1 節 約数と倍数

1 約数と倍数

（教科書 p.60）

1，2，3，…を（[1]　　　　　　）または（[2]　　　　　　）といい，
-1，-2，-3，…を（[3]　　　　　　）という。正の整数，負の整数および 0 を合わせて
（[4]　　　　　　）という。

2 つの整数 a，b に対して

$$a = bc$$

となる整数 c が存在するとき，b を a の（[5]　　　　　　），a を b の（[6]　　　　　　）という。

例 1 $6 = 2 \cdot 3$ より，2 は 6 の（　　　　　　）である。
また，$6 = (-2) \cdot (-3)$ であるから，-2 も 6 の（　　　　　　）である

例 2 $6 = 2 \cdot 3$ より，6 は 2 の（　　　　　　）である。
また，$-6 = 2 \cdot (-3)$ であるから，-6 も 2 の（　　　　　　）である。

例 3 8 の正の約数は，（　　　　　　　　）である。
8 の正の倍数は，（　　　　　　　　　　　　）である。

問1 12 の正の約数をすべて求めよ。また，12 の正の倍数のうち 50 以下であるものをすべて求めよ。

いろいろな数の倍数

（教科書 p.61）

ある整数が 2 の倍数となるのは，一の位の数が 0，2，4，6，8 となるときであり，5 の倍数となるのは，一の位の数が 0，5 となるときである。

問2 3 桁の整数 n は，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a，b，c とすると，
$n = 100a + 10b + c$ となる。このとき，次のことを示せ。
(1) $a + b + c$ が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

(2) $a + b + c$ が 9 の倍数ならば，n は 9 の倍数である。

一般に，次のような倍数の判定法が知られている。

倍数の判定法

2 の倍数	……	一の位が 0，2，4，6，8
3 の倍数	……	各位の数の和が3の倍数
4 の倍数	……	下 2 桁が 4 の倍数(*)
5 の倍数	……	一の位が 0，5
6 の倍数	……	2 の倍数かつ 3 の倍数
8 の倍数	……	下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数	……	各位の数の和が 9 の倍数

（*）下 2 桁が 00 や 04 などは 4 の倍数とみなす。

例4 ⑴ 1430 は，一の位が 0 より（　　　　　　　　　　　　　　）

⑵ 1587 は，各位の数の和が $1+5+8+7=21$ より

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

⑶ 4132 は，下 2 桁の 32 が 4 の倍数であるから，（　　　　　　　　　　　　　）

⑷ 4134 は，一の位が 4 より（　　　　　　　　　　）

各位の数の和が $4+1+3+4=12$ より（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

⑸ 9104 は，下 3 桁の 104 が（　　　　　　　　　　　　　　）

問3 次の数は，2，3，4，5，6，8，9 のうち，どの数の倍数であるか答えよ。

⑴ 462

⑵ 6825

⑶ 10296

素因数分解

（教科書 p.62）

1 とその数のほかに約数がない正の整数を（7　　　　　　）といい，素数でない正の整数を（8　　　　　　）という。ただし，1 は素数，合成数のいずれでもないとする。

$$\text{正の整数}\begin{cases}1\\ \text{素数}\\ \quad (2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots)\\ \text{合成数}\\ \quad (4,\ 6,\ 8,\ 9,\ \cdots)\end{cases}$$

また，約数のことを（9　　　　　　）ともいい，因数が素数であるとき，これを（10　　　　　　）という。

すべての合成数は，素数の積の形で表すことができる。

正の整数を素数の積の形で表すことを（11　　　　　　　　　　）という。その表し方は，積の順序の違いを除いて 1 通りである。

例5 420 を素因数分解してみよう。

右のように，420 を小さい素数から順に割っていくと

$420 =$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 420 \\ \hline 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

問4 次の数を素因数分解せよ。

⑴ 175

⑵ 243

⑶ 1800

例題 1　$\sqrt{540n}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

解　540 を素因数分解すると，$540=2^2\cdot3^3\cdot5$ となるから

$$\sqrt{540n}=\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot5\cdot n}$$
$$=2\cdot3\sqrt{3\cdot5\cdot n}$$

ゆえに，条件を満たす最小の正の整数 n は

問5　$\sqrt{1440n}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

約数の個数と総和

（教科書 p.63）

素因数分解すると，与えられた整数のすべての約数が求めやすくなる。

例 6　108 の正の約数をすべて求めてみよう。

108 を素因数分解すると $108=$（　　　　　　　）

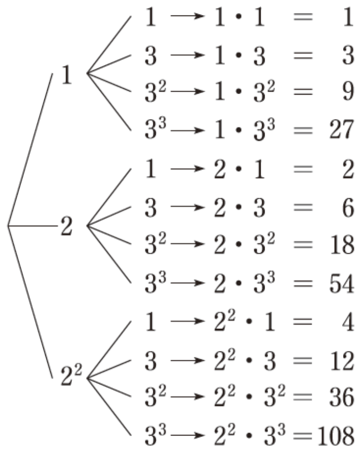
2^2 の正の約数は（　　　　　　　）

3^3 の正の約数は（　　　　　　　）

2^2 の約数のおのおのに 3^3 の約数をそれぞれ掛けると，108 のすべての約数が得られる。

よって，108 の正の約数は

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）



問6　次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1)　45

(2)　196

例題 2　72 の正の約数の総和を求めよ。

解　72 を素因数分解すると，$72=2^3\cdot3^2$ となるから，72 の正の約数は

$$2^a\cdot3^b\ \ (a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\quad b=0,\ 1,\ 2)$$

と表される。したがって，72 の正の約数の総和は

問7　次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1)　28

(2)　200

約数の利用

（教科書 p.64）

約数や倍数の性質を利用した問題について考えてみよう。ここでは，負の約数についても考えることにする。

例 7 $ab=5$を満たす整数 a，b の組をすべて求めてみよう。

a，b はともに 5 の約数であるから，a，b の組は次の 4 つとなる。

$$\begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

問8 次の等式を満たす整数 a，bの組をすべて求めよ。

(1) $ab=3$

(2) $ab=-6$

(3) $(a-2)(b-3)=4$

例題 3 $ab+3a+2b=1$ を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

解 $ab+3a+2b=1$ より

$$a(b+3)+2b=1$$
$$a(b+3)+2b+6=1+6$$
$$a(b+3)+2(b+3)=7$$
$$(a+2)(b+3)=7 \quad \cdots\cdots①$$

a，b は整数であるから，$a+2$，$b+3$ はともに 7 の約数である。

よって，①を満たす $a+2$ と $b+3$ の組は，次の 4 つとなる。

$$\begin{cases} a+2= \\ b+3= \end{cases},\quad \begin{cases} a+2= \\ b+3= \end{cases},\quad \begin{cases} a+2= \\ b+3= \end{cases},\quad \begin{cases} a+2= \\ b+3= \end{cases}$$

したがって，求める整数 a，b の組は

$$\begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases},\quad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

問9 次の等式を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

(1) $ab+4a+2b=3$

(2) $ab+2a-3b=10$

2 最大公約数と最小公倍数

公約数と最大公約数

（教科書 p.65）

2 つ以上の正の整数に共通な約数を，それらの（1　　　　　　　）という。また，公約数のうちで最大のものを（2　　　　　　　）という。

例 8 252 と 270 の最大公約数を求めてみよう。

252 と 270 をそれぞれ素因数分解すると

252 =

270 =

2 つの数に共通な素因数について，個数の少ない方を取り出して，

それらを掛け合わせたものは，公約数のうちで最大となる。

よって，252 と 270 の最大公約数は

$$
\begin{array}{rcccccccl}
252 = & 2 & \cdot 2 \cdot & 3 \cdot 3 & & & \cdot 7 & & \\
270 = & 2 & \cdot & 3 \cdot 3 & \cdot 3 & \cdot 5 & & & \\
\hline
 & 2 & \cdot & 3 \cdot 3 & & & & & = 18
\end{array}
$$

問 10 次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 56，140

(2) 165，360

(3) 275，312

公倍数と最小公倍数

（教科書 p.66）

2 つ以上の正の整数に共通な倍数を，それらの（3　　　　　　　）という。また，公倍数のうちで最小のものを（4　　　　　　　）という。

例 9 84 と 120 の最小公倍数を求めてみよう。

84 と 120 をそれぞれ素因数分解すると

84 =

120 =

2 つの数に共通な素因数について，個数の多い方を取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものは，公倍数のうちで最小となる。

よって，84 と 120 の最小公倍数は

$$
\begin{array}{rl}
84 = & 2 \cdot 2 \qquad \cdot 3 \qquad \cdot 7 \\
120 = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
\hline
 & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840
\end{array}
$$

問 11 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 16，28

(2) 168，196

(3) 450，980

3つの整数の最大公約数，最小公倍数

（教科書 p.67）

3 つ以上の正の整数についても，2 つの場合と同様にして，それらの最大公約数，最小公倍数を求めることができる。

例 10 36 と 54 と 180 の最大公約数および最小公倍数を求めてみよう。

これら 3 つの整数をそれぞれ素因数分解すると

$36 =$

$54 =$

$180 =$

よって，最大公約数は（　　　　　　　　）

最小公倍数は（　　　　　　　　）

問 12 次の 3 つの数の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(1) 36，48，84

(2) 1680，1800，2100

互いに素

（教科書 p.67）

2 つの正の整数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a と b は（5　　　　　　　　）であるという。

例 11 (1) $10 = 2 \cdot 5$，$21 = 3 \cdot 7$ であるから，10 と 21 は（　　　　　　　　）

(2) $35 = 5 \cdot 7$，$56 = 7 \cdot 8$ であるから，35 と 56 は（　　　　　　　　）

問 13 次の 2 つの数が互いに素であるかどうか判定せよ。

(1) 14，33

(2) 39，65

(3) 50，51

最大公約数と最小公倍数の性質

（教科書 p.68）

2 つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とするとき，g と l の間に成り立つ関係を調べてみよう。

たとえば，$a = 12$，$b = 30$ とするとき，それぞれを素因数分解すると

$a = 2^2 \cdot 3$，$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$

であるから，最大公約数 g と最小公倍数 l は

$g = 2 \cdot 3$，$l = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

である。

$$\begin{array}{l}
a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad\quad = 2g \\
b = 2 \quad\; \cdot 3 \cdot 5 = 5g \\
\hline
g = 2 \quad\; \cdot 3 \\
l = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot g
\end{array}$$

よって，a，b は最大公約数 g を用いて

$a = 2g$，$b = 5g$

と表される。このとき，g の係数 2 と 5 は互いに素である。

また，最小公倍数 l を最大公約数 g を用いて表すと

$l = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot g$

である。さらに，この式より

$gl = g \cdot (2 \cdot 5 \cdot g)$

すなわち $gl = 2g \cdot 5g = ab$

となる。

一般に，最大公約数と最小公倍数について，次のことが成り立つ。

最大公約数と最小公倍数の関係

2 つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，次の関係式が成り立つ。

1. $a = a'g$，$b = b'g$
   と表される。ただし，a' と b' は互いに素である。
2. $l = a'b'g$
3. $gl = ab$

例 12 積が 1080 であり，最小公倍数が 180 であるような 2 つの正の整数の最大公約数を求めてみよう。

2 つの正の整数を a，b とし，それらの最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，$gl = ab$ であるから

（　　　　　　　　　　）

よって　（　　　　　　　　　　）

したがって，最大公約数は（　　　　）である。

問 14 積が 6300 であり，最小公倍数が 420 であるような 2 つの正の整数の最大公約数を求めよ。

例題 4 和が 54 であり，最大公約数が 6 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

解 求める 2 つの正の整数を a，$b (a \leqq b)$ とする。

最大公約数が 6 であるから

$$a = 6a',\quad b = 6b' \quad \cdots\cdots①$$

とおける。ただし，a' と b' は互いに素であり，$a' \leqq b'$ である。

$a + b = 54$ であるから，①より　$6a' + 6b' = 54$

すなわち $a' + b' = 9$ 　　　　……②

②を満たすような，互いに素である a' と b' の組は

$$\begin{cases} a' = \\ b' = \end{cases},\quad \begin{cases} a' = \\ b' = \end{cases},\quad \begin{cases} a' = \\ b' = \end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

問 15 和が 192 であり，最大公約数が 12 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

問 題

（教科書 p.70）

1 5 桁の正の整数 54a1b が 72 で割り切れるように，百の位の数 a および一の位の数 b を定めよ。

2 次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 448

(2) 748

3 $\frac{18}{n+1}$ が正の整数となるような整数 n をすべて求めよ。

4 360の正の約数の個数および360の正の約数の総和を求めよ。

5 次の等式を満たす整数 a，bの組をすべて求めよ。

(1) $ab-4a+3b-15=0$

(2) $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$

(3) $2ab-a-b=1$

6 次の各組の整数の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(1) 504，540

(2) 234，390，819

7 縦 84cm，横 90cm の長方形の壁を，できるだけ大きな正方形のタイルですき間なく敷き詰めるとき，タイルの 1 辺の長さを求めよ。

8 縦 12cm，横 9cm の長方形の紙を同じ向きに並べて正方形をつくる。このとき，つくることができる正方形のうち，最も小さいものの 1 辺の長さを求めよ。

9 最大公約数が 7 であり，最小公倍数が 84 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

10 積が 3240 であり，最小公倍数が 180 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

1節 約数と倍数

1 約数と倍数

（教科書 p.60）

1, 2, 3, …を（1 正の整数 ）または（2 自然数 ）といい，
−1, −2, −3, …を（3 負の整数 ）という。正の整数，負の整数および 0 を合わせて
（4 整数 ）という。

2 つの整数 a, b に対して

$a = bc$

となる整数 c が存在するとき，b を a の（5 約数 ），a を b の（6 倍数 ）という。

例1 $6 = 2 \cdot 3$ より，2 は 6 の（ 約数 ）である。
また，$6 = (-2) \cdot (-3)$ であるから，−2 も 6 の（ 約数 ）である

例2 $6 = 2 \cdot 3$ より，6 は 2 の（ 倍数 ）である。
また，$-6 = 2 \cdot (-3)$ であるから，−6 も 2 の（ 倍数 ）である。

例3 8 の正の約数は，（ 1, 2, 4, 8 ）である。
8 の正の倍数は，（ 8, 16, 24, 32, 40, ・・・ ）である。

問1 12 の正の約数をすべて求めよ。また，12 の正の倍数のうち 50 以下であるものをすべて求めよ。

12 の正の約数は　1, 2, 3, 4, 6, 12

12 の 50 以下の正の倍数は　12, 24, 36, 48

いろいろな数の倍数

（教科書 p.61）

ある整数が 2 の倍数となるのは，一の位の数が 0, 2, 4, 6, 8 となるときであり，5 の倍数となるのは，一の位の数が 0, 5 となるときである。

問2 3 桁の整数 n は，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c とすると，
$n = 100a + 10b + c$ となる。このとき，次のことを示せ。

(1) $a + b + c$ が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

$n = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c)$
$= 3(33a + 3b) + (a + b + c)$

$a + b + c$ が 3 の倍数ならば，k を整数として $a + b + c = 3k$ と表されるから，

$n = 3(33a + 3b) + 3k = 3(33a + 3b + k)$

$33a + 3b + k$ は整数であるから，n は 3 の倍数である。

(2) $a + b + c$ が 9 の倍数ならば，n は 9 の倍数である。

$n = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c)$
$= 9(11a + b) + (a + b + c)$

$a + b + c$ が 9 の倍数ならば，k を整数として $a + b + c = 9k$ と表されるから，

$n = 9(11a + b) + 9k = 9(11a + b + k)$

$11a + b + k$ は整数であるから，n は 9 の倍数である。

一般に，次のような倍数の判定法が知られている。

倍数の判定法		
2 の倍数	……	一の位が 0, 2, 4, 6, 8
3 の倍数	……	各位の数の和が3の倍数
4 の倍数	……	下 2 桁が 4 の倍数(*)
5 の倍数	……	一の位が 0, 5
6 の倍数	……	2 の倍数かつ 3 の倍数
8 の倍数	……	下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数	……	各位の数の和が 9 の倍数

(*)下 2 桁が 00 や 04 などは 4 の倍数とみなす。

例 4 (1) 1430 は，一の位が 0 より（ 2 の倍数であり，5 の倍数でもある。 ）

(2) 1587 は，各位の数の和が $1+5+8+7=21$ より

（ 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。 ）

(3) 4132 は，下 2 桁の 32 が 4 の倍数であるから，（ 4 の倍数である。 ）

(4) 4134 は，一の位が 4 より（ 2 の倍数であり， ）

各位の数の和が $4+1+3+4=12$ より（ 3 の倍数であるから，6 の倍数である。 ）

(5) 9104 は，下 3 桁の 104 が（ 8 の倍数であるから，8 の倍数である。 ）

問3 次の数は，2，3，4，5，6，8，9 のうち，どの数の倍数であるか答えよ。

(1) 462

一の位が 2 より 2 の倍数であり，各位の数の和が $4+6+2=12$ より 3 の倍数であるから，6 の倍数である。また，9 の倍数ではない。

下 2 桁 62 が 4 の倍数でないから，4 の倍数でない。よって，8 の倍数でもない。一の位が 0，5 ではないから，5 の倍数ではない。

したがって，462 は 2，3，6 の倍数である。

(2) 6825

一の位が 5 より 5 の倍数であるが，2 の倍数ではない。よって，4，6，8 の倍数でもない。

各位の数の和が $6+8+2+5=21$ より 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。

したがって，6825 は，3，5 の倍数である。

(3) 10296

一の位が 6 より 2 の倍数であり，各位の数の和が $1+0+2+9+6=18$ より 3，9 の倍数である。よって，6 の倍数でもある。下 3 桁の 296 が 8 の倍数であるから，8 の倍数である。よって，4 の倍数でもある。一の位が 0，5 ではないから，5 の倍数ではない。

したがって，10296 は 2，3，4，6，8，9 の倍数である。

素因数分解

（教科書 p.62）

1 とその数のほかに約数がない正の整数を（[7] 素数 ）といい，素数でない正の整数を（[8] 合成数 ）という。ただし，1 は素数，合成数のいずれでもないとする。

正の整数 $\left\{\begin{array}{l} 1 \\ \text{素数} \\ \quad (2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots) \\ \text{合成数} \\ \quad (4,\ 6,\ 8,\ 9,\ \cdots) \end{array}\right.$

また，約数のことを（[9] 因数 ）ともいい，因数が素数であるとき，これを（[10] 素因数 ）という。

すべての合成数は，素数の積の形で表すことができる。

正の整数を素数の積の形で表すことを（[11] 素因数分解 ）という。その表し方は，積の順序の違いを除いて 1 通りである。

例 5 420 を素因数分解してみよう。

右のように，420 を小さい素数から順に割っていくと

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 420 \\ \hline 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

問4 次の数を素因数分解せよ。

(1) 175

$175 = 5^2 \cdot 7$

(2) 243

$243 = 3^5$

(3) 1800

$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

例題 1　$\sqrt{540n}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

解　540 を素因数分解すると，$540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ となるから

$$\sqrt{540n}=\sqrt{2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot n}$$
$$=2\cdot 3\sqrt{3\cdot 5\cdot n}$$

ゆえに，条件を満たす最小の正の整数 n は

$n=3\cdot 5=15$

問5　$\sqrt{1440n}$ が整数となるような正の整数 n のうち，最小のものを求めよ。

1440 を素因数分解すると，$1440=2^5\cdot 3^2\cdot 5$ となるから

$$\sqrt{1440n}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot n}=2^2\cdot 3\sqrt{2\cdot 5\cdot n}$$

ゆえに，条件を満たす最小の正の整数 n は

$n=2\cdot 5=10$

約数の個数と総和

（教科書 p.63）

素因数分解すると，与えられた整数のすべての約数が求めやすくなる。

例 6　108 の正の約数をすべて求めてみよう。

108 を素因数分解すると$108=$（　$2^2\cdot 3^3$　）

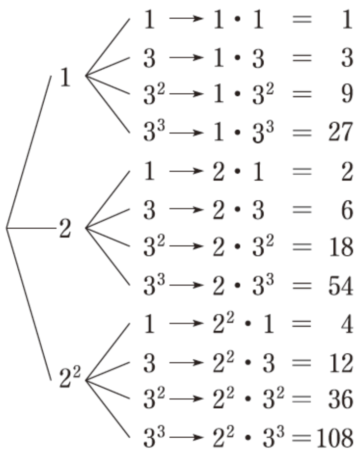
2^2 の正の約数は（　1，2，2^2　）

3^3 の正の約数は（　1，3，3^2，3^3　）

2^2 の約数のおのおのに 3^3 の約数をそれぞれ掛けると，108 のすべての約数が得られる。

よって，108 の正の約数は

（　1，2，3，4，6，9，12，18，27，36，54，108　）



問6　次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 45

45 を素因数分解すると $45=3^2\cdot 5$

3^2の正の約数は　1，3，3^2

5 の正の約数は　1，5

3^2 の約数のおのおのに 5 の約数をそれぞれ掛けると，45 のすべての約数が得られる。よって，45 の正の約数は

1，3，5，9，15，45

(2) 196

196 を素因数分解すると $196=2^2\cdot 7^2$

2^2 の正の約数は　1，2，2^2

7^2 の正の約数は　1，7，7^2

2^2 の約数のおのおのに 7^2 の約数をそれぞれ掛けると，196 のすべての約数が得られる。

よって，196 の正の約数は

1，2，4，7，14，28，49，98，196

例題 2　72 の正の約数の総和を求めよ。

解　72 を素因数分解すると，$72=2^3\cdot 3^2$ となるから，72 の正の約数は

$2^a\cdot 3^b$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\quad b=0,\ 1,\ 2)$

と表される。したがって，72 の正の約数の総和は

$$1+2+2^2+2^3+3+2\cdot 3+2^2\cdot 3+2^3\cdot 3+3^2+2\cdot 3^2+2^2\cdot 3^2+2^3\cdot 3^2$$
$$=1+2+2^2+2^3+3(1+2+2^2+2^3)+3^2(1+2+2^2+2^3)$$
$$=(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\cdot 13=195$$

問7　次の数の正の約数の総和を求めよ。

(1) 28

28 を素因数分解すると，$28=2^2\cdot 7$ となるから，28 の正の約数は

$2^a\cdot 7^b$ $(a=0,\ 1,\ 2\quad b=0,\ 1)$

と表される。したがって，28 の正の約数の総和は

$$1+2+2^2+7+2\cdot 7+2^2\cdot 7$$
$$=1+2+2^2+7(1+2+2^2)$$
$$=(1+2+2^2)(1+7)=7\cdot 8=56$$

(2) 200

200 を素因数分解すると，$200=2^3\cdot 5^2$ となるから，200 の正の約数の総和は

$2^a\cdot 5^b$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\quad b=0,\ 1,\ 2)$

と表される。したがって，200 の正の約数の総和は

$$1+2+2^2+2^3+5+2\cdot 5+2^2\cdot 5+2^3\cdot 5+5^2+2\cdot 5^2+2^2\cdot 5^2+2^3\cdot 5^2$$
$$=1+2+2^2+2^3+5(1+2+2^2+2^3)+5^2(1+2+2^2+2^3)$$
$$=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=15\cdot 31=465$$

約数の利用

（教科書 p.64）

約数や倍数の性質を利用した問題について考えてみよう。ここでは，負の約数についても考えることにする。

例 7 $ab=5$を満たす整数 a，b の組をすべて求めてみよう。

a，b はともに 5 の約数であるから，a，b の組は次の 4 つとなる。

$$\begin{cases}a=1\\b=5,\end{cases}\begin{cases}a=5\\b=1,\end{cases}\begin{cases}a=-1\\b=-5,\end{cases}\begin{cases}a=-5\\b=-1\end{cases}$$

問8 次の等式を満たす整数 a，bの組をすべて求めよ。

(1) $ab=3$

a，b はともに 3 の約数であるから，a，b の組は

$$\begin{cases}a=1\\b=3,\end{cases}\begin{cases}a=3\\b=1,\end{cases}\begin{cases}a=-1\\b=-3,\end{cases}\begin{cases}a=-3\\b=-1\end{cases}$$

(2) $ab=-6$

a，b はともに -6 の約数であるから，a，b の組は

$$\begin{cases}a=1\\b=-6,\end{cases}\begin{cases}a=-6\\b=1,\end{cases}\begin{cases}a=2\\b=-3,\end{cases}\begin{cases}a=-3\\b=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-1\\b=6,\end{cases}\begin{cases}a=6\\b=-1,\end{cases}\begin{cases}a=-2\\b=3,\end{cases}\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$$

(3) $(a-2)(b-3)=4$

a，b はともに整数であるから，$a-2$，$b-3$ はともに 4 の約数である。よって

$$\begin{cases}a-2=1\\b-3=4,\end{cases}\begin{cases}a-2=4\\b-3=1,\end{cases}\begin{cases}a-2=2\\b-3=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-2=-1\\b-3=-4,\end{cases}\begin{cases}a-2=-4\\b-3=-1,\end{cases}\begin{cases}a-2=-2\\b-3=-2\end{cases}$$

ゆえに，求める整数 a，b の組は

$$\begin{cases}a=3\\b=7,\end{cases}\begin{cases}a=6\\b=4,\end{cases}\begin{cases}a=4\\b=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=1\\b=-1,\end{cases}\begin{cases}a=-2\\b=2,\end{cases}\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$$

例題 3 $ab+3a+2b=1$ を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

解 $ab+3a+2b=1$ より

$$a(b+3)+2b=1$$
$$a(b+3)+2b+6=1+6$$
$$a(b+3)+2(b+3)=7$$
$$(a+2)(b+3)=7 \quad \cdots\cdots①$$

a，b は整数であるから，$a+2$，$b+3$ はともに 7 の約数である。

よって，①を満たす $a+2$ と $b+3$ の組は，次の 4 つとなる。

$$\begin{cases}a+2=1\\b+3=7,\end{cases}\begin{cases}a+2=7\\b+3=1,\end{cases}\begin{cases}a+2=-1\\b+3=-7,\end{cases}\begin{cases}a+2=-7\\b+3=-1\end{cases}$$

したがって，求める整数 a，b の組は

$$\begin{cases}a=-1\\b=4,\end{cases}\begin{cases}a=5\\b=-2,\end{cases}\begin{cases}a=-3\\b=-10,\end{cases}\begin{cases}a=-9\\b=-4\end{cases}$$

問9 次の等式を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。

(1) $ab+4a+2b=3$

$ab+4a+2b=3$ より

$a(b+4)+2b+8=3+8$

$a(b+4)+2(b+4)=11$

$(a+2)(b+4)=11$ ……①

a，b は整数であるから，$a+2$，$b+4$ はともに 11 の約数である。

よって，①を満たす $a+2$ と $b+4$ の組は

$$\begin{cases} a+2=1 \\ b+4=11, \end{cases} \begin{cases} a+2=11 \\ b+4=1, \end{cases} \begin{cases} a+2=-1 \\ b+4=-11, \end{cases} \begin{cases} a+2=-11 \\ b+4=-1 \end{cases}$$

したがって，求める整数 a，b の組は

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=7, \end{cases} \begin{cases} a=9 \\ b=-3, \end{cases} \begin{cases} a=-3 \\ b=-15, \end{cases} \begin{cases} a=-13 \\ b=-5 \end{cases}$$

(2) $ab+2a-3b=10$

$ab+2a-3b=10$ より

$a(b+2)-3b-6=10-6$

$a(b+2)-3(b+2)=4$

$(a-3)(b+2)=4$ ……①

a，b は整数であるから，$a-3$，$b+2$ はともに 4 の約数である。

よって，①を満たす $a-3$ と $b+2$ の組は

$$\begin{cases} a-3=1 \\ b+2=4, \end{cases} \begin{cases} a-3=4 \\ b+2=1, \end{cases} \begin{cases} a-3=2 \\ b+2=2, \end{cases} \begin{cases} a-3=-1 \\ b+2=-4, \end{cases} \begin{cases} a-3=-4 \\ b+2=-1, \end{cases} \begin{cases} a-3=-2 \\ b+2=-2 \end{cases}$$

したがって，求める整数 a，b の組は

$$\begin{cases} a=4 \\ b=2, \end{cases} \begin{cases} a=7 \\ b=-1, \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=0, \end{cases} \begin{cases} a=2 \\ b=-6, \end{cases} \begin{cases} a=-1 \\ b=-3, \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$$

2 最大公約数と最小公倍数

公約数と最大公約数

（教科書 p.65）

2 つ以上の正の整数に共通な約数を，それらの（[1] 公約数 ）という。また，公約数のうちで最大のものを（[2] 最大公約数 ）という。

例 8 252 と 270 の最大公約数を求めてみよう。

$$\begin{aligned} 252 &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 \\ 270 &= 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 \\ \hline & \ 2\cdot 3\cdot 3 \qquad = 18 \end{aligned}$$

252 と 270 をそれぞれ素因数分解すると

$252 = 2^2\cdot 3^2\cdot 7$

$270 = 2\cdot 3^3\cdot 5$

2 つの数に共通な素因数について，個数の少ない方を取り出して，それらを掛け合わせたものは，公約数のうちで最大となる。

よって，252 と 270 の最大公約数は

$2\cdot 3^2 = 18$

問 10 次の 2 つの数の最大公約数を求めよ。

(1) 56，140

56 と 140 をそれぞれ素因数分解すると

$56 = 2^3\cdot 7$

$140 = 2^2\cdot 5\cdot 7$

よって，56 と 140 の最大公約数は

$2^2\cdot 7 = 28$

(2) 165，360

165 と 360 をそれぞれ素因数分解すると

$165 = 3\cdot 5\cdot 11$

$360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$

よって，165 と 360 の最大公約数は

$3\cdot 5 = 15$

(3) 275，312

275 と 312 をそれぞれ素因数分解すると

$275 = 5^2\cdot 11$

$312 = 2^3\cdot 3\cdot 13$

よって，275 と 312 の最大公約数は

1

公倍数と最小公倍数

（教科書 p.66）

2 つ以上の正の整数に共通な倍数を，それらの（[3] 公倍数 ）という。また，公倍数のうちで最小のものを（[4] 最小公倍数 ）という。

例 9 84 と 120 の最小公倍数を求めてみよう。

$$\begin{aligned} 84 &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 \\ 120 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 \\ \hline & \ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 840 \end{aligned}$$

84 と 120 をそれぞれ素因数分解すると

$84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$

$120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$

2 つの数に共通な素因数について，個数の多い方を取り出し，共通でない素因数もすべて取り出して，それらを掛け合わせたものは，公倍数のうちで最小となる。

よって，84 と 120 の最小公倍数は

$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 840$

問 11 次の 2 つの数の最小公倍数を求めよ。

(1) 16，28

16 と 28 をそれぞれ素因数分解すると

$16 = 2^4$

$28 = 2^2\cdot 7$

よって，16 と 28 の最小公倍数は

$2^4\cdot 7 = 112$

(2) 168，196

168 と 196 をそれぞれ素因数分解すると

$168 = 2^3\cdot 3\cdot 7$

$196 = 2^2\cdot 7^2$

よって，168 と 196 の最小公倍数は

$2^3\cdot 3\cdot 7^2 = 1176$

(3) 450，980

450 と 980 をそれぞれ素因数分解すると

$450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$

$980 = 2^2\cdot 5\cdot 7^2$

よって，450 と 980 の最小公倍数は

$2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 = 44100$

3つの整数の最大公約数，最小公倍数

（教科書 p.67）

３つ以上の正の整数についても，２つの場合と同様にして，それらの最大公約数，最小公倍数を求めることができる。

例 10 36 と 54 と 180 の最大公約数および最小公倍数を求めてみよう。

これら３つの整数をそれぞれ素因数分解すると

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$54 = 2 \cdot 3^3$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって，最大公約数は（　$2 \cdot 3^2 = 18$　）

最小公倍数は（　$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$　）

問 12 次の３つの数の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(1) 36，48，84

36，48，84 をそれぞれ素因数分解すると

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$48 = 2^4 \cdot 3$

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

よって，最大公約数は　$2^2 \cdot 3 = 12$

最小公倍数は　$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$

(2) 1680，1800，2100

1680，1800，2100 をそれぞれ素因数分解すると

$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

よって，最大公約数は　$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

最小公倍数は　$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25200$

互いに素

（教科書 p.67）

２つの正の整数 a，b の最大公約数が１であるとき，a と b は（[5]　互いに素　）であるという。

例 11 (1) $10 = 2 \cdot 5$，$21 = 3 \cdot 7$ であるから，10 と 21 は（　互いに素である。　）

(2) $35 = 5 \cdot 7$，$56 = 7 \cdot 8$ であるから，35 と 56 は（　互いに素でない。　）

問 13 次の２つの数が互いに素であるかどうか判定せよ。

(1) 14，33

$14 = 2 \cdot 7$，$33 = 3 \cdot 11$ であるから，14 と 33 は互いに素である。

(2) 39，65

$39 = 3 \cdot 13$，$65 = 5 \cdot 13$ であるから，39 と 65 は互いに素でない。

(3) 50，51

$50 = 2 \cdot 5^2$，$51 = 3 \cdot 17$ であるから，50 と 51 は互いに素である。

最大公約数と最小公倍数の性質

（教科書 p.68）

２つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とするとき，g と l の間に成り立つ関係を調べてみよう。

たとえば，$a = 12$，$b = 30$ とするとき，それぞれを素因数分解すると

$a = 2^2 \cdot 3$，$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$

であるから，最大公約数 g と最小公倍数 l は

$g = 2 \cdot 3$，$l = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

である。

$$\begin{array}{l}
a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2g \\
b = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5g \\
\hline
g = 2 \cdot 3 \\
l = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot g
\end{array}$$

よって，a，b は最大公約数 g を用いて

$a = 2g$，$b = 5g$

と表される。このとき，g の係数 2 と 5 は互いに素である。

また，最小公倍数 l を最大公約数 g を用いて表すと

$l = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot g$

である。さらに，この式より

$gl = g \cdot (2 \cdot 5 \cdot g)$

すなわち $gl = 2g \cdot 5g = ab$

となる。

一般に，最大公約数と最小公倍数について，次のことが成り立つ。

最大公約数と最小公倍数の関係
2 つの正の整数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，次の関係式が成り立つ。 $\boxed{1}$ $a=a'g$，$b=b'g$ と表される。ただし，a' と b' は互いに素である。 $\boxed{2}$ $l=a'b'g$ $\boxed{3}$ $gl=ab$

例 12 積が 1080 であり，最小公倍数が 180 であるような 2 つの正の整数の最大公約数を求めてみよう。

2 つの正の整数を a，b とし，それらの最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，$gl=ab$ であるから

（ $180g=1080$ ）

よって （ $g=\frac{1080}{180}=6$ ）

したがって，最大公約数は（ 6 ）である。

問 14 積が 6300 であり，最小公倍数が 420 であるような 2 つの正の整数の最大公約数を求めよ。

2 つの正の整数を a，b とし，それらの最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，$gl=ab$ であるから

$$420g=6300$$

よって $g=\frac{6300}{420}=15$

したがって，最大公約数は 15 である。

例題 4 和が 54 であり，最大公約数が 6 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

解 求める 2 つの正の整数を a，$b(a\leqq b)$ とする。

最大公約数が 6 であるから

$$a=6a',\quad b=6b' \quad \cdots\cdots①$$

とおける。ただし，a' と b' は互いに素であり，$a'\leqq b'$ である。

$a+b=54$ であるから，①より $6a'+6b'=54$

すなわち $a'+b'=9$ ……②

②を満たすような，互いに素である a' と b' の組は

$$\begin{cases}a'=1\\b'=8,\end{cases}\quad\begin{cases}a'=2\\b'=7,\end{cases}\quad\begin{cases}a'=4\\b'=5\end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

6 と 48，　12 と 42，　24 と 30

問 15 和が 192 であり，最大公約数が 12 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，$b(a\leqq b)$ とする。

最大公約数が 12 であるから

$$a=12a',\quad b=12b' \quad \cdots\cdots①$$

とおける。ただし，a' と b' は互いに素であり，$a'\leqq b'$ である。

$a+b=192$ であるから，①より $12a'+12b'=192$

すなわち $a'+b'=16$ ……②

②を満たすような，互いに素である a' と b' の組は

$$\begin{cases}a'=1\\b'=15,\end{cases}\quad\begin{cases}a'=3\\b'=13,\end{cases}\quad\begin{cases}a'=5\\b'=11,\end{cases}\quad\begin{cases}a'=7\\b'=9\end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，①より

12 と 180，　36 と 156，　60 と 132，　84 と 108

問 題

（教科書 p.70）

1 5 桁の正の整数 54a1b が 72 で割り切れるように，百の位の数 a および一の位の数 b を定めよ。

$72=8\cdot 9$ で，8 と 9 は互いに素であるから，54a1b が 72 で割り切れるためには，8 と 9 の両方で割り切れるように a，b の値を定めればよい。

まず，54a1b が 8 で割り切れるためには，4 で割り切れなければならない。その条件は，下2 桁の 1b が 4 の倍数になることから

$1b=12$ または $1b=16$

よって　$b=2$ または $b=6$

(i) $b=2$ のとき

54a12 が 9 で割り切れるためには，各位の数の和 $5+4+a+1+2=12+a$ が 9 の倍数となればよい。

$12\leqq 12+a\leqq 21$ であるから　$12+a=18$

よって　$a=6$

(ii) $b=6$ のとき

54a16 が 9 で割り切れるためには，各位の数の和 $5+4+a+1+6=16+a$ が 9 の倍数となればよい。

$16\leqq 16+a\leqq 25$ であるから　$16+a=18$

よって　$a=2$

下 3 桁の 216 は 8 の倍数であるので，適する。

したがって　$a=2$，$b=6$

2 次の数の正の約数をすべて求めよ。

(1) 448

448 を素因数分解すると

$448=2^6\cdot 7$

2^6 の正の約数は　1，2，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6

7 の正の約数は　1，7

2^6 の約数のおのおのに 7 の約数をそれぞれ掛けると，448 のすべての正の約数が得られる。

よって，448 の正の約数は

1，2，4，7，8，14，16，28，32，56，64，112，224，448

(2) 748

748 を素因数分解すると

$748=2^2\cdot 11\cdot 17$

2^2の正の約数は　1，2，2^2

11の正の約数は　1，11

17の正の約数は　1，17

2^2 の約数のおのおのに 11 の約数をそれぞれ掛け，さらにそのおのおのに 17 の約数をそれぞれ掛けると，748 のすべての約数が得られる。

よって，748 の正の約数は

1，2，4，11，17，22，34，44，68，187，374，748

3 $\frac{18}{n+1}$ が正の整数となるような整数 n をすべて求めよ。

$\frac{18}{n+1}$ が正の整数となるためには，$n+1$ が 18 の正の約数となればよい。

18 を素因数分解すると　$18=2\cdot 3^2$

したがって，18 の正の約数は

1，2，3，6，9，18

よって　$n+1=1$，2，3，6，9，18

ゆえに　$n=0$，1，2，5，8，17

4 360 の正の約数の個数および 360 の正の約数の総和を求めよ。

360 を素因数分解すると，$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ となるから，

360 の正の約数は

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$($a = 0$，1，2，3，　$b = 0$，1，2，　$c = 0$，1)

と表される。

したがって，360 の正の約数の個数は，

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (個)

また，360 の正の約数の総和は

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5)$

$= 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170$

5 次の等式を満たす整数 a，bの組をすべて求めよ。

(1) $ab - 4a + 3b - 15 = 0$

$ab - 4a + 3b - 15 = 0$ より

$a(b - 4) + 3b = 15$

$a(b - 4) + 3b - 12 = 15 - 12$

$a(b - 4) + 3(b - 4) = 3$

$(a + 3)(b - 4) = 3$　　　……①

a，b は整数であるから，$a + 3$，$b - 4$ はともに 3 の約数である。

よって，①を満たす $a + 3$ と $b - 4$ の組は

$\begin{cases} a + 3 = 1 \\ b - 4 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} a + 3 = 3 \\ b - 4 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a + 3 = -1 \\ b - 4 = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} a + 3 = -3 \\ b - 4 = -1 \end{cases}$

したがって，整数 a，b の組は

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -6 \\ b = 3 \end{cases}$

(2) $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$

$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$　　　……①

ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ である。

①　両辺に ab を掛けて

$2b + 3a = ab$

$ab - 3a - 2b = 0$

$a(b - 3) - 2b = 0$

$a(b - 3) - 2b + 6 = 6$

$a(b - 3) - 2(b - 3) = 6$

$(a - 2)(b - 3) = 6$　　　……②

a，b は整数であるから，$a - 2$，$b - 3$ はともに 6 の約数である。

よって，②を満たす $a - 2$ と $b - 3$ の組は

$\begin{cases} a - 2 = 1 \\ b - 3 = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = 6 \\ b - 3 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = 2 \\ b - 3 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = 3 \\ b - 3 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = -1 \\ b - 3 = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = -6 \\ b - 3 = -1 \end{cases}$,

$\begin{cases} a - 2 = -2 \\ b - 3 = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} a - 2 = -3 \\ b - 3 = -2 \end{cases}$

したがって，a，b($a \neq 0$，$b \neq 0$) の組は

$\begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

(3) $2ab-a-b=1$

$2ab-a-b=1$ より

$a(2b-1)-b=1$

$2a(2b-1)-2b=2$

$2a(2b-1)-2b+1=2+1$

$2a(2b-1)-(2b-1)=3$

$(2a-1)(2b-1)=3$ ……①

a，b は整数であるから，$2a-1$，$2b-1$ はともに 3 の約数である。

よって，①を満たす $2a-1$，$2b-1$ の組は

$\begin{cases}2a-1=1\\2b-1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}2a-1=3\\2b-1=1,\end{cases}$ $\begin{cases}2a-1=-1\\2b-1=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}2a-1=-3\\2b-1=-1\end{cases}$

したがって，求める整数 a，b の組は

$\begin{cases}a=1\\b=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a=2\\b=1,\end{cases}$ $\begin{cases}a=0\\b=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$

6 次の各組の整数の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(1) 504，540

504，540 を素因数分解すると

$504=2^3\cdot3^2\cdot7$

$540=2^2\cdot3^3\cdot5$

よって，504 と 540 の

最大公約数は $2^2\cdot3^2=36$

最小公倍数は $2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7=7560$

(2) 234，390，819

234，390，819 を素因数分解すると

$234=2\cdot3^2\cdot13$

$390=2\cdot3\cdot5\cdot13$

$819=3^2\cdot7\cdot13$

よって，234，390，819 の

最大公約数は $3\cdot13=39$

最小公倍数は $2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13=8190$

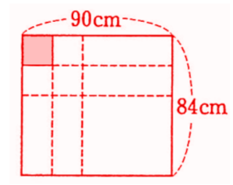
7 縦 84cm，横 90cm の長方形の壁を，できるだけ大きな正方形のタイルですき間なく敷き詰めるとき，タイルの 1 辺の長さを求めよ。

最も大きいタイルの 1 辺の長さは，壁の縦の長さと横の長さの最大公約数である。

ここで，84，90 をそれぞれ素因数分解すると，

$84=2^2\cdot3\cdot7$

$90=2\cdot3^2\cdot5$



よって，84 と 90 の最大公約数は

$2\cdot3=6$

したがって，求めるタイルの 1 辺の長さは 6cm である。

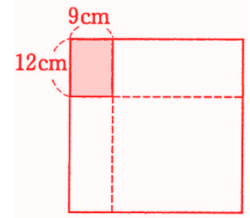
8 縦 12cm，横 9cm の長方形の紙を同じ向きに並べて正方形をつくる。このとき，つくることができる正方形のうち，最も小さいものの 1 辺の長さを求めよ。

最も小さい正方形の 1 辺の長さは，長方形の紙の縦の長さと横の長さの最小公倍数である。

ここで，12 と 9 をそれぞれ因数分解すると

$12=2^2\cdot3$

$9=3^2$



よって，12 と 9 の最小公倍数は

$2^2\cdot3^2=36$

したがって，求める正方形の 1 辺の長さは 36cm である。

9 最大公約数が 7 であり，最小公倍数が 84 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，$b(a\leqq b)$ とする。

最大公約数が 7 であるから

$a=7a'$，$b=7b'$ ……①

とおける。ただし，a' と b' は互いに素であり，$a'\leqq b'$ である。

また，a と b の最小公倍数が 84 であるから

$7a'b'=84$

すなわち $a'b'=12$ ……②

②を満たすような，互いに素である a' と b' の組は

$\begin{cases}a'=1\\b'=12,\end{cases}$ $\begin{cases}a'=3\\b'=4\end{cases}$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，

①より 7 と 84， 21 と 28

10 積が 3240 であり，最小公倍数が 180 であるような 2 つの正の整数の組をすべて求めよ。

求める 2 つの正の整数を a，$b(a \leqq b)$ とし，それらの最大公約数を g とすると

a，b の積が 3240，最小公倍数が 180 であるから

$$a = a'g，b = b'g \quad \cdots\cdots①$$

とおける。ただし，a' と b' は互いに素であり，

$a' \leqq b'$ である。

また，a と b の最小公倍数は 180 であるから

$$180g = ab \quad \cdots\cdots②$$

$ab = 3240$ を②に代入すると

$$180g = 3240$$

よって　$g = 18$ ……③

a と b の最小公倍数は，$a'b'g$ と表されるから，③

より　$18\,a'b' = 180$

すなわち　$a'b' = 10$ ……④

④を満たすような，互いに素である a' と b' の組は

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 10, \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 5 \end{cases}$$

したがって，求める 2 つの正の整数の組は，

①，③より　18 と 180，36 と 90