2 節 円

1 円の方程式

（教科書 p.81）

円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は $$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{r}^2$$ とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は $$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{r}^2$$

問1　点 $(2,\ -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を求めよ。

例 1　点 $\mathrm{A}(3,\ -1)$ を中心とし，原点 O を通る円の方程式を求めてみよう。

この円の半径は　　$\mathrm{OA}=$

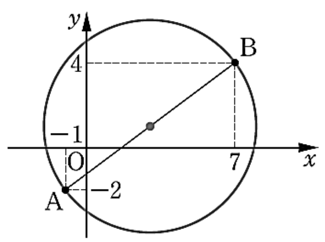
したがって，この円の方程式は

問2　点 $(-2,\ 3)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ。

問3　2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$，$\mathrm{B}(7,\ 4)$ を直径の両端とする円について，次のものを求めよ。

(1)　円の中心の座標

(2)　円の方程式



$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

（教科書 p.82）

円の方程式　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

の左辺を展開して整理すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となる。この式は，$l,\ m,\ n$ を定数として

（①　　　　　　　　　　　　　）

の形である。

例 2　方程式 $x^2+y^2-2x-8y-2=0$ で表される図形について考えてみよう。この方程式を変形すると

◀ x を含む項，y を含む項に整理

◀ 平方完成する

よって，この方程式は点（　　　　　）を中心とする半径（　　　　　）の円を表す。

問4　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2-6x+4y+4=0$

(2)　$x^2+y^2+5y+2=0$

(3)　$x^2+y^2+4x-10y+29=0$

問5 方程式 $x^2+y^2+x-3y+n=0$ が円を表すような定数 n の値の範囲を求めよ。

例題 1 3 点 A$(-7,\ 5)$，B$(-3,\ 7)$，C$(0,\ -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解

例題 1 で求めた円は，3 点 A，B，C を頂点とする△ABC の外接円である。一般に，三角形の外接円の中心をその三角形の（② 　　　　　　）という。

問6 3 点 A$(6,\ 2)$，B$(2,\ -4)$，C$(7,\ -3)$ がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

2 円と直線

円と直線の共有点

（教科書 p.84）

例3 直線 $y=-x+1$ と円 $x^2+y^2=25$ の共有点の座標を求めてみよう。共有点の座標は次の連立方程式の実数解として得られる。

$$\begin{cases} y=-x+1 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入すると

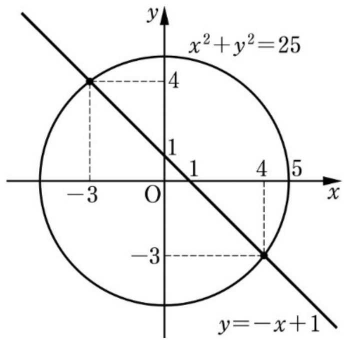
整理すると

これを解くと

①より，$x=$（　　　）のとき　$y=$（　　　）

$x=$（　　　）のとき　$y=$（　　　）

よって，共有点の座標は（　　　），（　　　）である。



問7 円 $x^2+y^2=10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

（1）　$2x+y-5=0$

（2）　$x-3y+10=0$

円と直線の共有点の個数は，判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって次のようになる。

円と直線の共有点
$D>0$ $\Longleftrightarrow$ 円と直線の**共有点は 2 個**
$D=0$ $\Longleftrightarrow$ 円と直線の**共有点は 1 個**
$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 円と直線の**共有点はない**

例4 (1)　円 $x^2+y^2=7$ と直線 $y=x-1$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると

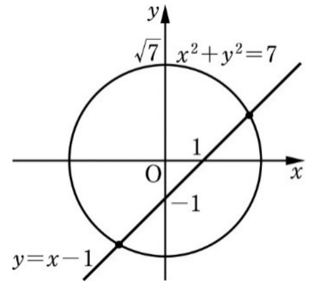
$$x^2+(x-1)^2=7$$

すなわち　$x^2-x-3=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=$

であるから，この円と直線の共有点は（　　　）個ある。



(2)　円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x-4$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると

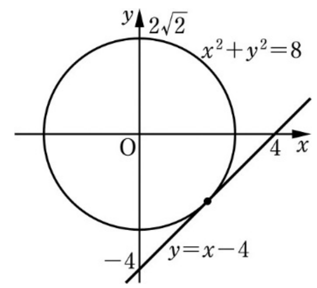
$$x^2+(x-4)^2=8$$

すなわち　$x^2-4x+4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=$

であるから，この円と直線の共有点は（　　　）個ある。



例 4 (2)のように，円と直線がただ 1 つの共有点をもつとき，円と直線は（③　　　）といい，その直線を（④　　　），共有点を（⑤　　　）という。

問8 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

(1) $x^2+y^2=13$, $y=-x+1$

(2) $x^2+y^2=5$, $y=2x+5$

(3) $x^2+y^2=4$, $y=x+3$

応用 例題 2 解

直線 $y=2x+k$ が円 $x^2+y^2=1$ と共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

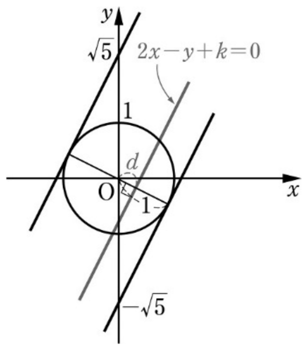
問9 直線 $y=3x+k$ が円 $x^2+y^2=4$ と共有点をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

例 5 前ページの例題 2 は次のようにも考えられる。円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $2x-y+k=0$ の距離を d とすると，円の半径は 1 であるから，$d \leqq 1$ のとき，円と直線は共有点をもつ。
77 ページで学んだ点と直線の距離の公式により

$d =$

$d \leqq 1$ より　　　　　　　　すなわち

したがって



問 10 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $3x+4y-k=0$ が接するように，定数 k の値を定めよ。

弦の長さ

（教科書 p.87）

応用例題 3 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $x-y-1=0$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

解

問 11 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=-2x+5$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

円の接線

（教科書 p.88）

円の接線
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$

問 12 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=25,\ \mathrm{P}(3,\ 4)$

(2)　$x^2+y^2=9,\ \mathrm{P}\left(-1,\ 2\sqrt{2}\right)$

(3)　$x^2+y^2=16,\ \mathrm{P}(0,\ 4)$

(4)　$x^2+y^2=10,\ \mathrm{P}\left(-\sqrt{10},\ 0\right)$

応 用 例題 4

点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解

問 13 点 $(15,\ 5)$ を通り，円 $x^2+y^2=50$ に接する直線の方程式を求めよ。

3 2つの円

2 つの円の位置関係

（教科書 p.90）

例 6 点 (2, 4) を中心とし，円 $x^2+y^2=45$ に内接する円の方程式を求めてみよう。円$x^2+y^2=45$ は中心が原点，半径が $3\sqrt{5}$ の円である。

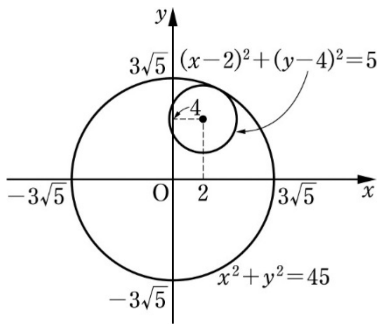
2 つの円の中心間の距離は

$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

よって，求める円の半径は

$3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

ゆえに，求める円の方程式は



問 14 点 (3, 4) を中心とし，円 $x^2+y^2=1$ に外接する円の方程式を求めよ。

2 つの円の共有点

（教科書 p.91）

応用例題 5 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=10,\quad x^2+y^2-12x+6y+20=0$

考え方

解

問 15 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=5,\qquad x^2+y^2-12x+4y+15=0$

2 つの円の交点を通る円

（教科書 p.92）

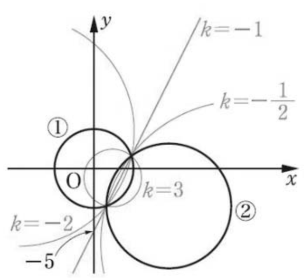
前ページの例題 5 のように，2 つの円

$x^2+y^2-10=0$ ……①

$x^2+y^2-12x+6y+20=0$ ……②

は，2 点 $(1,\ -3)$, $(3,\ 1)$ で交わる。

2 つの円①，②に対し，k を定数として，次の方程式を考える。



(⑥ 　　　　　　　　　　　　　　　　) ……③

$x=1,\ y=-3$ および $x=3,\ y=1$ が③を満たすから，2 点 $(1,\ -3)$, $(3,\ 1)$ は③で表される図形上にある。

また，③を変形すると

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-12x+6y+(-10k+20)=0$

となる。したがって

$k\neq-1$ のとき，③は 2 つの円①，②の交点を通る円を表し，

$k=-1$ のとき，③は 2 つの円①，②の交点を通る直線を表す。

応用例題 6 2 つの円 $x^2+y^2-1=0,\ x^2+y^2-4x-4y+3=0$ の交点と原点 O を通る円の方程式を求めよ。

問 16 2 つの円 $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-6x+2y=0$ の交点と点 $(2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

問 題

（教科書 p.93）

9 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(-4,\ 3)$ で，y 軸に接する円

(2) 点 $(-4,\ -5)$ を中心とし，直線 $x-2y=1$ に接する円

(3) x 軸上に中心をもち，2 点 $\left(3,\ \sqrt{3}\right)$, $(2,\ -2)$ を通る円

(4) 直線 $y=2x-5$ 上に中心をもち，2 点 $(4,\ 6)$, $(-2,\ 2)$ を通る円

１０ 方程式 $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$ は，どのような図形を表すか。

１１ 次の問に答えよ。

(1) 3 点 $(-3,\ 5)$，$(-2,\ 6)$，$(4,\ -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) (1)の円が点 $(5,\ a)$ を通るとき，a の値を求めよ。

１２ 直線 $y=mx-3$ が円 $x^2+y^2-2y=0$ と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

１３　円 $x^2+y^2=4$ と点 P(3, 2) がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　点 P を通り，この円に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた接点を A, B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

１４　円 $x^2+y^2=20$ に接し，直線 $2x+y=10$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

１５　点 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ を中心とし，円 $x^2+y^2=5$ に接する円の方程式を求めよ。

１６　円 $x^2+y^2-2kx-6y+k^2+5=0$ が，円 $x^2+y^2=49$ に含まれるとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよ。