1 節 点と直線

1 2 点間の距離

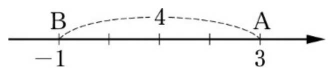
数直線上の 2 点間の距離

（教科書 p.62）

数直線上の点には実数が対応し，2 点 $A(a)$，$B(b)$ 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて（① ）と表される。

例 1 2 点 $A(3)$，$B(-1)$ に対し

AB =



問1 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $O(0)$，$A(3)$

(2) $A(-1)$，$B(5)$

(3) $A(7)$，$B(3)$

座標平面上の 2 点間の距離

（教科書 p.62）

2 点間の距離
2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離は $\mathbf{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ とくに，原点 O と点 $P(x, y)$ の距離は $\mathbf{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

例 2 2 点 $A(-2, 4)$，$B(2, 3)$ 間の距離は

AB =

原点 O と点 $P(5, 12)$ の距離は

OP =

問2 次の 2 点間の距離を求めよ。

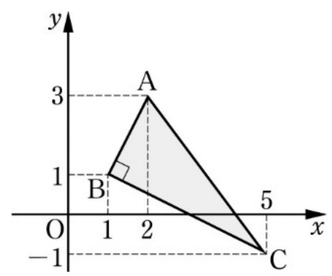
(1) $A(2, 1)$，$B(5, 7)$

(2) $A(-3, 5)$，$B(-2, -2)$

(3) $O(0, 0)$，$P(-4, 3)$

(4) $A(8, -2)$，$B(8, -19)$

例 3 3 点 $A(2, 3)$，$B(1, 1)$，$C(5, -1)$ を頂点とする△ABC は，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の 3 辺の長さは



AB =

BC =

CA =

であるから

よって，△ABC は（ ）である。

問3 次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1) $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(3,\ -1)$

(2) $A(2,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 2\sqrt{3})$, $C(-1,\ 0)$

例 4 2 点 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。

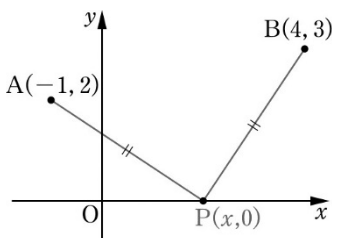
$AP = BP$ より　　$AP^2 = BP^2$

よって

$(x+1)^2 + (-2)^2 = (x-4)^2 + (-3)^2$

これを解くと　　$x = 2$

すなわち



問4 2 点 $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

2 内分点・外分点

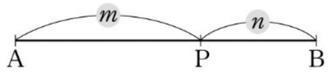
数直線上の内分点・外分点

（教科書 p.64）

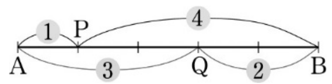
m, n を正の数とする。
線分 AB 上に点 P があり

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に（② 　　　　　）するという。



例 5 右の図において
点 P は線分 AB を（　　　　　）に内分し，
点 Q は線分 AB を（　　　　　）に内分する。



問5 2 点 A(3), B(7) に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，1 : 3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。

2 点 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。$a < b$ のとき，$a < x < b$ となるから

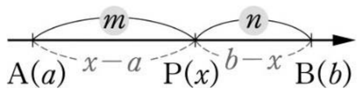
$\mathrm{AP} = x - a$,　　$\mathrm{PB} = b - x$

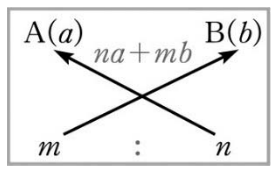
である。$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ であるから

$(x-a) : (b-x) = m : n$

すなわち　$m(b-x) = n(x-a)$

ゆえに　（③ 　　　　　　　）





$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。
とくに，線分 AB の（④ 　　　　）の座標は（⑤ 　　　　）である。

問6 2 点 A(−4), B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB の中点 M

(2) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

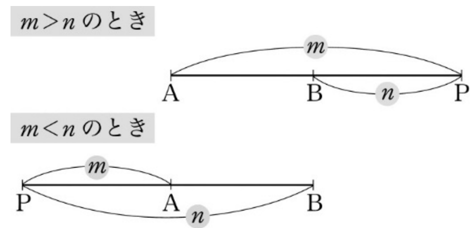
(3) 線分 AB を 1 : 4 に内分する点 Q

(4) 線分 BA を 1 : 4 に内分する点 R

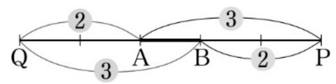
m, n を異なる正の数とする。
線分 AB の延長上に点 P があり

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に（⑥ 　　　　）するという。



例 6 右の図の点 P は線分 AB を（　　　　　）に外分し，点 Q は（　　　　　）に外分する。



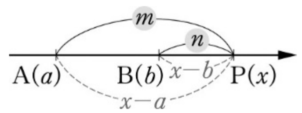
問7 例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a<b$，$m>n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a<b<x$$

となる。

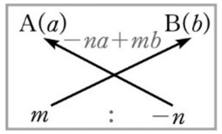


よって　AP $=x-a$，　PB $=x-b$

AP : PB $=m:n$ であるから

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

すなわち　$m(x-b)=n(x-a)$



ゆえに　（⑦　　　　　　　　　）

この式は a と b，m と n の大小に関係なく成り立つ。

問8　2 点 A(-5)，B(7) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P

(2)　線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q

座標平面上の内分点・外分点

（教科書 p.66）

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標
2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に**内分**する点の座標は $$\left(\boldsymbol{\frac{nx_1+mx_2}{m+n}},\quad \boldsymbol{\frac{ny_1+my_2}{m+n}}\right)$$ $m:n$ に**外分**する点の座標は $$\left(\boldsymbol{\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}},\quad \boldsymbol{\frac{-ny_1+my_2}{m-n}}\right)$$ とくに，線分 AB の**中点**の座標は $$\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}},\quad \boldsymbol{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)$$

例 7　2 点 A$(-2,\ 1)$，B$(4,\ 4)$ がある。

線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めてみよう。

P$(x,\ y)$ とすると

$x=$　　　　　　　　，　$y=$

したがって，求める点 P の座標は（　　　　　　）である。

線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

Q$(x',\ y')$ とすると

$x'=$　　　　　　　　，　$y'=$

したがって，求める点 Q の座標は（　　　　　　）である。

問9 次の 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を，3 : 2 に内分する点 P，3 : 2 に外分する点 Q，および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1)　$A(1,\ 3)$，$B(6,\ 5)$

(2)　$A(-2,\ 3)$，$B(4,\ -1)$

例題 1 点 $A(2,\ 3)$ に関して，点 $P(-1,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解

問 10 4 点 $A(-1,\ -1)$，$B(5,\ -2)$，$C(3,\ 3)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線 AC の中点 M

(2)　頂点 D

三角形の重心

（教科書 p.68）

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を（⑧　　　　　　）という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の（⑨　　　　　　）という。重心はそれぞれの中線を 2：1 に内分する点である。

三角形の重心
3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は　$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ -4)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1)$を頂点とする△ ABC の重心 G の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2,\qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち

問 11 3 点 $\mathrm{A}(3,\ 6)$，$\mathrm{B}(-5,\ -1)$，$\mathrm{C}(8,\ -7)$を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めよ。

3 直線の方程式

（教科書 p.69）

1 次関数 $y = mx + n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の（⑩　　　　　　　）という。

一般に，x，y についての方程式を成り立たせる点 (x, y) のえがく図形を，その（⑪　　　　　　　）または（⑫　　　　　　　）という。また，その方程式を，その（⑬　　　　　　　）という。

例 9 (1)　方程式 $3x-2y+4=0$ は

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

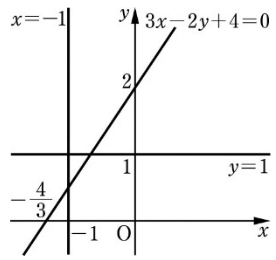
と変形できるから，傾きが（　　　　），y 切片が（　　　　）の直線を表す。

(2)　方程式 $y-1=0$ は　　$y=1$

と変形できるから，点（　　　　）を通り，（　　　　）に平行な直線を表す。

(3)　方程式 $x+1=0$ は　　$x=-1$

と変形できるから，点（　　　　）を通り，（　　　　）に平行な直線を表す。



問 12 次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1)　$2x-3y+6=0$

(2)　$y-2=0$

(3)　$x+3=0$

直線の方程式のいろいろな形

（教科書 p.70）

1 点を通り，傾き m の直線
点 (x_1, y_1) を通り，傾き m の直線の方程式は $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

例 10 点 $(2, -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y-(-5) = -4(x-2)$$

すなわち

問 13 点 $(-3, 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 2

(2)　傾きが $-\frac{1}{3}$

２点を通る直線
2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$ $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 11　2 点 A$(-3,\ 2)$, B$(6,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x - (-3)\}$　　すなわち

問 14　次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2,\ -3)$, B$(4,\ 3)$

(2)　A$(6,\ -1)$, B$(-3,\ 5)$

(3)　A$(-2,\ 0)$, B$(-2,\ -6)$

(4)　A$(4,\ 7)$, B$(-3,\ 7)$

問 15　3 点 A$(-2,\ 6)$, B$(7,\ 3)$, C$(a,\ a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

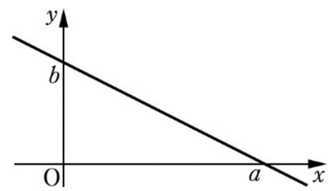
(1)　2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　3 点 A, B, C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

例 12　2 点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$

である。これを変形すると



注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の（⑭　　　　　　）という。例 12 の直線では x 切片がa, y 切片が b である。

問 16　x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

4 2 直線の関係

2 直線の平行と垂直

（教科書 p.72）

2 直線の平行条件・垂直条件
2 直線 $y = mx + n,\ y = m'x + n'$ について 平行条件は $\boldsymbol{m = m'}$　　垂直条件は $\boldsymbol{mm' = -1}$

問 17 次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

① $y = -2x + 5$　　② $x - 3y + 7 = 0$

③ $6x + 2y + 3 = 0$　　④ $6x + 3y = 1$

例題 2 点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解

問 18 点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

問 19 直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

例題 3 直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 A$(1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

考え方

解

問 20 直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 A$(4,\ -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

2 直線の交点

（教科書 p.75）

例題 4 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。

(1)　2 直線の交点の座標を求めよ。

(2)　この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解

問 21 次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1)　$5x-4y+13=0,\quad 3x+y+1=0$

(2)　$3x-y-6=0,\quad 6x+5y+2=0$

問 22 3 直線

$$x-2y+8=0,\qquad 2x+3y-5=0,\qquad mx-y-2m+8=0$$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

2 直線の交点を通る直線

（教科書 p.76）

2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ に対して，方程式

(⑮　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)　　……①

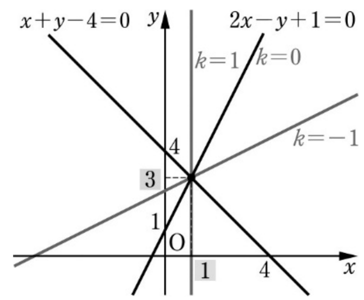
を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が 2 直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$x+y-4=0$，$2x-y+1=0$

を同時に満たす x，y の値の組 $x=1$，$y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は 2 直線の交点 (1，3) を通る。



また，①を変形すると

$$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0\qquad\cdots\cdots②$$

$k+2$ と $k-1$ は同時には 0 にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ の交点 (1，3) を通る直線を表す。

例題 5 2 直線 $3x+4y-17=0$，$x-2y+1=0$ の交点と点 (2，3) を通る直線の方程式を求めよ。

解

問 23 2 直線 $4x-5y+5=0$，$x+2y-6=0$ の交点と点 (1，1) を通る直線の方程式を求めよ。

点と直線の距離

（教科書 p.77）

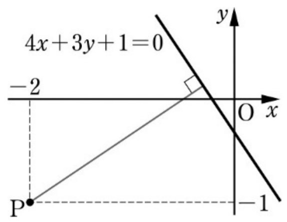
点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は $$\boldsymbol{d=\frac{\mid ax_1+by_1+c\mid}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 13 点 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$ と直線

$4x+3y+1=0$

の距離 d は

$d=$



問 24 次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $x+2y+2=0$

(2)　点 $(3,\ 4)$ と直線 $2x-3y+1=0$

(3)　点 $(7,\ -1)$ と直線 $y=-3x+6$

座標を用いた図形の性質の証明

（教科書 p.78）

応用例題 6 △ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

であることを証明せよ。

証明

問 25 △ABC の辺 BC を 1：2 に内分する点を D とすると

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$$

であることを証明せよ。

応用 例題 7 証明

△ ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わることを証明せよ。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を△ ABC の（⑯　　　　　　　）という。

問 26　△ ABC において，各辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

問　題

（教科書 p.80）

1　2 点 A(-2)，B(5) を結ぶ線分 AB を $3:4$ に内分する点を C，$3:4$ に外分する点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

2　△ABC の 2 つの頂点 A，B および重心 G の座標が A$(-7,\ -5)$，B$(2,\ -2)$，G$(-2,\ -1)$ であるとき，頂点 C の座標を求めよ。

3　2 点 A$(3,\ 4)$，B$(-2,\ 7)$ を通る直線を l とするとき，次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に平行な直線

(2)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に垂直な直線

4　2 点 A$(1,\ -1)$，B$(3,\ -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

5　2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

ただし，$b_1\neq 0$，$b_2\neq 0$ とする。

(1)　2 直線が**平行**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}$

(2)　2 直線が**垂直**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

6 2 直線 $ax + 4y - 1 = 0$

$x + (a - 3)y - 2 = 0$

が平行になるような定数 a の値を求めよ。また，垂直になるような定数 a の値を求めよ。

7 直線 $y = x$ に関して，点 A$(p,\ q)$ と対称な点 B の座標を $p,\ q$ で表せ。ただし，$p \neq q$ とする。

8 点 A$(2,\ 1)$ と直線 $5x + 12y + 4 = 0$ 上を動く点 P がある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。