93n$　すなわち　$y=-93n+7$

したがって，求めるすべての整数解は

$\begin{cases} x=40n-3 \\ y=-93n+7 \end{cases}$ （n は整数）

17 3 で割ると 1 余り，5 で割ると 2 余るような 2 桁の整数のうち最大のものを求めよ。

求める 2 桁の整数を N とする。N を 3 で割った商を x，N を 5 で割った商を y とおくと

$N=3x+1=5y+2$ ……①

①より　$3x-5y=1$ ……②

1 次不定方程式②の整数解の 1 つは，$x=2$，$y=1$ であるから

$3\cdot 2-5\cdot 1=1$ ……③

②−③より　$3(x-2)-5(y-1)=0$

すなわち　$3(x-2)=5(y-1)$ ……④

ここで，5 と 3 は互いに素であるから，$x-2$ は 5 の倍数である。

よって，n を整数として

$x-2=5n$　すなわち　$x=5n+2$

これを④に代入して変形すると

$y-1=3n$　すなわち　$y=3n+1$

したがって $N=3(5n+2)+1=15n+7$

ここで，N が 2 桁の整数であるから

$10\leqq N\leqq 99$　すなわち，　$10\leqq 15n+7\leqq 99$

よって　$0.2\leqq n\leqq 6.1\cdots$

これを満たす最大の整数 n は 6 である。

ゆえに，求める整数は，　$15\cdot 6+7=97$

18 自然数 N を 3 で割ると商は q，余りは 2 である。また，N を 2 で割ると余りは 1 である。このとき，次の問に答えよ。

(1) q を 2 で割ったときの余りを求めよ。

(2) N を 6 で割ったときの余りを求めよ。

N を 3 で割ると商は q，余りは 2 であるから，

$N = 3q + 2$ ……①

と表される。

(1) 整数 q を 2 で割ったときの余りによって分類すると

（ア） $2m$（イ） $2m + 1$ （mは整数）

それぞれの場合について，①の N を m で表すと

（ア） $N = 3 \cdot 2m + 2 = 2(3m + 1)$

（イ） $N = 3 \cdot (2m + 1) + 2 = 2(3m + 2) + 1$ ……②

ここで，N を 2 で割ると余りは 1 であることから，（イ）が適する。

ゆえに，q を 2 で割ったときの余りは 1 である。

(2) ②より， $N = 6m + 5$

ゆえに，N を 6 で割ったときの余りは 5 である。

19 ある菓子が 5 個入りの箱と 8 個入りの箱で売られている。この 2 種類の箱を購入して，ちょうど 90 個の菓子を用意したい。5 個入りの箱と 8 個入りの箱の個数の組み合わせをすべて求めよ。ただし，1 種類の箱のみで購入してもよいものとする。

5 個入りの箱の個数を x 個，8 個入りの箱の個数を y 個とすると，

$5x + 8y = 90$ ……①

不定方程式①の整数解の 1 組は，$x = 18$，$y = 0$ であるから，

$5 \cdot 18 + 8 \cdot 0 = 90$ ……②

①−②より $5(x - 18) + 8y = 0$

すなわち $5(x - 18) = -8y$ ……③

ここで，5 と 8 は互いに素であるから，$x - 18$ は 8 の倍数である。

よって，n を整数として

$x - 18 = 8n$ すなわち $x = 8n + 18$ ……④

これを③に代入して変形すると

$y = -5n$ ……⑤

ここで，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ であるから，④，⑤より

$-2.25 \leqq n \leqq 0$

n は整数であるから

$n = 0,\ -1,\ -2$

したがって，

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$$

ゆえに，5 個入りの箱と 8 個入りの箱の組み合わせは 18 箱と 0 箱，10 箱と 5 箱，2 箱と 10 箱