3節 漸化式と数学的帰納法

❶ 漸化式

（教科書 p.35）

〔1〕 初項

〔2〕 前の項から，その次に続く項を定める規則

の 2 つを与えて数列を定めることができる。

関係式 $a_{n+1} = a_n + 3$ のように，〔2〕の規則を表した式を（①　　　　　）という。

例1 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$a_2 =$ 　　$=$ 　　$=$

$a_3 =$ 　　$=$ 　　$=$

$a_4 =$ 　　$=$ 　　$=$

$a_5 =$ 　　$=$ 　　$=$

問1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。 p.44 Training 17

（1） $a_1 = 6$，$a_{n+1} = a_n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

（2） $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

漸化式と一般項

（教科書 p.36）

例2 （1） $a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n - 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定められた数列は，初項（　　　　），公差（　　　　）の等差数列であるから

$a_n =$

$=$

（2） $a_1 = 3$，$a_{n+1} = -2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定められた数列は，初項（　　　　），公比（　　　　）の等比数列であるから

$a_n =$

問2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.44 Training 18

（1） $a_1 = -3$，$a_{n+1} = a_n + 4$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

（2） $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

例題 1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n + 2n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

解

問3 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.44 Training 19 p.47 Level Up 9

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + n^2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式

(教科書 p.37)

例題 2 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解

問4 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.44 Training 20 p.47 Level Up 10-11

(1) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n - 4\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

⑵ $a_1 = 2,\ a_{n+1} = -2a_n - 9\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

❷ 数学的帰納法

数学的帰納法の考え方

（教科書 p.39）

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 4a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定められた数列 $\{a_n\}$ について考えてみよう。

$$a_1 = 3,\ a_2 = 15,\ a_3 = 63,\ a_4 = 255,\ \cdots$$

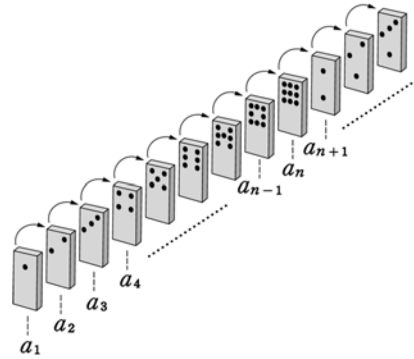
となるから，すべての項が 3 の倍数であると予想される。

このことを証明するには，

〔1〕 $a_1 = 3$ は 3 の倍数である。

〔2〕 a_k が 3 の倍数であるとすると，a_{k+1} も 3 の倍数である。

の 2 つのことを示せばよい。



なぜなら,〔1〕と〔2〕が正しいとすると，まず〔1〕より，a_1 は 3 の倍数である。

したがって,〔2〕で $k = 1$ として，a_2 も 3 の倍数であることがわかる。

よって,〔2〕で $k = 2$ として，a_3 も 3 の倍数であることがわかる。

以下同様にして，a_4，a_5，a_6，⋯ もすべて 3 の倍数であることがわかるからである。

上のような証明方法を，(② 　　　　　　　　　　) という。

数学的帰納法
自然数 n に関する命題がすべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の２つのことを証明すればよい。 〔1〕$n = 1$ のとき成り立つ。 〔2〕$n = k$ のとき成り立つと仮定すると， $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

数学的帰納法を用いた証明

（教科書 p.40）

例題 3 n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots①$$

証明

問5 n を自然数とするとき，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

p.44 Training 21

(1)　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

⑵　$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

例題 4 証明

自然数 n に対して，5^n-1 は 4 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

問6 自然数 n に対して，$4n^3-n$ は 3 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

p.44 Training 22

問7 $a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$ （$n=1$，2，3，$\cdots$）と定められた数列 $\{a_n\}$ のすべての項が 3 の倍数であることを証明せよ。

例題 5 n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$2^n > 2n$ ……①

証明

問8 n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。 p.44 Training 23 p.47 LevelUp 12

$3^n > 8n$

Challenge 例題 漸化式と数学的帰納法

（教科書 p.43）

例題 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

解 与えられた条件より

$$a_1=2,\ a_2=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{4}{3},\ a_4=\frac{5}{4},\ \cdots$$

よって，一般項は　$a_n=\frac{n+1}{n}$　……①

と推定できる。

この推定が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

〔1〕　$n=1$ のときは，$a_1=2$ となり①は成り立つ。

〔2〕　$n=k$ のとき①が成り立つ，すなわち

$$a_k=\frac{k+1}{k}$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき①が成り立つことを示す。

与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}$$

$$=2-\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について①が成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=\dfrac{n+1}{n}$

問1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　p.47 Level Up 13

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

Training

（教科書 p.44）

17 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

(1) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n + 5\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = -1,\ a_{n+1} = 2a_n + n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

18 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

19 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + n(n-1)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

20 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 9,\ 2a_{n+1} = -a_n + 6\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1 = 5,\ a_{n+1} + a_n = 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(4) $a_1 = 4,\ 2a_{n+1} = 5a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

21 n を自然数とするとき，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

22 自然数 n に対して，8^n-7n-1 は 49 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

23 n を 4 以上の自然数とするとき，不等式 $2^n \geqq n^2$ を証明せよ。

発展 3 項間の漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

（教科書 p.45）

問1 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（1） $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$（$n = 1$，$2$，$3$，$\cdots$）

(2) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$