3 節 軌跡と領域

1 軌跡の方程式

（教科書 p.94）

与えられた条件を満たす点全体の集合を，その条件を満たす点の

（①　　　　　　）という。

例題 1 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ から等距離にある点の軌跡を求めよ。

解

問1 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=16$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

例題 2 2 点 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:1$ であるような点 P の軌跡を求めよ。

解

注意 一般に $m\neq n$ のとき，2 定点 A，B に対し，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$ を満たす点 P の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円を“アポロニウスの円”という。

また，$m=n$ のときは，線分 AB の垂直二等分線となる。

問2 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:2$ であるような点 P の軌跡を求めよ。

応用
例題
3

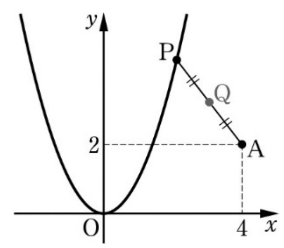
円 $x^2+y^2=4$ を C とする。C 上を動く点 P と点 A(4, 4) に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

考え方

解

問3 例題 3 において，線分 AP を 1 : 2 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

問4 点 P が放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，点 A(4, 2) と点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。



2 不等式の表す領域

（教科書 p.97）

例 1 直線 $y=x+1$ を l とし，平面上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を通り y 軸に平行な直線と直線 l の交点を Q とすると

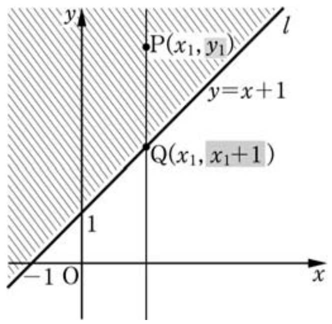
$\mathrm{Q}(x_1,\ x_1+1)$

したがって，点 P の座標 $(x_1,\ y_1)$ が

$y_1 > x_1+1$ ……①

を満たすならば，点 P は点 Q の上側にある。

x_1 は任意の実数であるから，①を満たす点 P 全体の集合は，直線 l の上側の部分である。



すなわち，1 次不等式

$y > x+1$

を満たす点全体の集合は，直線 $y=x+1$ の（　　　　　　）の部分である。

同様にして，1 次不等式

$y < x+1$

を満たす点全体の集合は，直線 $y=x+1$ の（　　　　　　）の部分である。

一般に，x, y についての不等式があるとき，それを満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その（②　　　　　　　　　　）という。

不等式と直線の上側・下側
直線 $y=mx+n$ を l とすると 不等式　$\boldsymbol{y > mx+n}$ の表す領域は　**直線 $\boldsymbol{l}$ の上側** 不等式　$\boldsymbol{y < mx+n}$ の表す領域は　**直線 $\boldsymbol{l}$ の下側**

例題 4 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$2x-y+1>0$　　　(2)　$x \geqq 2$

解

問5 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 3x + 2$

(2) $3x + 4y \leqq 8$

(3) $2x - 5 < 0$

(4) $y \geqq 2$

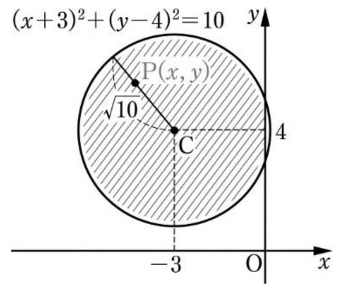
例 2 円 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 10$ の内部を表す不等式を考えてみよう。

この円は，点 $\mathrm{C}(-3,\ 4)$ を中心とし，半径 $\sqrt{10}$ の円であるから，その内部の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\mathrm{CP} < \sqrt{10}$$

を満たす。すなわち

$$\mathrm{CP}^2 < 10$$



したがって

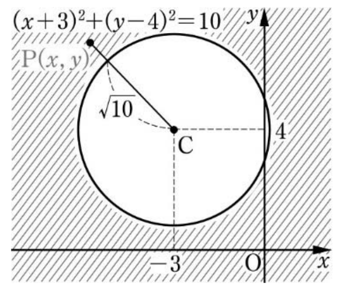
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 < 10$$

これが円の（　　　　　　）を表す不等式である。

同様にして

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 > 10$$

は，円の（　　　　　　）を表す不等式である。



不等式と円の内部・外部
円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ を C とすると 不等式　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2 < \boldsymbol{r}^2$ の表す領域は　**円 C の内部** 不等式　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2 > \boldsymbol{r}^2$ の表す領域は　**円 C の外部**

問6 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2+y^2>4$

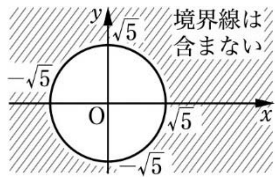
(2) $x^2+y^2 \leqq 8$

(3) $(x-2)^2+(y+1)^2<1$

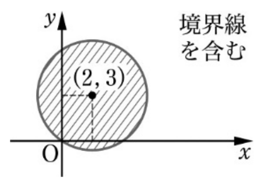
(4) $x^2+y^2+2x-6y+1 \geqq 0$

問7 次の図の斜線部分はどのような不等式で表されるか。

(1)



(2)



3 連立不等式の表す領域

（教科書 p.100）

例 3 連立不等式

$$\begin{cases} x-2y>-1 & \cdots\cdots① \\ x+y>2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の表す領域を求めてみよう。

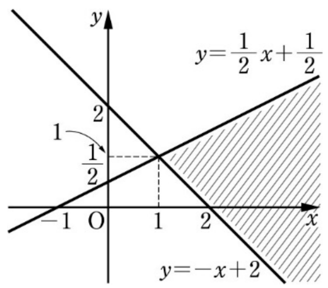
①より　　$y<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

よって，①の表す領域は

②より　　$y>-x+2$

よって，②の表す領域は

したがって，求める領域は図の斜線部分となる。ただし，



問8 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} 2x+y>3 \\ 3x-2y<8 \end{cases}$$

問9 第 1 象限は，どのような連立不等式の表す領域といえるか。また第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限についてはどうか。

問 10 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x+2y-2\leqq 0 \\ x-y+1\geqq 0 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

例題 5 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2>4 & \cdots\cdots① \\ y<x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

解

問 11 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

（1） $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$

⑵ $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 16 \\ (x-4)^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$

例題 6 不等式 $(x-y)(x+y-1)>0$ の表す領域を図示せよ。

解

問 12 不等式 $(3x-y+5)(x-2y+5) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ。

領域を利用した証明

応用例題 7
次のことが成り立つことを証明せよ。

$$x^2+y^2<y \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2<1$$

考え方

証明

（教科書 p.102）

問 13 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $x^2+y^2 \leqq 8 \quad \Longrightarrow \quad x+y \leqq 4$

(2) $x^2+y^2-6x-8y<0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$ または $y>0$

領域と最大値･最小値

（教科書 p.103）

応用例題 8

点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$x+3y \leqq 9, \qquad 2x+y \leqq 8, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0$$

の表す領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

考え方

解

問 14 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$x-2y+3 \geqq 0, \qquad 2x+y-4 \leqq 0, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0$$

の表す領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

問 題

（教科書 p.104）

１７　3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(5,\ 1)$ に対して，次の式を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2$

(2)　$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{AP}^2 = 2\mathrm{BP}^2$

１８　点 P が直線 $2x - y - 1 = 0$ 上を動くとき，点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$ と点 P を結ぶ線分 AP を 3 : 5 に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

１９ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $5x + 4y - 12 \geqq 0$

(2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y < 3$

(3) $(x^2 + y^2 - 1)(2x - y - 1) < 0$

２０ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

（1） $\begin{cases} x^2+y^2-25 \leqq 0 \\ x^2+y^2-9 \geqq 0 \end{cases}$

⑵ $1 < x^2+y^2 < 2x+2y+7$

⑶ $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ (x+1)(y-1) \geqq 0 \end{cases}$

２１ 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $x^2+y^2-6x+8y+16<0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$ かつ $y<0$

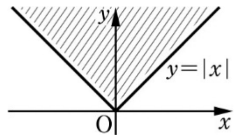
(2) $x^2+y^2+2x-4y \geqq 15 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \geqq 5$

２２ 点 $(x,\ y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ の表す領域を動くとき，$2x+y$ の最大値を求めよ。

参 考　いろいろな不等式の表す領域

（教科書 p.105）

例 1 不等式 $y > |x|$ の表す領域は，関数 $y = |x|$ のグラフである折れ線の（　　　　　　）である。ただし，



問1 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > |x| - 1$

(2)　$y \leqq |x - 1|$

例 2 不等式 $|x| + |y| < 1$ の表す領域は

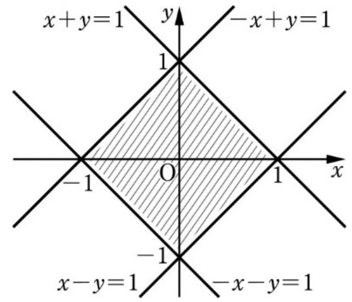
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$のとき

$x < 0,\ y \geqq 0$のとき

$x < 0,\ y < 0$のとき

$x \geqq 0,\ y < 0$のとき

であるから，右の図の斜線部分である。ただし，



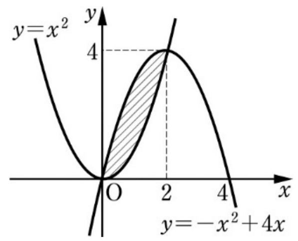
問2 不等式 $|x| + |y| < 2$ の表す領域を図示せよ。

例 3

連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq -x^2+4x \end{cases}$ の表す領域は，放物線 $y=x^2$ および，

その（　　　　　　）と，放物線 $y=-x^2+4x$ および，

その（　　　　　　）との共通部分である。ただし，



問3　連立不等式 $\begin{cases} y \leqq \frac{1}{4}x^2 \\ y \geqq x^2-3 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。