２節 ベクトルの応用

❶ 位置ベクトル

位置ベクトル

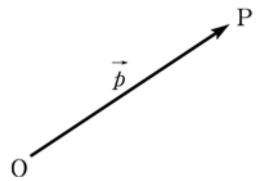
（教科書 p.73）

平面上に定点 O をとると，この平面上の点 P の位置は，ベクトル

$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$

によって定まる。このとき，$\vec{p}$ を点 O を基準とする点 P の

（①　　　　　　　　）という。

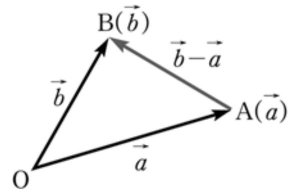


点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを，（②　　　　　　）と表す。

また，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ であるから，2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して

（③　　　　　　　　）

となる。すなわち，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は終点 B の位置ベクトル $\vec{b}$ から始点 A の位置ベクトル $\vec{a}$ を引いたものである。



内分点・外分点の位置ベクトル

（教科書 p.73）

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して，線分 AB を

$m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$　　$m\neq n$

例1 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $3:4$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，線分 AB を $1:3$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とする。$\vec{p}$, $\vec{q}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表してみよう。

$\vec{p}=$

$\vec{q}=$

問1 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して，線分 AB を次の比に内分する点 P および外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 p.86 Training 12

(1)　$3:2$

(2)　$2:5$

三角形の重心の位置ベクトル

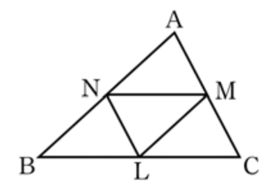
（教科書 p.75）

三角形の重心の位置ベクトル

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

問2 右の図のように，3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする△ABC の 3 辺 BC, CA, AB の中点を，それぞれ L, M, N とする。

(1)　L, M, N の位置ベクトル $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

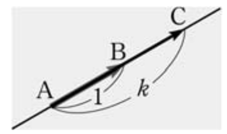


⑵ △LMN の重心の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

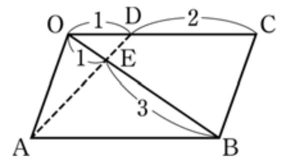
❷ ベクトルの図形への応用

（教科書 p.76）

2 点 A, B が異なるとき，次のことが成り立つ。

3 点が一直線上にあるための条件
3 点 A, B, C が一直線上にある ⇔ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある 

例題 1 平行四辺形 OABC の辺 OC を 1 : 2 に内分する点を D，対角線 OB を 1 : 3 に内分する点を E とする。



⑴ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として，
$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ で表せ。

⑵ 3 点 A, E, D が一直線上にあることを証明せよ。

解

問3 平行四辺形 OABC の辺 AB を 3：2 に内分する点を D，対角線 AC を 3：5 に内分する点を E とすると，3 点 O，E，D は一直線上にあることを証明せよ。 p.86 Training 13

問4 △OAB において，辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB の中点を M とし，線分 AM と BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 p.86 Training 14 p.106 LevelUp 5,6

例題 2 △OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：1 に内分する点を D とし，線分 AD と BC の交点を P とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

考え方 AP：PD $= s:(1-s)$，BP：PC $= t:(1-t)$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表す。

解

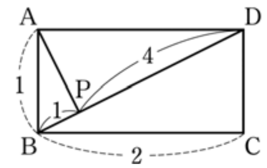
例題 3 鋭角三角形 ABC の頂点 B，C からそれぞれの対辺に下ろした垂線の交点を H とすれば，$AH \perp BC$ であることを証明せよ。

考え方 $AH \perp BC$ を示すには，$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ を示せばよい。

証明

問5 長方形 ABCD において，$AB = 1$，$BC = 2$ であるとき，対角線 BD を 1 : 4 に内分する点を P とすれば，$AP \perp BD$ であることを証明せよ。

p.107 Level Up 7



注意　例題 3 の点 H を△ ABC の垂心という。

③ ベクトル方程式

直線と方向ベクトル

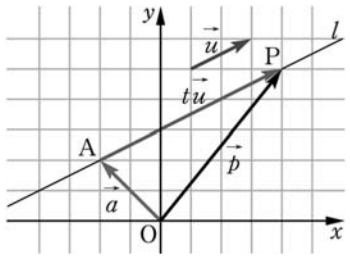
（教科書 p.79）

ベクトルを用いて，平面上の直線を表すことについて考えてみよう。

定点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線を l とする。

直線 l 上の点を $P(\vec{p})$ とすると

$\overrightarrow{AP} /\!/ \vec{u}$　または　$\overrightarrow{AP} = \vec{0}$



より，$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$ となる実数 t がある。

ここで，$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから

$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{u}$

よって　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$　……①

①を直線 l の（④　　　　　　　　）という。また，t を（⑤　　　　　　　　），$\vec{u}$ を直線 l の

（⑥　　　　　　　　）という。

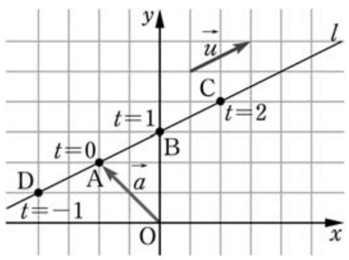
点 $\mathbf{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{u}$ に平行な直線
点 $A(\vec{a})$ を通り $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線のベクトル方程式は $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$

例2 右の図で，直線 l のベクトル方程式は

（　　　　　　　　）と表される。

また，点 $P(\vec{p})$ は，$t = 0,\ 1,\ 2,\ -1$ のとき，

それぞれ点（　　　　　　　　）の位置にある。



問6 例 2 で，$t = 3,\ -\frac{1}{2}$ に対応する点 P の位置を示せ。

媒介変数表示

（教科書 p.80）

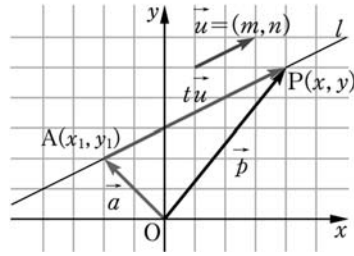
座標平面において，原点 O を位置ベクトルの基準の点とすると，平面上の点 P の座標は，そのまま点 P の位置ベクトルの成分となる。

定点 $A(x_1,\ y_1)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{u} = (m,\ n)$ である直線を l とする。

また，l 上の点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

A と P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{p}$ とすると

$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$, $\vec{p} = (x,\ y)$



であるから，l のベクトル方程式 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ を，成分を用いて表すと

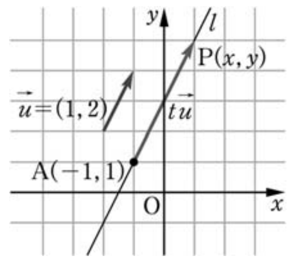
$(x,\ y) = (x_1,\ y_1) + t(m,\ n)$

すなわち　$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_1 + mt} \\ \boldsymbol{y = y_1 + nt} \end{cases}$　……①

となる。①を直線 l の（⑦　　　　　　　　）という。

例3 点 $A(-1,\ 1)$ を通り，$\vec{u} = (1,\ 2)$ を方向ベクトルとする直線 l がある。

l 上の点を $P(x,\ y)$ とすると，直線 l の媒介変数表示は



また，媒介変数 t を消去すると，次の直線の方程式が得られる。

問7 次の点 A を通り，$\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線を媒介変数表示せよ。 p.86 Training 15

また，媒介変数を消去して直線の方程式を求めよ。

(1)　$A(2,\ -3)$, $\vec{u} = (1,\ 2)$

⑵　$A(4,\ 0)$, $\vec{u}=(-3,\ 2)$

2 点を通る直線

（教科書 p.81）

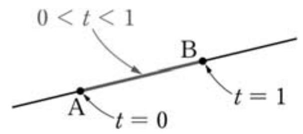
２点 $\mathbf{A}(\vec{a})$, $\mathbf{B}(\vec{b})$ を通る直線
2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は ⑴　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ ⑵　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$, $s+t=1$

問8 次の図の直線 l は，ベクトル方程式 $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ で表される直線であるとする。このとき，$t=-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2 に対応する点 $P(\vec{p})$ の位置をそれぞれ図示せよ。

①において，点 P が線分 AB 上にあるのは，$0\leqq t\leqq 1$ のときである。
ここで $1-t=s$ とおくと，点 P が線分 AB 上にある条件は

（⑧　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

となる。



例題 4　△ OAB に対して

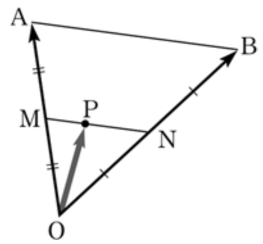
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　　　　……①

とおく。実数 s, t が

$s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t=\frac{1}{2}$　　　　……②

を満たしながら変化するとき，点 P の存在する範囲を求めよ。

解



問9 例題 4 で，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s+t=2$ のとき，点 P の存在する範囲を求めよ。 p.86 Training 16

Challenge 例題 ベクトル方程式で表される領域

（教科書 p.83）

例題 △ OAB に対して

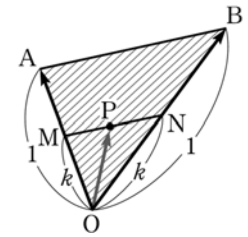
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ ……①

とおく。実数 s，t が

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s+t \leqq 1$ ……②

を満たしながら変化するとき，点 P の存在する範囲を求めよ。

解



問1 △OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。実数 s，t が $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s+t \leqq \frac{1}{2}$ を満たすとき，点 P の存在する範囲を求めよ。

直線と法線ベクトル

（教科書 p.84）

定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 l の方程式を考えてみよう。

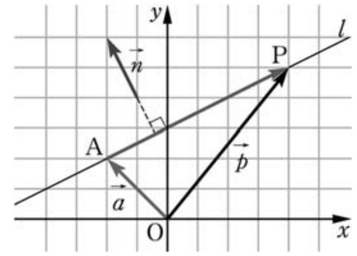
直線 l 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$　または　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$

であるから　$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ より

$\boldsymbol{\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0}$　……①



①を満たす点 P の全体が直線 l である。方程式①は直線 l のベクトル方程式であり，$\vec{n}$ を直線 l の（⑨　　　　　　　　　）という。

例4 点 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$ を通り，$\vec{n} = (2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式は，法線ベクトルが

（　　　　　　　　　　）であるから

（　　　　　　　　　　　　　　）

すなわち

問10 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ。 p.86 Training 17　p.107 Level Up 8

(1)　$\mathrm{A}(5,\ -4)$，$\vec{n} = (2,\ 3)$

(2)　$\mathrm{A}(-1,\ 4)$，$\vec{n} = (-2,\ -1)$

円のベクトル方程式

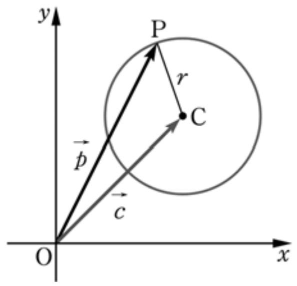
（教科書 p.85）

点 $C(\vec{c})$ を中心とし，半径が r である円 C の周上の点を $P(\vec{p})$ とすると

$|\overrightarrow{CP}| = r$

すなわち

$|\vec{p} - \vec{c}| = r$ ……①



①を円 C のベクトル方程式という。

①の両辺を 2 乗すると

$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2$

ここで，$\vec{p} = (x,\ y)$，$\vec{c} = (a,\ b)$ とすると

$\vec{p} - \vec{c} = (x - a,\ y - b)$

よって，$|\vec{p} - \vec{c}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ であるから

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ……②

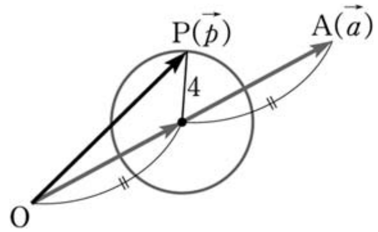
となる。②は円 C の方程式である。

例5 平面上の定点を $A(\vec{a})$ とする。ベクトル方程式 $|2\vec{p} - \vec{a}| = 8$ で表される図形について考えてみよう。

=

=

=



よって，中心の位置ベクトルが（　　　　　），

半径が（　　　　　）の（　　　　　）を表す。

問 11 平面上の定点を $A(\vec{a})$ とする。点 $P(\vec{p})$ についての次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

p.86 Training 18

(1) $|\vec{p} - \vec{a}| = 1$

(2) $|3\vec{p} - \vec{a}| = 6$

Training

（教科書 p.86）

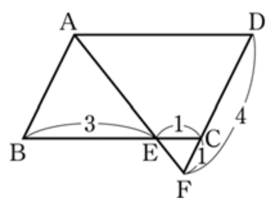
12 平面上に 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) がある。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) 線分 AB を 5 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)

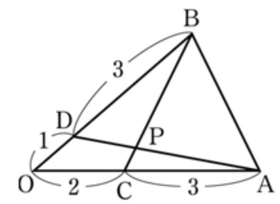
(2) 線分 BC の中点 M($\vec{m}$)

(3) 線分 CA を 4 : 1 に外分する点 Q($\vec{q}$)

13 平行四辺形 ABCD の辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，辺 CD を 1 : 4 に外分する点を F とすると，3 点 A，E，F は一直線上にあることを証明せよ。



14 △OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 3 に内分する点を D とし，線分 AD と BC の交点を P とする。
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。



15 次の点 A を通り，$\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線を媒介変数表示せよ。また，媒介変数を消去して直線の方程式を求めよ。

(1) A$(-2,\ -1)$，$\vec{u} = (3,\ -2)$

(2)　$\mathrm{A}(0,\ -2)$，$\vec{u}=(-1,\ -4)$

16 △OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。実数 s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$s+t=\frac{1}{3}$ を満たしながら変化するとき，点 P の存在する範囲を求めよ。

17 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1)　$\mathrm{A}(-2,\ -3)$，$\vec{n}=(2,\ -1)$

(2)　$\mathrm{A}(-1,\ -\sqrt{2})$，$\vec{n}=(\sqrt{2},\ -1)$

18 平面上の定点を $\mathrm{A}(\vec{a})$ とする。点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ についての次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(1)　$|\vec{p}+2\vec{a}|=2$

(2)　$\left|\frac{\vec{p}}{3}+\frac{\vec{a}}{2}\right|=1$