３節 空間におけるベクトル

❶ 空間座標

（教科書 p.87）

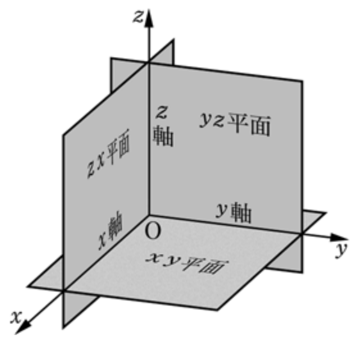
空間の座標は，右の図のように１点 O で互いに直交する３本の数直線によって定められる。それぞれの数直線を（① ），（② ），（③ ）といい，まとめて（④ ）とよぶ。また，点 O を（⑤ ）という。

x 軸と y 軸によって定められる平面を（⑥ ），

y 軸と z 軸によって定められる平面を（⑦ ），

z 軸と x 軸によって定められる平面を（⑧ ）

といい，まとめて（⑨ ）という。

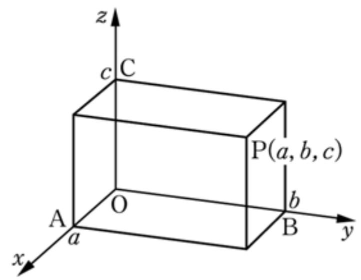


空間における任意の点 P に対して，P を通り，各座標平面に平行な平面が，x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする。

点 A，B，C の各座標軸上での座標がそれぞれ a，b，c であるとき，この３つの数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の（⑩ ）という。

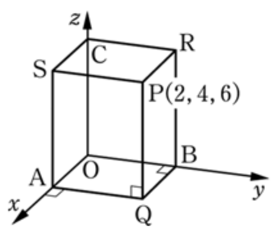
点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ であることを $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と書く。また，a，b，c をそれぞれ点 P の（⑪ ），（⑫ ），（⑬ ）という。

座標の定められた空間を（⑭ ）という。



（教科書 p.88）

例1 右の図で，点 $\mathrm{P}(2,\ 4,\ 6)$ に対して，
点 A，B，S の座標は次のようになる。



問1 例１で，点 C，Q，R の座標を答えよ。

座標平面に平行な平面の方程式

（教科書 p.88）

例2 点 $(3,\ 4,\ 5)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は

問2 点 $(1,\ 3,\ 2)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式を求めよ。 p.107 LevelUp 9

問3 xy 平面，yz 平面，zx 平面はそれぞれどのような方程式で表されるか。

❷ 空間のベクトル

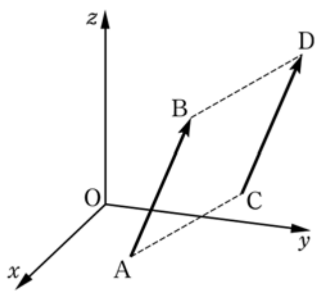
空間のベクトル

（教科書 p.89）

平面の場合と同様に，空間における有向線分 AB について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したとき，それを（⑮　　　　　　　　）といい，（⑯　　　　　）と表す。

有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{AB}$ の（⑰　　　　　　）または長さといい，（⑱　　　　　）で表す。

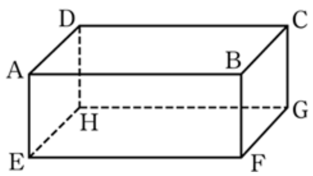
平面上のベクトルのときと同様に，大きさが等しく向きが反対のベクトルを（⑲　　　　　　　）という。また，大きさが 0 のベクトルを（⑳　　　　　　　），大きさが 1 のベクトルを（㉑　　　　　　　）ということも，平面の場合と同様である。



例3 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

　　　　＝　＝　＝

また，（　　　　　　　　　）は，いずれも $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルである。



問4 例 3 の直方体において，$\overrightarrow{AE}$ と等しいベクトルをすべて答えよ。また，$\overrightarrow{AC}$ の逆ベクトルをすべて答えよ。

（教科書 p.90）

例4 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

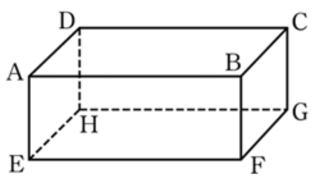
　　　　＝

　　　　＝　　＝

また

　　　　＝

である。

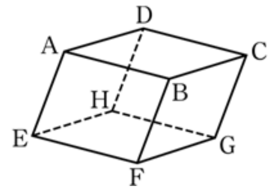


問5 例 4 の直方体において，次の等式が成り立つことを示せ。

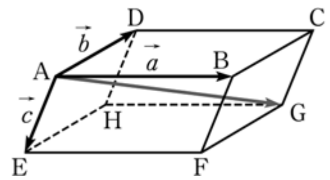
(1)　$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DF}$

(2)　$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

右の図のように，3 組の向かい合った面がそれぞれ平行である六面体を（㉒　　　　　　　）という。平行六面体の各面は平行四辺形である。



例5 右の図の平行六面体 ABCD − EFGH において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{AG}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表してみよう。



問6 例 5 の平行六面体において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{AF}$

(2)　$\overrightarrow{HF}$

(3)　$\overrightarrow{CH}$

(4)　$\overrightarrow{BH}$

ベクトルの平行と分解

（教科書 p.91）

ベクトルの平行についても，平面の場合と同様に次のことが成り立つ。

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

（㉓ ）

4点 O，A，B，C が同一平面上にないとき

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

とおく。このとき，空間の任意のベクトル $\vec{p}$ は実数 l，m，n を用いて

（㉔ ）

の形にただ1通りに表される。

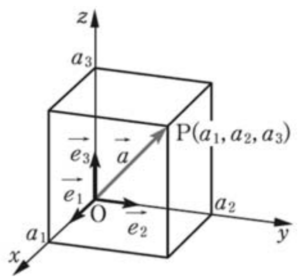
ベクトルの成分

（教科書 p.92）

空間において，O を原点とする座標軸が定まっているとき，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを

（㉕ ）といい，それぞれ（㉖ ）

で表す。



与えられた空間のベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ となる点 P をとり，その座標を$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とすると，平面の場合と同様に，$\vec{a}$ は次のように表される。

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

この a_1，a_2，a_3 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉗ ），（㉘ ），（㉙ ）といい，$\vec{a}$ を

（㉚ ）

と書き表す。この表し方を $\vec{a}$ の（㉛ ）という。

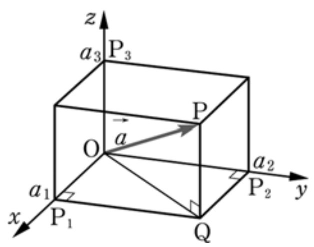
成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

ベクトルの大きさ
$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき　$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

証明 右の図において

$$|\vec{a}|^2 = OP^2 = OQ^2 + QP^2$$
$$= OP_1{}^2 + P_1Q^2 + QP^2$$
$$= OP_1{}^2 + OP_2{}^2 + OP_3{}^2$$
$$= a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$$

よって　$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$



問7 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a} = (3,\ 2,\ 6)$

(2)　$\vec{b} = (-5,\ 4,\ 2)$

成分による計算

（教科書 p.93）

平面の場合と同様に，成分による計算について次のことが成り立つ。

成分による計算
(1)　$(a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$ (2)　$(a_1,\ a_2,\ a_3) - (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$ (3)　$k(a_1,\ a_2,\ a_3) = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　　k は実数

例6 $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b} = (-2,\ 1,\ -1)$ のとき，$2\vec{a} + 3\vec{b}$ を成分表示してみよう。

問8 $\vec{a} = (2,\ -3,\ 0)$，$\vec{b} = (-3,\ 2,\ 5)$，$\vec{c} = (6,\ 0,\ -3)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$3\vec{a} + 4\vec{b}$

(2) $2(\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{b}-2\vec{c})$

例題 1 $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 1,\ -1)$，$\vec{c}=(0,\ 1,\ 0)$ のとき，
$\vec{p}=(3,\ 3,\ 5)$ を $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ の形に表せ。

解

問9 例題 1 の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{q}=(-2,\ 3,\ -5)$ を $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ の形に表せ。

座標と成分表示

（教科書 p.94）

例7 点 A(2, 1, 3)，B(3, 5, 2) のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさを求めてみよう。

原点を O とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

となるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

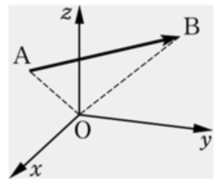
$=$

$=$

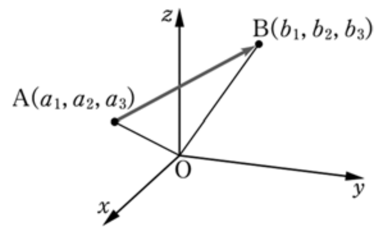
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=$

$=$

一般に，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示
A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき (1) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2},\ \boldsymbol{b_3-a_3})$ (2) $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2+(\boldsymbol{b_3-a_3})^2}$ 

(2)は空間における
2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 間の距離である。



問 10 2 点 A(4, 3, −5)，B(−2, 8, 3) について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を求めよ。
また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ。

p.105 Training 19

③ ベクトルの内積

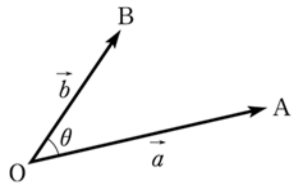
ベクトルの内積

（教科書 p.95）

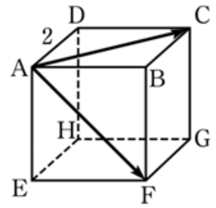
平面の場合と同様に, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を, 次のように定義する。

（㉜　　　　　　　　　　　）

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。



例8 右の図のような立方体 ABCD − EFGH において，内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ を求めてみよう。



△ AFC は正三角形であるから

$|\overrightarrow{AC}|=$　　　　　，$|\overrightarrow{AF}|=$　　，

$\angle CAF=$

よって　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=$　　　　　　　　$=$

問 11 例 8 で，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

(2)　$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DE}$

(3)　$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FC}$

(4)　$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}$

内積と成分

（教科書 p.95）

空間のベクトルの内積は，平面の場合と同様に，ベクトルの成分により次のように求めることができる。

内積と成分
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$

例9 $\vec{a}=(1,\ -3,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 5,\ -1)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

問 12 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ 5,\ 6)$

(2)　$\vec{a}=(4,\ 3,\ -1)$, $\vec{b}=(-2,\ 1,\ 3)$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると，次の式が成り立つ。

（㉝　　　　　　　　　　　　　　　　　）

ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$

例 10 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ -1,\ 2)$ のなす角 θ を求めてみよう。

$\cos\theta=$　　　　$=$　　　　　　　　　　　$=$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　　　$\theta=$

問 13 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。 p.105 Training 20

(1) $\vec{a}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 2,\ 2)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 2,\ -4)$

(3) $\vec{a}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 4)$

ベクトルの垂直

（教科書 p.97）

平面の場合と同様に，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の垂直について，次のことが成り立つ。

(㉞)

よって (㉟)

例 11 $\vec{a}=(2,\ -1,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ x,\ 2)$ が垂直になるとき，

= より =

よって $x=$

問 14 $\vec{a}=(x,\ -5,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 2,\ 3)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

例題 2 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}=(3,\ -2,\ -2)$ の両方に垂直で，大きさが 3 であるベクトルを求めよ。

解

問 15 2 つのベクトル $\vec{a}=(0,\ 1,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ -1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

p.105 Training 21

❹ 位置ベクトルと空間の図形

位置ベクトル

（教科書 p.98）

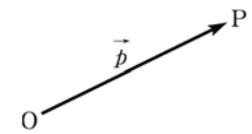
空間においても，定点 O をとると，点 P の位置は，ベクトル

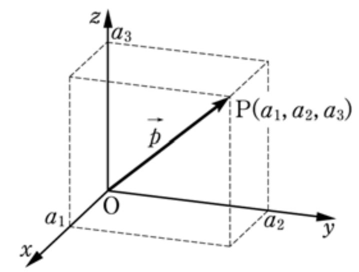
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$$

によって定まる。このとき，$\vec{p}$ を点 O を基準とする点 P の

（㊱　　　　　　　　　）という。

点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを，（㊲　　　　　　）と表す。





内分点・外分点の位置ベクトル

（教科書 p.98）

空間における 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$，外分する点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とすると，次のようになる。

（㊳　　　　　　　　　　　　　　）　$(m \neq n)$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

また，3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は，次のようになる。

（㊴　　　　　　　　）

問 16 空間における 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 3 : 5 に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$，外分する点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする。$\vec{p}$, $\vec{q}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

p.105 Training 22

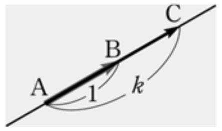
空間図形への応用

（教科書 p.99）

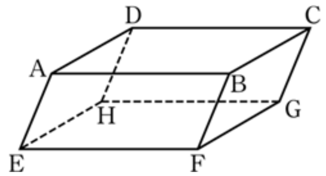
2 点 A, B が異なるとき，平面の場合と同様に，次のことが成り立つ。

3 点が一直線上にあるための条件

3 点 A，B，C が一直線上にある
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある



例題 3 右の図の平行六面体 ABCD − EFGH において，△ BDE の重心を P とする。このとき，3 点 A, P, G は一直線上にあることを示せ。



考え方 $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AP}$ となる実数 k があることを示せばよい。

証明

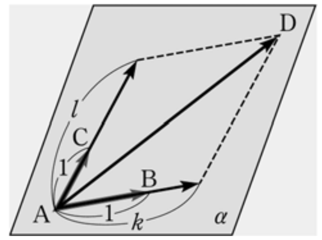
問 17 例題 3 の平行六面体 ABCD − EFGH において，△ DEF の重心を Q，線分 GE の中点を R とする。このとき，3 点 A, Q, R は一直線上にあることを示せ。

p.105 Training 23

同一平面上にある 4 点に対して，次のことが成り立つ。

4 点が同一平面上にあるための条件

一直線上にない 3 点 A, B, C が定める平面を α とする。
このとき
点 D が平面 α 上にある$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}$
となる実数 k, l がある



例題 4 次の 4 点が同一平面上にあるように，x の値を定めよ。

A(2, −3, −3), B(1, 5, −1), C(0, 1, −3), D(x, 0, 0)

解

問 18 次の 4 点が同一平面上にあるように，x の値を定めよ。 p.105 Training 24

$A(4,\ -2,\ 5)$，$B(-3,\ 4,\ -4)$，$C(1,\ 2,\ 4)$，$D(x+1,\ -4,\ x)$

問 19 2 点 $A(-1,\ 1,\ 3)$，$B(3,\ -1,\ 1)$ を通る直線 l 上の点 P が，$OP \perp l$ を満たすとき，点 P の座標を求めよ。 p.105 Training 25 p.107 Level Up 10,11

空間における直線

（教科書 p.101）

例題 5 2 点 $A(0,\ 1,\ 4)$，$B(4,\ 5,\ 0)$ を通る直線 l 上の点 P が，$OP \perp l$ を満たすとき，点 P の座標を求めよ。

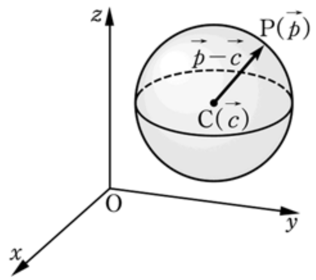
解

球の方程式

（教科書 p.102）

空間において，定点 C から一定の距離 r にある点 P の集合を，C を中心とする半径 r の（㊵　　　　　），または単に（㊶　　　　　）という。

ベクトルを用いて，球について考えてみよう。



$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ であるから，次の式が成り立つ。

（㊷　　　　　　　　　）　　　……①

①の両辺を 2 乗すると

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$$

ここで，$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$，$\vec{c}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とすると

$$\vec{p}-\vec{c}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$$

よって　$|\vec{p}-\vec{c}|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$

したがって，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を中心とする半径 r の球の方程式は

（㊸　　　　　　　　　　　　　　　　　）

となる。とくに，中心が原点の場合は次のようになる。

（㊹　　　　　　　　　　　）

例 12 点 C(0, 2, 6) を中心とし，点 A(−2, 1, 4) を通る球の方程式を求めてみよう。

求める球の半径を r とすると

$r=$　　　$=$　　　　　　　　　　　$=$

よって，求める球の方程式は

すなわち

問 20 点 C(0, −1, 3) を中心とし，点 A(−1, 3, 4) を通る球の方程式を求めよ。　p.105 Training 26

例題 6 2 点 A(1, −1, −4)，B(−3, 5, 2) を直径の両端とする球の方程式を求めよ。

解

問 21 2 点 A(5, −3, 0)，B(−3, 5, −4) を直径の両端とする球の方程式を求めよ。　p.105 Training 27 (1)

例題 7 点 C(2, −3, 4) を中心とし，xy 平面に接する球の方程式を求めよ。

解

問 22 点 $C(-3,\ 1,\ -4)$ を中心とし，yz 平面に接する球の方程式を求めよ。

p.105 Training 27(2)　p.107 LevelUp 12

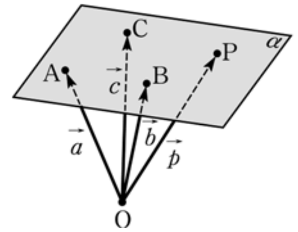
発展　点が平面上にある条件

（教科書 p.104）

100 ページで学んだように，一直線上にない 3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ が定める平面を α とするとき，点 $P(\vec{p})$ が平面 α 上にある条件は $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ となる実数 k，l があることである。

よって　$\vec{p}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})+l(\vec{c}-\vec{a})$

$\vec{p}=(1-k-l)\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$



$1-k-l=s$，$k=t$，$l=u$ とおくと，点 P が平面 α 上にある条件は

（㊺　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

となる実数 s，t，u があることである。

このことを用いて，100 ページの例題 4 は次のように解くこともできる。

例題 4 次の 4 点が同一平面上にあるように，x の値を定めよ。

$A(2,\ -3,\ -3)$，$B(1,\ 5,\ -1)$，$C(0,\ 1,\ -3)$，$D(x,\ 0,\ 0)$

別解

Training

（教科書 p.105）

19 2 点 A$(-1,\ -3,\ 4)$，B$(3,\ -6,\ -2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を求めよ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ を求めよ。

20 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ 2,\ 2)$

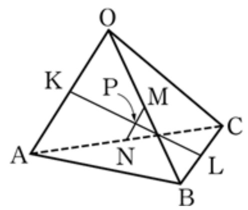
(2) $\vec{a}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 2)$

(3) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1,\ \sqrt{6})$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2})$

21 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -3,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ -4)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

22 空間における 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点を $P(\vec{p})$，外分する点を $Q(\vec{q})$ とする。$\vec{p}$, $\vec{q}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

23 四面体 OABC において，辺 OA, BC, OB, AC の中点を，それぞれ K, L, M, N とし，KL の中点を P とする。このとき，3 点 M, P, N は一直線上にあることを示せ。



24 次の 4 点が同一平面上にあるように，x の値を定めよ。

$A(-1,\ 3,\ 4)$, $B(2,\ 5,\ -3)$, $C(4,\ 0,\ -2)$, $D(0,\ x,\ -x+2)$

25 2 点 $A(5,\ -3,\ 1)$, $B(-1,\ 3,\ 5)$ を通る直線 l 上の点 P が，$OP \perp l$ を満たすとき，点 Pの座標を求めよ。

26 点 $(-2,\ -3,\ 4)$ を中心とし，点 $(1,\ -2,\ 1)$ を通る球の方程式を求めよ。

27 次の問に答えよ。

(1) 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1,\ -4)$，$\mathrm{B}(6,\ -3,\ -2)$ を直径の両端とする球の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{C}(0,\ -3,\ 4)$ を中心とし，zx 平面に接する球の方程式を求めよ。